BEER | JOHNSTON | CORNWELL

Mecânica Vetorial para Engenheiros

9ª Edição

DINÂMICA

✓ Com unidades no Sistema Internacional

B415m Beer, Ferdinand P.

Mecânica vetorial para engenheiros [recurso eletrônico] : dinâmica / Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, Jr., Phillip J. Cornwell ; tradução: Antônio Eustáquio de Melo Pertence ; revisão técnica: Antonio Pertence Júnior. – 9. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2012.

Editado também como livro impresso em 2012.
ISBN 978-85-8055-144-0

1. Engenharia mecânica. I. Johnston, E. Russell, Jr. II. Cornwell, Phillip J. III. Título.

CDU 621

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

FERDINAND P. BEER
Ex-professor da Lehigh University

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.
University of Connecticut

PHILLIP J. CORNWELL
Rose-Hulman Institute of Technology

Mecânica Vetorial para Engenheiros

DINÂMICA

9ª Edição

Tradução
Antônio Eustáquio de Melo Pertence
Mestre e Doutor em Engenharia Metalúrgica e de Minas pela UFMG
Professor do Departamento de Engenharia Mecânica da UFMG

Revisão Técnica
Antonio Pertence Júnior
Mestre em Engenharia Mecânica pela UFMG
Professor da Faculdade de Engenharia e Arquitetura (FEA) da Universidade FUMEC/MG

Versão impressa
desta obra: 2012

AMGH Editora Ltda.

2012

SOBRE OS AUTORES

As pessoas se perguntam como Ferd Beer e Russ Johnston puderam escrever em conjunto seus livros, uma vez que um estava em Lehigh e outro na University of Connecticut.

A resposta para essa pergunta é simples. A primeira nomeação como docente de Russ Johnston foi para o Departamento de Engenharia Civil e Mecânica na Lehigh University. Lá ele conheceu Ferd Beer, que já trabalhava no departamento há dois anos e era o coordenador dos cursos de mecânica.

Ferd ficou contente ao descobrir que o seu novo colega, contratado principalmente para ministrar cursos de pós-graduação de engenharia estrutural, não só se dispunha, mas também estava ansioso para ajudá-lo a reestruturar os cursos de mecânica. Ambos acreditavam que esses cursos deveriam ser ensinados a partir de alguns princípios básicos e que os conceitos envolvidos seriam melhor compreendidos e lembrados pelos alunos se fossem apresentados de maneira gráfica. Juntos, eles transcreveram anotações de aula em estática e dinâmica e, posteriormente, acrescentaram problemas motivadores para os futuros engenheiros. Logo produziram o original da primeira edição do *Mechanics for Engineers*, publicado em junho de 1956.

Na segunda edição de *Mechanics for Engineers* e na primeira edição de *Vector Mechanics for Engineers*, Russ Johnston já estava no Worcester Polytechnic Institute e, nas edições seguintes, na University of Connecticut. Enquanto isso, tanto Ferd como Russ assumiram responsabilidades administrativas em seus departamentos e se envolveram em pesquisa, consultoria e supervisão de estudantes da pós-graduação: Ferd na área de processos estocásticos e vibrações aleatórias e Russ na área de estabilidade elástica e análise de projetos estruturais. No entanto, o interesse deles em aprimorar o ensino das disciplinas básicas de mecânica não diminuiu, e ambos ministraram partes desses cursos, enquanto continuavam revisando seus textos, e começaram a escrever os originais da primeira edição do livro *Mechanics of Materials*.

Essa parceria durou mais de meio século e rendeu várias revisões bem-sucedidas de seus livros. As contribuições de Ferd e Russ para o ensino da engenharia lhes valeram uma série de homenagens e prêmios. Eles foram condecorados com o Western Electric Fund Award da American Society for Engineering Education pela excelência no ensino de estudantes de engenharia em suas respectivas regionais. Ambos receberam também o Distinguished Educator Award, concedido pela Mechanics Division da mesma sociedade. Desde 2001, o prêmio New Mechanics Educator Award da Mechanics Division passou a ter este nome em homenagem aos autores Beer e Johnston.

Ferdinand P. Beer. Nascido na França e educado na França e na Suíça, é Mestre em Ciências pela Sorbonne e Doutor em Mecânica Teórica pela University of Genebra. Radicou-se nos Estados Unidos após servir ao exército francês no início da Segunda Grande Guerra e lecionar durante quatro anos no Williams College, no programa conjunto da Williams-MIT em artes e engenharia. Após trabalhar no Williams College, Ferd ingressou no corpo docente da Lehigh University, onde lecionou durante 37 anos. Ocupou vários cargos, incluindo o de Professor Emérito da Universidade e chefe do Departamento de Engenharia Mecânica. Em 1995, Ferd foi agraciado com o título honorário de Doutor em Engenharia pela Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nascido na Filadélfia, Russ recebeu o título de Bacharel em Engenharia Civil da University of Delaware e o título de Doutor em Engenharia Estrutural do Massachusetts Institute of Technology. Lecionou na Lehigh University e no Worcester Polytechnic Institute antes de se juntar ao corpo docente da University of Connecticut, onde ocupou o cargo de chefe do Departamento de Engenharia Civil e lecionou por 26 anos. Em 1991, Russ recebeu o prêmio Outstanding Civil Engineer Award pela Connecticut Section da American Society of Civil Engineers.

Phillip J. Cornwell. Phil recebeu o título de Bacharel em Engenharia Mecânica pela Texas Tech University e título de Metre e Doutor em Engenharia Mecânica e Aeroespacial pela Princeton University. Atualmente é professor de engenharia mecânica no Rose-Hulman Institute of Technology, onde ensina desde 1989. Seus interesses atuais incluem dinâmica estrutural, monitoramento da saúde estrutural e ensino na graduação de engenharia. Phil passa seus verões trabalhando em Los Alamos National Laboratory onde é o conselheiro da Los Alamos Dynamics Summer School e faz pesquisa na área de monitoramento da saúde estrutural. Phil recebeu o prêmio SAE Ralph R. Teetor Educational em 1992, o prêmio Dean's Outstanding Scholar em Rose-Hulman em 2000 e o prêmio Board of Trustees Outstanding Scholar em Rose-Hulman em 2001.

PREFÁCIO

Objetivos

O principal objetivo de um primeiro curso de mecânica deve ser desenvolver no estudante de engenharia a capacidade de analisar qualquer problema de modo simples e lógico e aplicar à sua solução alguns poucos princípios básicos bem conhecidos. Espera-se que este texto, assim como o volume anterior, *Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática,* auxilie o professor a alcançar esse objetivo.

Abordagem geral

A análise vetorial foi introduzida no início do primeiro volume e usada na apresentação dos princípios básicos de estática, assim como para a resolução de muitos problemas, em particular de problemas tridimensionais. Analogamente, o conceito de diferenciação vetorial será introduzido logo no início deste volume, e a análise vetorial será usada ao longo de toda a apresentação dos conceitos de dinâmica. Essa abordagem leva a deduções mais concisas dos princípios fundamentais da mecânica. Também torna possível analisar muitos problemas de cinemática e cinética que não poderiam ser resolvidos por métodos escalares. No entanto, a ênfase do texto permanece sendo a compreensão correta dos princípios da mecânica e a sua aplicação à solução de problemas de engenharia, sendo a análise vetorial apresentada principalmente como uma ferramenta adequada.*

Aplicações práticas são imediatamente apresentadas. Uma das características da abordagem adotada neste livro é que a mecânica de *partículas* é claramente separada da mecânica de *corpos rígidos.* Essa abordagem nos possibilita considerar aplicações práticas e simples já em um estágio inicial e postergar a introdução de conceitos mais complexos. Por exemplo:

- No volume de *Estática,* a estática de partículas foi tratada em primeiro lugar, e o princípio de equilíbrio de uma partícula foi imediatamente aplicado a situações práticas envolvendo apenas forças concorrentes. A estática de corpos rígidos foi considerada mais tarde, na ocasião em que os produtos escalares e vetoriais de dois vetores foram introduzidos e usados para definir o momento de uma força em relação a um ponto e em relação a um eixo.
- No volume de *Dinâmica,* a mesma divisão foi observada. Os conceitos básicos de força, massa e aceleração, de trabalho e energia e de impulso e quantidade de movimento são introduzidos e aplicados em primeiro lugar a problemas que envolvem somente partículas. Assim, os estudantes podem se familiarizar com os três métodos básicos usados em dinâmica e aprender suas respectivas vantagens antes de se defrontar com as dificuldades associadas ao movimento de corpos rígidos.

Novos conceitos são apresentados em termos simples. Considerando que este texto foi desenvolvido para um primeiro curso de dinâmica, os conceitos novos são apresentados em termos simples, e cada etapa é explicada em detalhe. Por outro lado, ao discutir os aspectos mais

---

* Em um texto paralelo, em inglês, *Mechanics for Engineers: Dynamics*, 5ª edição, o uso de álgebra vetorial fica limitado à adição e subtração de vetores, e o diferencial de um vetor é omitido.

amplos dos problemas considerados e ao acentuar os métodos de aplicação geral, atingiu-se uma maturidade definitiva de abordagem. Por exemplo, o conceito de energia potencial é discutido no contexto geral de força conservativa. Além disso, o estudo do movimento plano de corpos rígidos foi projetado para conduzir naturalmente ao estudo de seu movimento mais geral no espaço. Isso é verdadeiro tanto em cinemática como em cinética, onde o princípio de equivalência de forças efetivas e externas é aplicado diretamente à análise do movimento plano, facilitando, assim, a transição para o estudo do movimento tridimensional.

Princípios fundamentais são apresentados no contexto de aplicações simples. O fato de a mecânica ser essencialmente uma ciência *dedutiva,* baseada em poucos princípios fundamentais, é acentuado. As derivações são apresentadas em sua sequência lógica e com todo o rigor permitido neste nível. Entretanto, como o processo de aprendizagem é amplamente *indutivo*, as aplicações simples são consideradas em primeiro lugar. Por exemplo:

- A cinemática de partículas (Cap. 11) precede a cinemática de corpos rígidos (Cap. 15).
- Os princípios fundamentais da cinética de corpos rígidos são aplicados primeiro à solução de problemas bidimensionais (Caps. 16 e 17), que podem ser mais facilmente visualizados pelo estudante, enquanto os problemas tridimensionais são abordados somente no Cap. 18.

A apresentação dos princípios de cinética é unificada. A nona edição de *Mecânica Vetorial para Engenheiros* manteve a apresentação unificada de cinética que caracterizou as oito edições anteriores. Os conceitos de quantidade de movimento linear e angular são introduzidos no Cap. 12 de modo que a segunda lei de Newton do movimento possa ser apresentada não apenas em sua forma convencional $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, mas também como uma lei que relaciona, respectivamente, a soma das forças que agem sobre uma partícula e de seus momentos às taxas de variação da quantidade de movimento linear e angular da partícula. Isso torna possível introduzir antecipadamente o princípio de conservação da quantidade de movimento angular e discutir de maneira mais significativa o movimento de uma partícula sujeita a uma força central (Seção 12.9). Mais importante ainda, essa abordagem pode ser prontamente estendida ao estudo do movimento de um sistema de partículas (Cap. 14) e leva a um tratamento mais conciso e unificado da cinética de corpos rígidos bi e tridimensionais (Caps. de 16 a 18).

Diagramas de corpo livre são usados tanto para resolver problemas de equilíbrio como para expressar a equivalência de sistemas de forças. Diagramas de corpo livre foram previamente introduzidos em estática e sua importância é enfatizada ao longo de todo o livro. Eles foram usados não apenas para resolver problemas de equilíbrio, mas também para expressar a equivalência de dois sistemas de forças ou, de modo geral, de dois sistemas de vetores. A vantagem dessa abordagem torna-se aparente no estudo da dinâmica de corpos rígidos, onde é usada para resolver tanto problemas tridimensionais como bidimensionais. Ao dar maior ênfase às "equações baseadas no diagrama de corpo livre" do que às equações algébricas do movimento, é possí-

vel chegar a uma compreensão mais intuitiva e completa dos princípios fundamentais da dinâmica. Essa abordagem, introduzida pela primeira vez em 1962 na primeira edição de *Mecânica Vetorial para Engenheiros,* tem hoje ampla aceitação entre os professores de mecânica deste país. Por essa razão, ela é usada preferencialmente ao método do equilíbrio dinâmico e às equações do movimento na apresentação de todos os problemas resolvidos deste livro.

Seções opcionais oferecem tópicos avançados ou especializados. Um grande número de seções opcionais foi incluído nesta edição. Essas seções são indicadas por asteriscos, de modo a distingui-las facilmente daquelas que constituem o núcleo do curso básico de dinâmica. Elas podem ser omitidas sem prejuízo à compreensão do restante do texto.

Os tópicos incluídos nas seções opcionais incluem métodos gráficos para a resolução de problemas de movimento retilíneo, a trajetória de uma partícula sujeita a uma força central, a deflexão de correntes de fluido, problemas que envolvem a propulsão a jato e de foguetes, a cinemática e a cinética de corpos rígidos tridimensionais, vibrações mecânicas amortecidas e analogias elétricas. Esses tópicos serão considerados de particular interesse quando a dinâmica for ensinada no curso básico de engenharia.

O material apresentado no texto e a maioria dos problemas não requerem conhecimento matemático prévio além de álgebra, trigonometria e cálculo elementar, e os elementos de álgebra vetorial apresentados nos Caps. 2 e 3 do volume de estática*. Entretanto, foram incluídos problemas especiais que fazem uso de um conhecimento mais avançado de cálculo e, certas seções, tais como as Seções 19.8 e 19.9 sobre vibrações amortecidas, somente devem ser ministradas se os estudantes tiverem embasamento matemático apropriado. Nas partes do texto que empregam o cálculo elementar, uma ênfase maior é dada à compreensão e aplicação corretas dos conceitos de diferenciação e integração em relação à manipulação rápida de fórmulas matemáticas. Nesse contexto, deve-se mencionar que a determinação dos centroides de áreas compostas precede o cálculo de centroides por integração, tornando possível, então, estabelecer firmemente o conceito de momento de área antes de introduzir o uso do conceito de integração.

Organização dos capítulos e aspectos didáticos

Introdução do capítulo. Cada capítulo começa com uma seção introdutória estabelecendo o propósito e as metas do capítulo e descrevendo em linguagem simples os tópicos a serem analisados e suas aplicações à solução de problemas de engenharia. O novo sumário, no início dos capítulos, fornece aos estudantes uma ideia prévia dos tópicos do capítulo.

Lições do capítulo. O corpo do texto é dividido em unidades, cada qual constituída por uma ou várias seções teóricas, um ou vários problemas resolvidos e um grande número de problemas propostos. Cada unidade corresponde a um tópico bem definido e geralmente pode ser

---

* Para a conveniência do leitor, algumas definições e propriedades úteis de álgebra vetorial foram resumidas no Apêndice A, no final deste volume. Além disso, as Seções de 9.11 a 9.18 do volume de *Estática*, que tratam de momentos de inércia de massas, foram reproduzidas no Apêndice B.

coberta em uma aula. Em certos casos, porém, o professor poderá considerar desejável dedicar mais de uma aula a um dado tópico. Em inglês, o professor tem à disposição o *Instructor's and Solutions Manual,* que contém sugestões de apoio para cada lição.

Problemas resolvidos. Os problemas resolvidos são planejados, em grande parte, no mesmo formato que o estudante usará para resolver os problemas propostos. Logo, eles servem a um duplo propósito: ampliar o texto e demonstrar o tipo de trabalho claro e ordenado que os estudantes devem desenvolver em suas próprias soluções.

Metodologia para a resolução de problemas. Uma seção intitulada *Metodologia para a Resolução de Problemas* está incluída em cada seção, entre os problemas resolvidos e os problemas propostos. O objetivo dessa seção é ajudar os estudantes a organizarem mentalmente a teoria apresentada no texto e os métodos de solução dos problemas resolvidos, de modo que possam ser mais bem-sucedidos na solução dos problemas propostos. Também estão incluídas nessas seções sugestões específicas e estratégias que habilitarão o estudante a uma abordagem mais eficaz de qualquer problema proposto.

Conjuntos de exercícios propostos. A maioria dos problemas é de natureza prática, o que deve motivar os estudantes de engenharia. No entanto, eles foram concebidos, sobretudo, para ilustrar o material apresentado no livro e auxiliar os estudantes a compreenderem os princípios da mecânica. Os problemas estão agrupados de acordo com as partes do material que ilustram e estão dispostos em ordem crescente de dificuldade. Os problemas que requerem atenção especial estão indicados por asteriscos. Para 70% dos problemas, as respostas são dadas no final do livro. Os problemas para os quais são dadas respostas estão numerados em fonte sem itálico no texto, enquanto aqueles que não trazem a resposta estão numerados em *itálico.*

Revisão e resumo. Cada capítulo termina com uma revisão e um resumo do material analisado do próprio capítulo. Notas de margem são usadas para ajudar os estudantes a organizar seu trabalho de revisão e referências cruzadas foram incluídas para ajudá-los a encontrar as partes do material que requerem sua atenção especial.

Problemas para revisão. Um conjunto de problemas de revisão está incluído ao final de cada capítulo. Esses problemas fornecem aos estudantes uma oportunidade adicional de aplicar os conceitos mais importantes apresentados no capítulo.

Problemas com utilização do computador. Cada capítulo inclui um conjunto de problemas concebidos para serem resolvidos com programas de computador. Muitos desses problemas são relevantes para o desenvolvimento de projetos. Por exemplo, eles podem envolver a determinação do movimento de uma partícula sob condições iniciais, a análise cinemática ou cinética de mecanismos em posições sucessivas ou a integração numérica de várias equações de movimento. O desenvolvimento do algoritmo necessário para resolver um dado problema de mecânica ajudará o estudante de duas maneiras: (1) irá ajudá-lo a adquirir uma me-

lhor compreensão dos princípios de mecânica envolvidos; (2) proporcionará uma oportunidade de aplicar seus conhecimentos de computação para a solução de um problema significativo de engenharia.

Suplementos

Um extenso pacote de suplementos destinado aos professores está disponível no site www.grupoa.com.br, área do professor (sob proteção de senha). Lá constam soluções de exercícios (em inglês), lâminas de Power Point (em português), entre outros materiais listados a seguir.

Instructor's and Solutions Manual.* Em inglês, o professor tem à disposição o *Instructor's and Solutions Manual*, que apresenta a solução de problemas propostos no formato "um por página". Este manual também apresenta uma série de tabelas destinadas a auxiliar os professores na criação de um cronograma de trabalhos para o seu curso. Os vários tópicos abordados no texto estão listados na Tabela I, e um número sugerido de períodos a ser gasto em cada tópico é indicado. A Tabela II fornece uma breve descrição de todos os grupos de problemas e uma classificação dos problemas em cada grupo de acordo com as unidades usadas. Cronogramas de aulas são mostrados nas Tabelas III, IV e V, junto a várias listas opcionais de exercícios para resolver.

Agradecimentos

Agradecemos especialmente a Amy Mazurek, do Williams Memorial Institute, que verificou cuidadosamente as soluções e respostas de todos os problemas nesta edição e preparou as soluções para o *Instructor's and solutions manual*; Yohannes Ketema da Minnesota University; David Oglesby da Missouri-Rolla University; e Daniel W. Yannitell da Louisiana State University.

Reconhecemos de bom grado o trabalho de Dennis Ormond da Fine Line Illustrations, pelas habilidosas ilustrações que tanto contribuíram para a eficácia do texto.

Os autores agradecem às várias empresas que forneceram fotografias para esta edição. Também gostaríamos de reconhecer os esforços e a paciência de nossa pesquisadora de fotos, Sabina Dowell.

Os autores também são gratos à equipe da McGraw-Hill pelo apoio e dedicação durante a preparação desta nova edição e especialmente pelas contribuições de Stenquist Bill, Lora Ncyens e Sheila Frank.

Finalmente, os autores agradecem os muitos comentários e sugestões oferecidas pelos usuários das edições anteriores deste livro.

E. Russell Johnston, Jr.
Phillip J. Cornwell

* N. de E. Os professores que adotam esta obra estão convidados a se cadastrar no site do Grupo A para conhecer os recursos de apoio disponíveis.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{a}$, a	Aceleração
a	Constante; raio; distância, semieixo maior da elipse
$\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{a}$	Aceleração do centro de massa
$\mathbf{a}_{B/A}$	Aceleração de *B* relativa a um referencial em translação com *A*
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$	Aceleração de *P* relativa a um referencial rotativo $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_C$	Aceleração de Coriolis
A, **B**, **C**, . . .	Reações em apoios e conexões
A, *B*, *C*, . . .	Pontos
A	Área
b	Largura; distância, semieixo menor da elipse
c	Constante; coeficiente de amortecimento viscoso
C	Centroide; centro instantâneo de rotação; capacitância
d	Distância
$\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_t$	Vetor unitário ao longo da normal e tangente
$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$	Vetor unitário na direção radial e transversal
e	Coeficiente de restituição; base dos logaritmos naturais
E	Energia mecânica total; voltagem
f	Função escalar
f_f	Frequência de vibração forçada
f_n	Frequência natural
$\mathbf{F}$	Força; força de atrito
g	Aceleração da gravidade
G	Centro de gravidade; centro de massa; constante gravitacional
h	Quantidade de movimento angular por unidade de massa
$\mathbf{H}_O$	Quantidade de movimento angular em relação ao ponto *O*
$\dot{\mathbf{H}}_G$	Taxa de variação da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ com relação a um referencial de orientação fixa
$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$	Taxa de variação da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ com relação a um referencial rotativo *Gxyz*
i, **j**, **k**	Vetores unitários ao longo dos eixos coordenados
i	Corrente
I, I_x, ...	Momentos de inércia
$\bar{I}$	Momento de inércia centroidal
I_{xy}, ...	Produtos de inércia
J	Momento de inércia polar
k	Constante de mola
k_x, k_y, k_O	Raios de giração
$\bar{k}$	Raio de giração em relação ao centroide
l	Comprimento
$\mathbf{L}$	Quantidade de movimento linear
L	Comprimento; indutância
m	Massa
m'	Massa por unidade de comprimento
$\mathbf{M}$	Binário; momento
$\mathbf{M}_O$	Momento em relação ao ponto *O*
$\mathbf{M}_O^R$	Momento resultante em relação ao ponto *O*
M	Intensidade do binário ou momento; massa da Terra
M_{OL}	Momento em relação ao eixo *OL*
n	Direção normal
$\mathbf{N}$	Componente normal da reação
O	Origem das coordenadas
$\mathbf{P}$	Força; vetor

$\dot{\mathbf{P}}$ Taxa de variação do vetor **P** em relação a um referencial de orientação fixa
q Vazão em massa de um escoamento; carga elétrica
$\mathbf{Q}$ Força; vetor
$\dot{\mathbf{Q}}$ Taxa de variação do vetor **Q** em relação a um referencial de orientação fixa
$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ Taxa de variação do vetor **Q** em relação a um referencial *Oxyz*
$\mathbf{r}$ Vetor posição
$\mathbf{r}_{B/A}$ Vetor posição de *B* em relação a *A*
r Raio; distância; coordenada polar
$\mathbf{R}$ Força resultante; vetor resultante; reação
R Raio da Terra; resistência
$\mathbf{s}$ Vetor posição
s Comprimento de arco; comprimento de cabo
t Tempo; espessura; direção tangencial
$\mathbf{T}$ Força
T Tração; energia cinética
$\mathbf{u}$ Velocidade
u Variável
U Trabalho
$\mathbf{v}$, v Velocidade
$\bar{\mathbf{v}}$, $\bar{v}$ Velocidade do centro de massa
$\mathbf{v}_{B/A}$ Velocidade de *B* relativa a um referencial em translação com *A*
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ Velocidade de *P* relativa a um referencial rotativo $\mathcal{F}$
$\mathbf{V}$ Produto vetorial
V Volume; energia potencial
w Carga por unidade de comprimento
$\mathbf{W}$, W Peso; carga
x, y, z Coordenadas retangulares; distâncias
$\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ Derivadas temporais das coordenadas *x, y, z*
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ Coordenadas retangulares do centroide, do centro de gravidade ou do centro de massa
$\boldsymbol{\alpha}$, α Aceleração angular
α, β, γ Ângulos
γ Peso específico
δ Alongamento
ε Excentricidade da seção cônica ou de órbita
$\boldsymbol{\lambda}$ Vetor unitário ao longo de uma linha
η Rendimento ou eficiência
θ Coordenada angular; ângulo de Euler; ângulo; coordenada polar.
μ Coeficiente de atrito
ρ Massa específica; raio de curvatura
τ Tempo periódico
τ_n Período de vibração livre
ϕ Ângulo de atrito; ângulo de Euler; ângulo de fase; ângulo
φ Diferença de fase
ψ Ângulo de Euler
$\boldsymbol{\omega}$, ω Velocidade angular
ω_f Frequência circular de vibração forçada
ω_n Frequência circular natural
$\boldsymbol{\Omega}$ Velocidade angular do referencial

EQUIVALÊNCIA DE TERMOS TÉCNICOS

Brasil	Portugal
Angular (de um sistema)	Momento angular (de um sistema)
Ângulo de tiro	Ângulo de disparo
Balanceamento	Equilibragem
Balanceamento de eixos rotativos	Equilibragem de veios rotativos
Centro do corporal	Rolante
Centro do espacial	Base
Componentes retangulares	Componentes cartesianas
Componentes retangulares escalares	Componentes rectangulares
Cone corporal	Cone de corpo
Deslizamento	Escorregamento
Eficiência global	Rendimento global
Eficiência (de uma máquina)	Rendimento (de uma máquina)
Eficiência mecânica	Rendimento mecânico
Eixo centroidal	Eixo baricêntrico
Empuxo	Força de propulsão
Esteira transportadora ou rolante	Transportadora de correia
Fluxo permanente (de partículas)	Fluxo estacionário (de partículas)
Freio	Travão
Impacto	Choque
Impacto central (de dois corpos)	Choque central (de dois corpos)
Impacto central direto	Choque central directo
Impacto central oblíquo	Choque central oblíquo
Impacto direto	Choque directo
Impacto oblíquo	Choque oblíquo
Linha de impacto	Normal de choque
Momento linear	Quantidade de movimento
Momentos centroidais de inércia de massa	Momentos de inércia de massa
Momentos centroidais principais de inércia	Momentos centrais de inércia
Movimento restrito	Movimento restringido
Ônibus	Autocarro
Pino	Articulação
Produto vetorial	Produto externo
Produto escalar	Produto interno
Produtos centroidais de inércia de massa	Produtos de inércia de massa
Quantidade de movimento angular	Momento angular
Quantidade de movimento linear	Quantidade de movimento
Referencial centroidal	Referencial baricêntrico
Rolamento	Transportador rolante
Rotação centroidal	Rotação baricêntrica
Rotação não-centroidal	Rotação não-baricêntrica
Suporte	Apoio
Trabalho (potência) produzido	Trabalho (potência) de saída
Trabalho (potência) absorvido	Trabalho (potência) de entrada
Trem	Combóio
Vínculo, conexão	Ligação

Sumário resumido

A disciplina Mecânica vetorial para engenheiros é composta de dois grandes temas, que por sua vez dão nome a dois livros clássicos, publicados no Brasil pela Bookman Editora. Além deste volume sobre dinâmica, conheça também o estática (ISBN 978-85-8055-047-7), que contém os 10 capítulos iniciais sobre o tema da mecânica vetorial.

SUMÁRIO

11 Cinemática de partículas 605

12 Cinemática de partículas: a segunda lei de Newton 695

13 Cinética de partículas: métodos de energia e quantidade de movimento 759

14 Sistemas de partículas 859

15 Cinemática de corpos rígidos 919

Mecânica Vetorial para Engenheiros: Dinâmica

O movimento do ônibus espacial pode ser descrito por sua *posição, velocidade* e *aceleração*. Quando aterrissa, o piloto do ônibus espacial precisa considerar a velocidade do vento e o *movimento relativo* do ônibus espacial com relação ao vento. O estudo do movimento é conhecido como *cinemática*, o assunto deste capítulo.

CAPÍTULO 11

Cinemática de partículas

11 Cinemática de partículas

11.1 Introdução à dinâmica

Os Caps. de 1 a 10 foram dedicados à *estática,* ou seja, à análise de corpos em repouso. Agora, iniciaremos o estudo da *dinâmica,* a parte da mecânica que trata da análise de corpos em movimento.

Enquanto o estudo da estática remonta à época dos filósofos gregos, a primeira contribuição significativa à dinâmica foi feita por Galileu (1564-1642). Os experimentos de Galileu sobre corpos uniformemente acelerados levaram Newton (1642-1727) a formular suas leis fundamentais do movimento.

A dinâmica inclui:

1. A *cinemática,* que é o estudo da geometria do movimento, usada para relacionar deslocamento, velocidade, aceleração e tempo, sem referência às causas do movimento.
2. A *cinética,* que é o estudo da relação existente entre as forças que atuam sobre um corpo, a massa do corpo e seu movimento. A cinética é usada para prever o movimento causado por forças conhecidas ou para determinar as forças necessárias para produzir um dado movimento.

Os Caps. de 11 a 14 são dedicados à *dinâmica de partículas*; no Cap. 11, a *cinemática de partículas* será considerada. O uso da palavra *partícula* não significa que nosso estudo estará limitado a corpúsculos; mais propriamente, ele indica que nesses primeiros capítulos o movimento de corpos – possivelmente tão grandes quanto automóveis, foguetes ou aviões – serão considerados, sem levar em conta o tamanho desses corpos. Ao afirmar que os corpos são analisados como partículas, queremos dizer que apenas seu movimento, como um todo, será considerado; qualquer rotação em torno do seu centro de massa será desprezada. Há casos, entretanto, em que tal rotação não é desprezível; os corpos, então, não poderão ser considerados como partículas. Tais movimentos serão analisados em capítulos posteriores, que tratam da *dinâmica de corpos rígidos.*

Na primeira parte do Cap. 11, o movimento retilíneo de uma partícula será analisado; ou seja, a posição, velocidade e aceleração de uma partícula serão determinadas a cada instante à medida que ela se move ao longo de uma linha reta. Primeiro, métodos gerais de análise serão usados para estudar o movimento de uma partícula; em seguida, dois casos particulares importantes serão considerados, a saber, o movimento uniforme e o movimento uniformemente acelerado de uma partícula (Seções 11.4 e 11.5). Na Seção 11.6, o movimento simultâneo de várias partículas será estudado e o conceito de movimento relativo de uma partícula em relação a outra será introduzido. A primeira parte deste capítulo termina com um estudo de métodos gráficos de análise e de sua aplicação para a solução de vários problemas que envolvem o movimento retilíneo de partículas (Seções 11.7 e 11.8).

Na segunda parte do capítulo, será analisado o movimento de uma partícula à medida que ela se move ao longo de uma trajetória curva. Como a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula serão definidas como grandezas vetoriais, o conceito de derivada de uma função vetorial será introduzido na Seção 11.10 e adicionado às nossas

ferramentas matemáticas. As aplicações em que o movimento de uma partícula é definido pelos componentes retangulares de sua velocidade e aceleração serão então consideradas; nesse momento, o movimento de um projétil será estudado (Seção 11.11). Na Seção 11.12, será considerado o movimento de uma partícula relativamente a um sistema de referência em translação. Finalmente, o movimento curvilíneo de uma partícula será analisado em termos de outros componentes que não os retangulares. Os componentes tangencial e normal da velocidade e da aceleração de uma partícula serão introduzidos na Seção 11.13, e os componentes radial e transversal de sua velocidade e aceleração na Seção 11.14.

MOVIMENTO RETILÍNEO DE PARTÍCULAS

11.2 Posição, velocidade e aceleração

Diz-se que uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta está em *movimento retilíneo.* Em qualquer instante dado t, essa partícula vai ocupar uma certa posição sobre a linha reta. Para definir a posição P da partícula, escolhemos uma origem fixa O na linha reta e um sentido positivo ao longo da reta. Medimos a distância x de O a P e a anotamos com um sinal positivo ou negativo, de acordo com o fato de P ter sido alcançado a partir de O movendo-se no sentido positivo ou no negativo ao longo da linha. A distância x, com o sinal adequado, define completamente a posição da partícula; ela é chamada de *coordenada de posição* da partícula considerada. Por exemplo, a coordenada de posição correspondente a P na Fig. 11.1*a* é $x = +5$ m; e a coordenada correspondente a P' na Fig. 11.1*b* é $x' = -2$ m.

Figura 11.1

Quando a coordenada de posição x de uma partícula é conhecida para qualquer valor do tempo t, dizemos que o movimento da partícula é conhecido. A "tabela horária" do movimento pode ser dada sob a forma de uma equação em x e t, tal como $x = 6t^2 - t^3$, ou na forma de um gráfico de x em função de t, como mostrado na Fig. 11.6. A unidade usada mais frequentemente para medir a coordenada de posição x é o metro (m), no sistema SI de unidades*. O tempo t é normalmente medido em segundos (s).

Figura 11.2

Considere a posição P ocupada pela partícula no instante t e a coordenada correspondente x (Fig. 11.2). Considere, também, a posição P' ocupada pela partícula em um instante posterior $t + \Delta t$; a coordenada de posição P' pode ser obtida somando-se à coordenada x de P o pequeno deslocamento Δx, que será positivo ou negativo de acordo com o fato de P' estar à direita ou à esquerda de P. A *velocidade média* da partícula no intervalo de tempo Δt é definida como o quociente do deslocamento Δx pelo intervalo de tempo Δt:

$$\text{Velocidade média} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

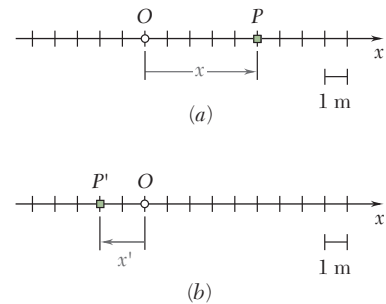
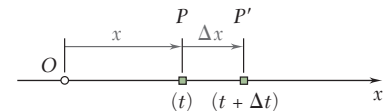
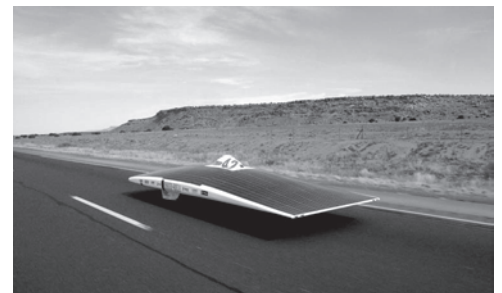



Foto 11.1 O movimento do carro solar pode ser descrito por sua posição, velocidade e aceleração.

* Conforme a Seção 1.3.

Se unidades do SI forem utilizadas, Δx é expresso em metros e Δt em segundos; a velocidade média será então expressa em metros por segundo (m/s).

A *velocidade instantânea* v da partícula no instante t é obtida a partir da velocidade média, escolhendo-se intervalos de tempo Δt e deslocamentos Δx cada vez menores:

$$\text{Velocidade instantânea} = v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea também será expressa em m/s. Observando que o limite do quociente é igual, por definição, à derivada de x em relação a t, escrevemos

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

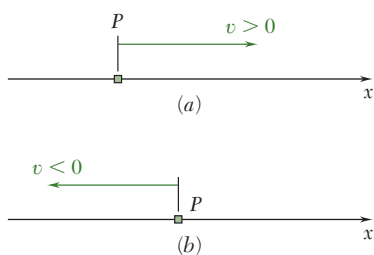



Figura 11.3

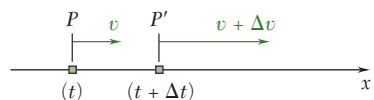



Figura 11.4

A velocidade v é representada por um número algébrico que pode ser positivo ou negativo*. Um valor positivo de v indica que x aumenta, ou seja, que a partícula se move no sentido positivo (Fig. 11.3*a*); um valor negativo de v indica que x diminui, ou seja, que a partícula se move no sentido negativo (Fig. 11.3*b*). A intensidade de v é conhecida como a *velocidade escalar* da partícula.

Considere a velocidade v da partícula no instante t e também sua velocidade $v + \Delta v$ em um instante posterior $t + \Delta t$ (Fig. 11.4). A *aceleração média* da partícula no intervalo de tempo Δt é definida como o quociente de Δv por Δt:

$$\text{Aceleração média} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se unidades do SI forem utilizadas, Δv é expresso em m/s e Δt em segundos; a aceleração média será então expressa em m/s^2.

A *aceleração instantânea* a da partícula no instante t é obtida a partir da aceleração média escolhendo-se valores cada vez menores para Δt e Δv.

$$\text{Aceleração instantânea} = a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A aceleração instantânea também será expressa em m/s^2. O limite do quociente, que é, por definição, a derivada de v em relação a t, mede a taxa de variação da velocidade. Escrevemos

* Como você verá na Seção 11.9, a velocidade é realmente uma quantidade vetorial. Entretanto, como estamos considerando aqui o movimento retilíneo de uma partícula, onde a velocidade da partícula tem uma direção conhecida e fixa, somente precisamos especificar o sentido e a intensidade da velocidade; isto pode ser feito convenientemente usando-se uma quantidade escalar com um sinal positivo ou negativo. O mesmo é verdadeiro para a aceleração de uma partícula em movimento retilíneo.

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

ou, substituindo por v de (11.1)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

A aceleração a é representada por um número algébrico que pode ser positivo ou negativo*. Um valor positivo para a indica que a velocidade (ou seja, o número algébrico v) aumenta. Isso pode significar que a partícula está se movendo mais rapidamente no sentido positivo (Fig. 11.5*a*), ou que ela está se deslocando mais lentamente no sentido negativo (Fig. 11.5*b*); em ambos os casos, Δv é positivo. Um valor negativo de a indica que a velocidade está diminuindo; ou a partícula está se deslocando mais lentamente no sentido positivo (Fig. 11.5*c*), ou ela está se movendo mais rapidamente no sentido negativo (Fig. 11.5*d*).

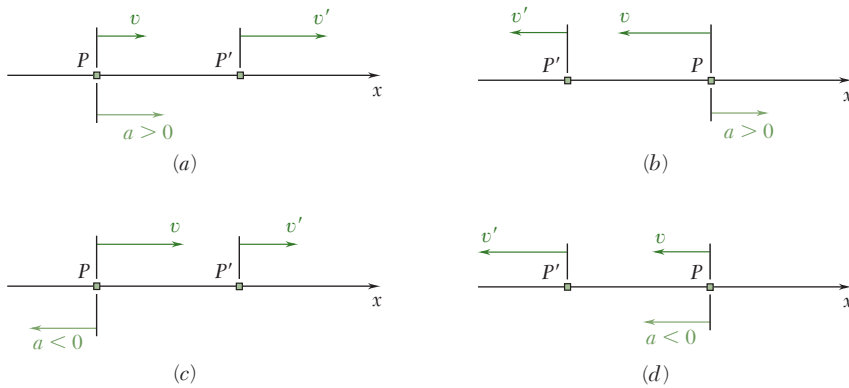



Figura 11.5

O termo *desaceleração* é, às vezes, usado para se referir a a quando a velocidade escalar da partícula (isto é, a intensidade de v) está diminuindo; a partícula está, então, se deslocando mais lentamente. Por exemplo, a partícula da Fig. 11.5 está desacelerada nas partes b e c; e ela está realmente acelerada (ou seja, se move mais rapidamente) nas partes a e d.

Uma outra expressão para a aceleração pode ser obtida eliminando-se o diferencial dt nas Eqs. (11.1) e (11.2). Resolvendo (11.1) para dt, obtemos $dt = dx/v$; substituindo em (11.2), escrevemos

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

* Veja a nota de rodapé da página 608.

EXEMPLO Considere uma partícula movendo-se em uma linha reta e assuma que sua posição é definida pela equação

$$x = 6t^2 - t^3$$

onde t é expresso em segundos e x em metros. A velocidade v em qualquer instante t é obtida derivando-se x em relação a t:

$$v = \frac{dx}{dt} = 12t - 3t^2$$

A aceleração a é obtida derivando-se novamente em relação a t

$$a = \frac{dv}{dt} = 12 - 6t$$

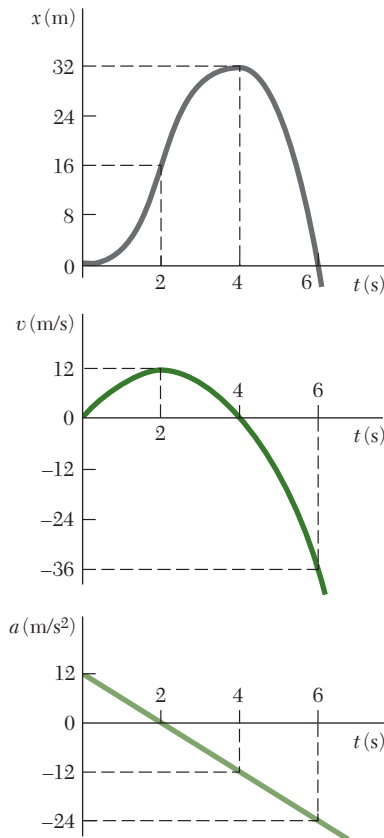



Figura 11.6

A coordenada de posição, a velocidade e a aceleração foram representadas em um gráfico em função de t na Fig. 11.6. As curvas obtidas são conhecidas como *curvas de movimento.* Tenha em mente, entretanto, que a partícula não se movimenta ao longo de nenhuma dessas curvas; a partícula se movimenta em uma linha reta. Como a derivada de uma função mede a inclinação da curva correspondente, a inclinação da curva x-t, para qualquer instante dado, é igual ao valor de v naquele instante, e a inclinação da curva v-t é igual ao valor de a. Como $a = 0$ quando $t = 2$ s, a inclinação da curva v-t deve ser igual a zero para $t = 2$ s; a velocidade alcança um máximo nesse instante. Além disso, como $v = 0$ em $t = 0$ e em $t = 4$ s, a tangente à curva x-t deve ser horizontal para esses valores de t.

Um estudo das três curvas de movimento da Fig. 11.6 mostra que o movimento da partícula de $t = 0$ até $t = \infty$ pode ser dividido em quatro fases:

1. A partícula parte da origem, $x = 0$, sem velocidade, mas com uma aceleração positiva. Sob essa aceleração, a partícula adquire uma velocidade positiva e se move no sentido positivo. De $t = 0$ a $t = 2$ s, x, v e a são todos positivos.
2. Em $t = 2$ s, a aceleração é igual a zero; a velocidade atingiu seu valor máximo. De $t = 2$ s a $t = 4$ s, v é positivo, mas a é negativo; a partícula ainda se movimenta no sentido positivo, mas cada vez mais lentamente; a partícula está se desacelerando.
3. Em $t = 4$ s, a velocidade é igual a zero; a coordenada dc posição x alcançou seu valor máximo. A partir de então, tanto v como a são negativos; a partícula está se acelerando e se move no sentido negativo com velocidade cada vez maior.
4. Em $t = 6$ s, a partícula passa pela origem; sua coordenada x é então igual a zero, enquanto a distância total percorrida desde o início do movimento é de 64 m. Para valores de t maiores que 6 s, x, v e a serão todos negativos. A partícula continua se movendo no sentido negativo, afastando-se de O, cada vez mais rapidamente. ■

11.3 Determinação do movimento de uma partícula

Vimos na seção anterior que o movimento de uma partícula é tido como conhecido se a posição dessa partícula for conhecida para cada valor do tempo t. Na prática, entretanto, um movimento é raramente definido por uma relação entre x e t. Mais frequentemente, as condições do movimento serão especificadas pelo tipo de aceleração que a partícula possui. Por exemplo, um corpo em queda livre terá uma aceleração constante, dirigida para baixo e igual a 9,81 m/s^2; uma massa presa a uma mola que foi estirada terá uma aceleração proporcional ao alongamento instantâneo da mola medido em relação à posição de equilíbrio; etc. Em geral, a aceleração da partícula pode ser expressa como uma função de uma ou mais das variáveis x, v e t. Para determinar a coordenada de posição x em termos de t, será então necessário efetuar duas integrações sucessivas.

Vamos considerar três classes comuns de movimento:

1. $a = f(t)$. *A aceleração é uma dada função de t.* Resolvendo (11.2) para dv e substituindo a por $f(t)$, escrevemos

$$dv = a\,dt$$
$$dv = f(t)\,dt$$

Integrando os membros, obtemos a equação

$$\int dv = \int f(t)\,dt$$

que define v em função de t. Deve-se notar, entretanto, que uma constante arbitrária será introduzida como um resultado da integração. Isto é devido ao fato de que existem muitos movimentos que correspondem à aceleração dada $a = f(t)$. Para definir de forma unívoca o movimento da partícula, é necessário especificar as *condições iniciais* do movimento, isto é, o valor v_0 da velocidade e o valor x_0 da coordenada de posição em $t = 0$. Substituindo as integrais indefinidas por *integrais definidas* com os limites inferiores correspondentes às condições iniciais $t = 0$ e $v = v_0$ e com os limites superiores correspondentes a $t = t$ e $v = v$, escrevemos

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)\,dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t f(t)\,dt$$

que fornece v em termos de t.

A Eq. (11.1) pode agora ser resolvida para dx,

$$dx = v\,dt$$

e a expressão obtida anteriormente substituída para v. Ambos os membros são, então, integrados: o membro do lado esquerdo em relação a x,

de $x - x_0$ até $x = x$, e o membro do lado direito em relação a t, de $t = 0$ até $t = t$. A coordenada de posição x é, então, obtida em termos de t; o movimento está completamente determinado.

Dois casos particulares importantes serão estudados com mais detalhes nas Seções 11.4 e 11.5: o caso quando $a = 0$, correspondente a um *movimento uniforme*, e o caso quando $a =$ constante, correspondente ao *movimento uniformemente acelerado*.

2. $a = f(x)$. *A aceleração é uma dada função de x.* Reordenando a Eq. (11.4) e substituindo a por $f(x)$, escrevemos:

$$v\,dv = a\,dx$$
$$v\,dv = f(x)\,dx$$

Como cada membro contém somente uma variável, podemos integrar a equação. Representando novamente por v_0 e x_0, respectivamente, os valores iniciais da velocidade e da coordenada de posição, obtemos

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$
$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

que fornece v em termos de x. Agora resolvemos (11.1) para dt,

$$dt = \frac{dx}{v}$$

e substituímos para v a expressão obtida anteriormente. Ambos os membros podem ser integrados para obter a relação desejada entre x e t. Entretanto, na maioria dos casos esta última integração não pode ser realizada analiticamente e devemos recorrer a um método numérico de integração.

3. $a = f(v)$. *A aceleração é uma dada função de v.* Podemos agora substituir a por $f(v)$ em (11.2) ou (11.4) para obter uma das seguintes relações:

$$f(v) = \frac{dv}{dt} \qquad f(v) = v\frac{dv}{dx}$$
$$dt = \frac{dv}{f(v)} \qquad dx = \frac{v\,dv}{f(v)}$$

A integração da primeira equação fornecerá uma relação entre v e t; a integração da segunda equação fornecerá uma relação entre v e x. Qualquer uma dessas relações pode ser usada em conjunto com a Eq. (11.1) para obter a relação entre x e t que caracteriza o movimento da partícula.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.1

A posição de uma partícula que se desloca ao longo de uma linha reta é definida pela relação $x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40$, onde x é expresso em metros e t em segundos. Determine (*a*) o instante em que a velocidade será zero, (*b*) a posição e a distância percorrida pela partícula nesse instante, (*c*) a aceleração da partícula nesse instante e (*d*) a distância percorrida pela partícula de $t = 4$ s a $t = 6$ s.

SOLUÇÃO

As equações do movimento são:

$$x = t^3 - 6t^2 - 15t + 40 \quad (1)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 12t - 15 \quad (2)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 6t - 12 \quad (3)$$

a. Instante em que $v = 0$. Fazemos $v = 0$ em (2):

$$3t^2 - 12t - 15 = 0 \qquad t = -1 \text{ s} \qquad t = +5 \text{ s} \quad ◀$$

Somente a raiz $t = +5$ s corresponde a um instante após o movimento ter-se iniciado: para $t < 5$ s, $v < 0$, a partícula se move no sentido negativo; para $t > 5$ s, $v > 0$, a partícula se desloca no sentido positivo.

b. Posição e distância percorrida quando $v = 0$. Levando $t = +5$ s em (1), temos

$$x_5 = (5)^3 - 6(5)^2 - 15(5) + 40 \qquad x_5 = -60 \text{m} \quad ◀$$

A posição inicial para $t = 0$ era $x_0 = +40$ m. Como $v \neq 0$ durante o intervalo de $t = 0$ a $t = 5$ s, temos

$$\text{Distância percorrida} = x_5 - x_0 = -60 \text{ m} - 40 \text{ m} = -100 \text{ m}$$

Distância percorrida = 100 m no sentido negativo ◀

c. Aceleração quando $v = 0$. Substituímos $t = +5$ s em (3):

$$a_5 = 6(5) - 12 \qquad a_5 = +18 \text{ m/s}^2 \quad ◀$$

d. Distância percorrida de $t = 4$ s a $t = 6$ s. A partícula se desloca no sentido negativo de $t = 4$ s para $t = 5$ s e no sentido positivo de $t = 5$ s para $t = 6$ s; portanto, a distância percorrida durante cada um desses intervalos de tempo será calculada separadamente.

De $t = 4$ s a $t = 5$ s: $\quad x_5 = -60$ m

$$x_4 = (4)^3 - 6(4)^2 - 15(4) + 40 = -52 \text{ m}$$

$$\text{Distância percorrida} = x_5 - x_4 = -60 \text{ m} - (-52 \text{ m}) = -8 \text{m}$$

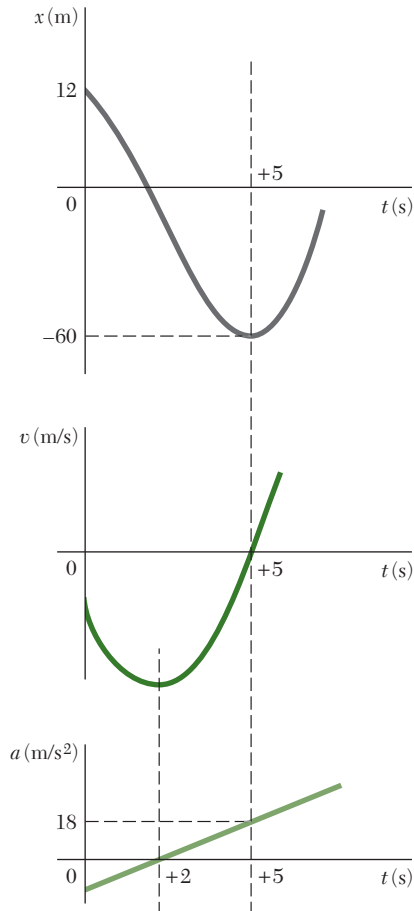
$$= 8 \text{ m no sentido negativo}$$

De $t = 5$ s a $t = 6$ s: $\quad x_5 = -60$ m

$$x_6 = (6)^3 - 6(6)^2 - 15(6) + 40 = -50 \text{ m}$$

$$\text{Distância percorrida } x_6 - x_5 = -50 \text{ m} - (-60 \text{ m}) = +10 \text{ m}$$

$$= 10 \text{ m no sentido positivo}$$

A distância total percorrida de $t = 4$ s a $t = 6$ s é 8 m + 10 m = 18 m ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 11.2

Uma bola é arremessada a uma velocidade de 10 m/s, dirigida verticalmente para cima, de uma janela de um prédio localizada a 20 m acima do solo. Sabendo que a aceleração da bola é constante e igual a 9,81 m/s² para baixo, determine (*a*) a velocidade v e a elevação y da bola acima do solo, para qualquer instante t, (*b*) a elevação máxima atingida pela bola e o correspondente valor de t e (*c*) o instante em que a bola atingirá o solo e a velocidade correspondente. Desenhe as curvas v-t e y-t.

SOLUÇÃO

a. Velocidade e elevação. O eixo y para medir a coordenada de posição (ou elevação) é escolhido com sua origem O no solo e seu sentido positivo para cima. O valor da aceleração e os valores iniciais de v e y são os indicados na figura. Substituindo a em $a = dv/dt$ e notando que em $t = 0$, $v_0 = +10$ m/s, temos

$$\frac{dv}{dt} = a = -9{,}81\,\text{m/s}^2$$
$$\int_{v_0=10}^{v} dv = -\int_0^t 9{,}81\,dt$$
$$[v]_{10}^{v} = -[9{,}81t]_0^t$$
$$v - 10 = -9{,}81t$$

$$v = 10 - 9{,}81t \quad (1) \quad ◀$$

Substituindo para v em $v = dy/dt$ e notando que para $t = 0$, $y_0 = 20$ m, temos

$$\frac{dy}{dt} = v = 10 - 9{,}81t$$
$$\int_{y_0=20}^{y} dy = \int_0^t (10 - 9{,}81t)\,dt$$
$$[y]_{20}^{y} = [10t - 4{,}905t^2]_0^t$$
$$y - 20 = 10t - 4{,}905t^2$$

$$y = 20 + 10t - 4{,}905t^2 \quad (2) \quad ◀$$

b. Elevação máxima. Quando a bola atinge sua elevação máxima, temos $v = 0$. Substituindo em (1), obtemos

$$10 - 9{,}81t = 0 \qquad t = 1{,}019\text{ s} \quad ◀$$

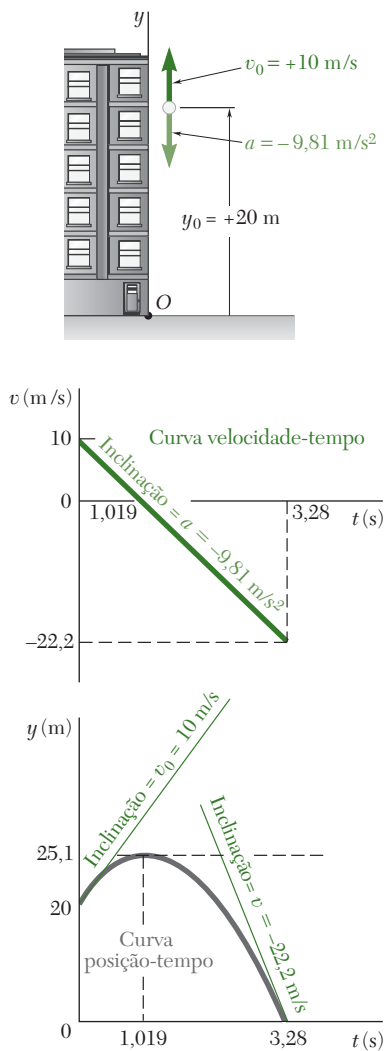
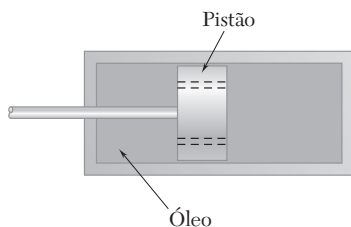
Levando $t = 1{,}019$ s em (2), temos

$$y = 20 + 10(1{,}019) - 4{,}905(1{,}019)^2 \qquad y = 25{,}1\text{ m} \quad ◀$$

c. A bola atinge o solo. Quando a bola atinge o solo, temos $y = 0$. Substituindo em (2), obtemos

$$20 + 10t - 4{,}905t^2 = 0 \qquad t = -1{,}243\text{ s} \qquad \text{e} \qquad t = +3{,}28\text{ s} \quad ◀$$

Somente a raiz $t = +3{,}28$ s corresponde a um instante posterior ao início do movimento. Levando este valor de t para (1), temos

$$v = 10 - 9{,}81(3{,}28) = -22{,}2\text{ m/s} \qquad v = 22{,}2\text{ m/s}\downarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.3

O mecanismo de freio usado para reduzir o recuo em certos tipos de armas consiste essencialmente em um pistão preso ao cano e que se move em um cilindro fixo, cheio de óleo. Quando o cano recua com uma velocidade inicial v_0, o pistão se movimenta e o óleo é forçado através de orifícios em seu interior, causando uma desaceleração do pistão e do cano a uma taxa proporcional à velocidade de ambos; isto é, $a = -kv$. Expresse (*a*) v em termos de t, (*b*) x em termos de t e (*c*) v em termos de x. Desenhe as curvas de movimento correspondentes.

SOLUÇÃO

a. *v* em termos de *t*. Substituindo a por $-kv$ na fórmula fundamental que define a aceleração, $a = dv/dt$, escrevemos

$$-kv = \frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v} = -k\,dt \qquad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -k\int_0^t dt$$

$$\ln\frac{v}{v_0} = -kt$$

$$v = v_0 e^{-kt} \quad ◀$$

b. *x* em termos de *t*. Substituindo a relação obtida anteriormente para v em $v = dx/dt$, escrevemos

$$v_0 e^{-kt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\int_0^x dx = v_0 \int_0^t e^{-kt}\,dt$$

$$x = -\frac{v_0}{k}[e^{-kt}]_0^t = -\frac{v_0}{k}(e^{-kt} - 1)$$

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) \quad ◀$$

v
v_0
O
$\frac{v_0}{k}$
x

c. *v* em termos de *x*. Substituindo a por $-kv$ em $a = v\,dv/dx$, escrevemos

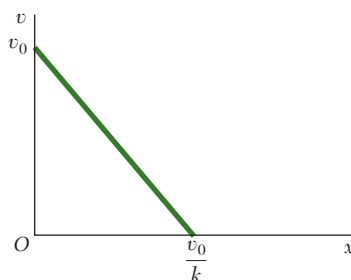
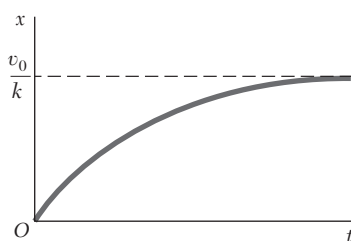
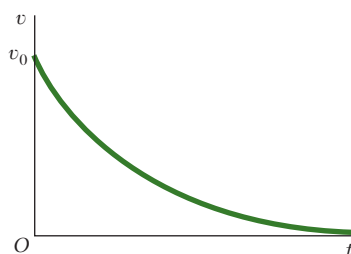
$$-kv = v\frac{dv}{dx}$$

$$dv = -k\,dx$$

$$\int_{v_0}^{v} dv = -k\int_0^x dx$$

$$v - v_0 = -kx \qquad\qquad v = v_0 - kx \quad ◀$$

Verificação. A parte *c* poderia ter sido resolvida eliminando-se t das respostas obtidas para as partes *a* e *b*. Esse método alternativo pode ser usado como uma verificação. Da parte *a* obtemos $e^{-kt} = v/v_0$; substituindo-a na resposta da parte *b*, obtemos

$$x = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt}) = \frac{v_0}{k}\left(1 - \frac{v}{v_0}\right) \qquad v = v_0 - kx \quad \text{(confere)}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, você será solicitado a determinar a *posição*, a *velocidade*, ou a *aceleração* de uma partícula em *movimento retilíneo*. À medida que lê cada problema, é importante que você identifique a variável independente (tipicamente t ou x) e também o que é pedido (por exemplo, a necessidade de expressar v como função de x). Pode ser útil começar cada problema escrevendo a informação dada e um enunciado simples do que deve ser determinado.

1. Determinando *v*(*t*) e *a*(*t*) para um dado *x*(*t*). Como explicado na Seção 11.2, a primeira e a segunda derivadas de x em relação a t são respectivamente iguais à velocidade e à aceleração da partícula [Eqs. (11.1) e (11.2)]. Se a velocidade e a aceleração tiverem sinais opostos, a partícula poderá parar e, então, mover no sentido oposto [Problema Resolvido 11.1], Portanto, quando estiver calculando a distância total percorrida por uma partícula, você deve primeiro determinar se ela vai parar durante o intervalo de tempo especificado. Construir um diagrama similar ao do Problema Resolvido 11.1, que mostra a posição e a velocidade da partícula em cada instante crucial ($v = v_{máx}$, $v = 0$ etc.), vai ajudá-lo a visualizar o movimento.

2. Determinando *v*(*t*) e *x*(*t*) para um dado *a*(*t*). A solução de problemas desse tipo foi discutida na primeira parte da Seção 11.3. Usamos as condições iniciais, $t = 0$ e $v = v_0$, para os limites inferiores das integrais em t e v, mas qualquer outra condição conhecida (por exemplo, $t = t_1$, $v = v_1$) poderia ter sido usada. Além disso, se a função dada $a(t)$ contém uma constante desconhecida (por exemplo, a constante k, se $a = kt$), você vai ter que determinar primeiro essa constante, substituindo um conjunto de valores conhecidos de t e a na equação que define $a(t)$.

3. Determinando *v*(*x*) e *x*(*t*) para um dado *a*(*x*). Esse é o segundo caso considerado na Seção 11.3. Notamos novamente que os limites inferiores de integração podem ser quaisquer condições conhecidas (por exemplo, $x = x_1$, $v = v_1$). Além disso, como $v = v_{máx}$ quando $a = 0$, as posições em que os valores máximos da velocidade ocorrem são facilmente determinadas escrevendo-se $a(x) = 0$ e resolvendo para x.

4. Determinando *v*(*x*), *v*(*t*) e *x*(*t*) para um dado *a*(*v*). Esse é o último caso tratado na Seção 11.3; as técnicas apropriadas de solução para problemas desse tipo estão ilustradas no Problema Resolvido 11.3. Todos os comentários gerais para os casos anteriores aplicam-se aqui mais uma vez. Note que o Problema Resolvido 11.3 fornece um sumário de como e quando usar as equações $v = dx/dt$, $a = dv/dt$ e $a = v\,dv/dx$.

PROBLEMAS*

11.1 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = 1{,}5t^4 - 30t^2 + 5t + 10$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando $t = 4$ s.

11.2 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = 12t^3 - 18t^2 + 2t + 5$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine a posição e a velocidade quando a aceleração for igual a zero.

11.3 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = \frac{5}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 - 30t + 8x$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine o tempo, a posição e a aceleração quando $v = 0$.

11.4 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = 6t^3 - 8 + 40 \cos \pi t$, onde x e t são expressos em milímetros e segundos, respectivamente. Determine a posição, a velocidade e a aceleração quando $t = 6$ s.

11.5 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = 6t^4 - 2t^3 - 12t^2 + 3t + 3$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine o tempo, a posição e a velocidade quando $a = 0$.

11.6 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine (a) quando a velocidade é zero, (b) a posição e a distância total percorrida quando a aceleração é zero.

11.7 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = t^3 - 6t^2 - 36t - 40$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine (a) quando a velocidade é zero, (b) a velocidade, a aceleração e a distância total percorrida quando $x = 0$.

11.8 O movimento de uma partícula é definido pela relação $x = t^3 - 9t^2 + 24t - 8$, onde x e t são expressos em milímetros e segundos, respectivamente. Determine (a) quando a velocidade é zero, (b) a posição e a distância total percorrida quando a aceleração é zero.

11.9 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = -8$ m/s². Sabendo que $x = 20$ m quando $t = 4$ s e $x = 4$ m quando $v = 16$ m/s, determine (a) o tempo quando a velocidade é zero, (b) a velocidade e a distância total percorrida quando $t = 11$ s.

11.10 A aceleração de uma partícula é diretamente proporcional ao quadrado do tempo t. Quando $t = 0$, a partícula está em $x = 24$ m. Sabendo que em $t = 6$ s, $x = 96$ m e $v = 18$ m/s, expresse x e v em termos de t.

---

* As respostas para todos os problemas escritos em fonte normal (tal como **11.1**) são dadas no final do livro. Respostas a problemas cujo número é escrito em itálico (tal como ***11.7***) não são dadas.

11.11 A aceleração de uma partícula é diretamente proporcional ao tempo t. Quando $t = 0$, a velocidade da partícula é $v = 16$ m/s. Sabendo que $v = 15$ m/s e $x = 20$ m quando $t = 1$ s, determine a velocidade, a posição e a distância total percorrida quando $t = 7$ s.

11.12 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = kt^2$. (*a*) Sabendo que $v = -32$ m/s quando $t = 0$ e $v = +32$ m/s quando $t = 4$ s, determine a constante k. (*b*) Escrever a equação do movimento, sabendo também que $x = 0$ quando $t = 4$ s.

11.13 A aceleração do ponto é definida pela relação $a = A - 6t^2$, onde A é uma constante. Quando $t = 0$, a partícula inicia em $x = 8$ m com $v = 0$. Sabendo que para $t = 1$ s, $v = 30$ m/s, determine (*a*) o tempo para o qual a velocidade é zero, (*b*) a distância total percorrida pela partícula quando $t = 5$ s.

11.14 Sabe-se que de $t = 2$ s a $t = 10$ s a aceleração de uma partícula é inversamente proporcional ao cubo do tempo t. Quando $t = 2$ s, $v = -15$ m/s e quando $t = 10$ s, $v = 0{,}36$ m/s. Sabendo que a partícula está duas vezes mais distante da origem quando $t = 2$ s do que quando $t = 10$ s, determine (*a*) a posição da partícula quando $t = 2$ s e quando $t = 10$ s, (*b*) a distância total percorrida pela partícula de $t = 2$ s e $t = 10$ s.

11.15 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = -k/x$. Ela foi determinada experimentalmente para $v = 15$ m/s quando $x = 0{,}6$ m e para $v = 9$ m/s quando $x = 1{,}2$ m. Determine (*a*) a velocidade da partícula quando $x = 1{,}5$ m, (*b*) a posição da partícula em que a velocidade é zero.

11.16 Uma partícula inicialmente em repouso em $x = 1$ m é acelerada até que sua velocidade dobre de intensidade entre $x = 2$ m e $x = 8$ m. Sabendo que a aceleração da partícula é definida pela relação $a = k[x - A(x)]$, determine os valores da constante A e k se a partícula tem velocidade de 29 m/s quando $x = 16$ m.

11.17 Uma partícula oscila entre os pontos $x = 40$ mm e $x = 160$ mm com uma aceleração $a = k(100 - x)$, onde a e x são expressos em mm/s^2 e mm, respectivamente, e k é uma constante. A velocidade da partícula é 18 mm/s quando $x = 100$ mm e é zero para ambos $x = 40$ mm e $x = 160$ mm. Determine (*a*) o valor de k, (*b*) a velocidade quando $x = 120$ mm.

11.18 Uma partícula inicia em repouso na origem e recebe uma aceleração $a = k/(x + 4)^2$, onde a e x são expressos em m/s^2 e m, respectivamente, e k é uma constante. Sabendo que a velocidade da partícula é 4 m/s quando $x = 8$ m, determine (*a*) o valor de k, (*b*) a posição da partícula quando $v = 4{,}5$ m/s, (*c*) a velocidade máxima da partícula.

Figura *P11.19*

11.19 Um pedaço de um equipamento eletrônico que está protegido pelo material da embalagem cai de modo que ele atinge o solo com uma velocidade de 4 m/s. Depois do impacto, o equipamento experimenta uma aceleração de $a = -kx$, onde k é uma constante e x é a compressão do material da embalagem. Se o material da embalagem experimenta uma compressão máxima de 20 mm, determine a máxima aceleração do equipamento.

11.20 Baseado em observações experimentais, a aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = -(0{,}1 + \text{sen}\ x/b)$, onde a e x são expressos em m/s^2 e m, respectivamente. Sabendo que $b = 0{,}8$ m e que $v = 1$ m/s quando $x = 0$, determinar (*a*) a velocidade da partícula quando $x = -1$ m, (*b*) a posição quando a velocidade é máxima, (*c*) a velocidade máxima.

11.21 Partindo de $x = 0$ sem velocidade inicial, uma partícula sofre uma aceleração $a = 0{,}8\sqrt{v2 + 49}$, onde a e v são expressos em m/s^2 e m/s, respectivamente. Determine (*a*) a posição da partícula quando $v = 24$ m/s, (*b*) a velocidade escalar da partícula quando $x = 40$ m.

11.22 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = -k\sqrt{v}$ onde k é uma constante. Sabendo que $x = 0$ e $v = 81$ m/s, em $t = 0$, e que $v = 36$ m/s quando $x = 18$ m, determine (*a*) a velocidade da partícula quando $x = 20$ m, (*b*) o tempo necessário para que a partícula atinja o repouso.

11.23 A aceleração de uma partícula é definida por uma relação $a = -0{,}8v$ onde a é expressa por mm/s^2 e v em mm/s. Sabendo que em $t = 0$ a velocidade é 40 m/s, determine (*a*) a distância que a partícula percorrerá antes de ficar em repouso, (*b*) o tempo necessário para que a partícula fique em repouso, (*c*) o tempo necessário para que a partícula possa reduzir sua velocidade em 50% do valor inicial.

Figura P11.24

11.24 Uma bola de boliche é solta de um barco até que atinja a superfície de um lago com a velocidade de 8 m/s. Considerando que a bola experimenta uma desaceleração de $a = 10 - 0{,}9v^2$ quando na água, determine a velocidade da bola quando ela atinge o fundo do lago.

11.25 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = 0{,}4(1 - kv)$, onde k é uma constante. Sabendo que em $t = 0$ a partícula parte do repouso em $x = 4$ m e que, quando $t = 15$ s, $v = 4$ m/s, determine (*a*) a constante k, (*b*) a posição da partícula quando $v = 6$ m/s, (*c*) a velocidade máxima da partícula.

11.26 Uma partícula é projetada para a direita a partir da posição $x = 0$ com uma velocidade inicial de 9 m/s. Se a aceleração da partícula é definida pela relação $a = -0{,}6v^{3/2}$, onde a e v são expressas em m/s^2 e m/s, respectivamente, determinar (*a*) a distância que a partícula irá percorrer se sua velocidade é 4 m/s, (*b*) o tempo quando $v = 1$ m/s, (*c*) o tempo necessário para a partícula percorrer 6 m.

Figura P11.27

11.27 Com base em observações, a velocidade de um corredor pode ser aproximada pela relação $v = 7{,}5(1 - 0{,}04x)^{0{,}3}$, onde v e x são expressos em km/h e quilômetros, respectivamente. Sabendo que $x = 0$ em $t = 0$ determine (*a*) a distância que o corredor percorreu quando $t = 1$ h, (*b*) a aceleração do corredor em m/s^2 em $t = 0$ e (*c*) o tempo necessário para o corredor percorrer 9 km.

11.28 Dados experimentais indicam que, em uma região a jusante de uma dada saída de ventilação, a velocidade do ar posto em circulação é definida por $v = 0{,}18v_0/x$, onde v e x são expressos em m/s e metros, respectivamente, e v_0 é a velocidade inicial de descarga do ar. Para $v_0 = 3{,}6$ m/s, determine (*a*) a aceleração do ar em $x = 2$ m, (*b*) o tempo necessário para o ar fluir de $x = 1$ m a $x = 3$ m.

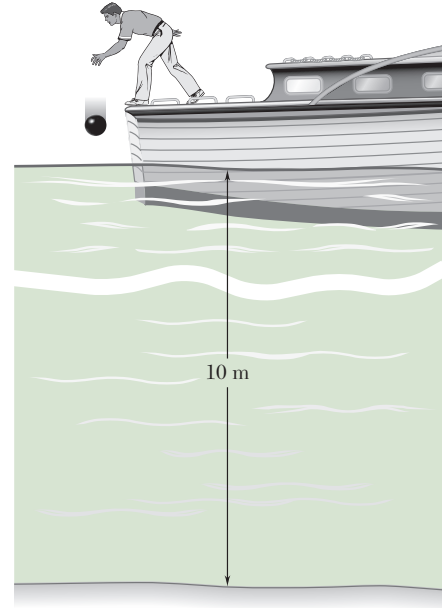
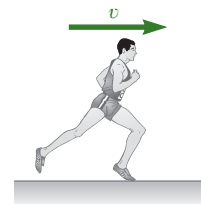
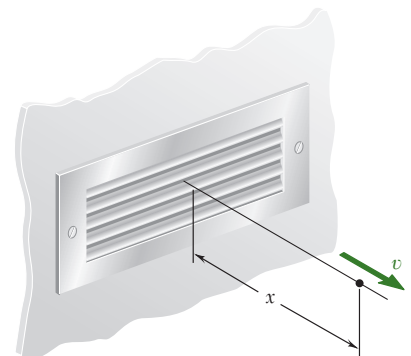



Figura P11.28

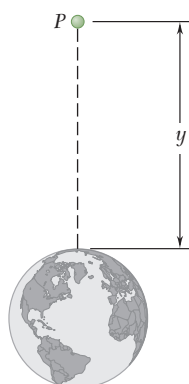



Figura P11.29

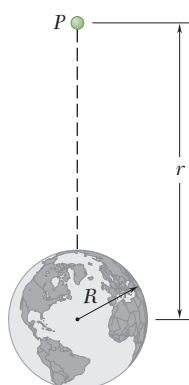



Figura P11.30

11.29 A aceleração devida à gravidade, a uma altitude y acima da superfície da Terra, pode ser expressa como

$$a = \frac{-9{,}81}{\left[1 + \left(\dfrac{y}{6{,}37 \times 10^6}\right)\right]^2}$$

onde a e y são expressos em m/s^2 e metros, respectivamente. Usando essa expressão, calcule a altura atingida por um projétil disparado verticalmente para o alto, a partir da superfície terrestre, se sua velocidade inicial for de (*a*) $v = 540$ m/s, (*b*) $v = 900$ m/s e (*c*) $v = 12.000$ m/s

11.30 A aceleração devida à gravidade de uma partícula caindo em direção a Terra é $a = -gR^2/r^2$, onde r é a distância a partir do *centro* da Terra até a partícula, R é o raio da Terra e g é a aceleração devida à gravidade na superfície da Terra. Se $R = 6.370$ km, calcule a *velocidade de escape,* isto é, a velocidade mínima com que uma partícula deve ser lançada verticalmente para o alto, a partir da superfície da Terra, para que não retorne à Terra. (*Dica:* $v = 0$ para $r = \infty$.)

11.31 A velocidade de uma partícula é $v = v_0[1 - \text{sen}(\pi t/T)]$. Sabendo que a partícula parte da origem com uma velocidade inicial v_0, determine (*a*) sua posição e sua aceleração em $t = 3T$, (*b*) sua velocidade média durante o intervalo $t = 0$ a $t = T$.

11.32 A velocidade de um cursor é definida pela relação $v = v' \text{ sen}(\omega_n t + \phi)$. Representando a velocidade e a posição do cursor em $t = 0$ por v_0 e x_0, respectivamente, e sabendo que o deslocamento máximo do cursor é $2x_0$, mostre que (*a*) $v' = (v_0^2 + x_0^2\omega_n^2)/2x_0\omega_n$, (*b*) o valor máximo da velocidade ocorre quando $x = x_0[3 - (v_0/x_0\omega_n)^2]/2$.

11.4 Movimento retilíneo uniforme

O movimento retilíneo uniforme é um tipo de movimento em linha reta que é frequentemente encontrado em aplicações práticas. Nesse movimento, a aceleração a da partícula é zero para todo valor de t. A velocidade v é, portanto, constante, e a Eq. (11.1) torna-se

$$\frac{dx}{dt} = v = \text{constante}$$

A coordenada de posição x é obtida pela integração desta equação. Representando por x_0 o valor inicial de x, escrevemos

$$\int_{x_0}^{x} dv = v \int_0^t dt$$

$$x - x_0 = vt$$

$$x = x_0 + vt \qquad (11.5)$$

Essa equação pode ser usada *somente se soubermos que a velocidade da partícula é constante.*

11.5 Movimento retilíneo uniformemente acelerado

O movimento retilíneo uniformemente acelerado é outro tipo comum de movimento. Nesse movimento, a aceleração a da partícula é constante e a Eq. (11.2) se torna

$$\frac{dv}{dt} = a = \text{constante}$$

A velocidade v da partícula é obtida pela integração desta equação

$$\int_{v_0}^{v} dv = a \int_0^t dt$$

$$v - v_0 = at$$

$$v = v_0 + at \tag{11.6}$$

onde v_0 é a velocidade inicial. Substituindo v em (11.1), escrevemos

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

Representando por x_0 o valor inicial de x e integrando-o, temos

$$\int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t (v_0 + at)\, dt$$

$$x - x_0 = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2$$

$$x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{11.7}$$

Podemos também usar a Eq. (11.4) e escrever

$$v\frac{dv}{dx} = a = \text{constante}$$

$$v\, dv = a\, dx$$

Integrando ambos os lados, obtemos

$$\int_{v_0}^{v} v\, dv = a \int_{x_0}^{x} dx$$

$$\tfrac{1}{2}(v^2 - v_0^2) = a(x - x_0)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \tag{11.8}$$

As três equações deduzidas anteriormente fornecem relações úteis entre a coordenada de posição, a velocidade e o tempo para o caso de um movimento uniformemente acelerado, assim que os valores apropriados tiverem sido substituídos para a, v_0 e x_0. A origem O do eixo x deve ser definida em primeiro lugar, e um sentido positivo deve ser escolhido ao

longo desse eixo; esse sentido será usado para determinar os sinais de a, v_0 e x_0. A Eq. (11.6) relaciona v e t, e deve ser usada quando o valor de v correspondente a um dado valor de t for desejado, ou inversamente. A Eq. (11.7) relaciona x e t; a Eq. (11.8) relaciona v e x. Uma aplicação importante do movimento uniformemente acelerado é o movimento de um *corpo em queda livre.* A aceleração de um corpo em queda livre (usualmente representada por g) é igual a 9,81 m/s^2.

É importante ter em mente que as três equações apresentadas anteriormente podem ser usadas *somente quando soubermos que a aceleração da partícula é constante.* Se a aceleração da partícula for variável, seu movimento deve ser determinado a partir das equações fundamentais (11.1) a (11.4), de acordo com os métodos delineados na Seção 11.3.

11.6 Movimento de muitas partículas

Quando várias partículas se movem livremente ao longo da mesma linha, equações de movimento independentes podem ser escritas para cada partícula. Sempre que possível, o tempo deve ser contado a partir do mesmo instante inicial para todas as partículas e os deslocamentos devem ser medidos em relação à mesma origem e no mesmo sentido. Em outras palavras, um único relógio e uma única fita de medida devem ser usados.

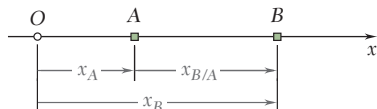



Figura 11.7

Movimento relativo de duas partículas. Considere duas partículas A e B que se deslocam ao longo da mesma linha reta (Fig. 11.7). Se as coordenadas de posição x_A e x_B são medidas a partir da mesma origem, a diferença $x_B - x_A$ define a *coordenada de posição relativa de B em relação a A* e é representada por $x_{B/A}$. Escrevemos

$$x_{B/A} = x_B - x_A \quad \text{ou} \quad x_B = x_A + x_{B/A} \tag{11.9}$$

Indiferentemente das posições de A e B em relação à origem, um sinal positivo para $x_{B/A}$ significa que B está à direita de A, e um sinal negativo significa que B está à esquerda de A.

A taxa de variação de $x_{B/A}$ é denominada *velocidade relativa de B em relação a A* e é representada por $v_{B/A}$. Derivando (11.9), escrevemos

$$v_{B/A} = v_B - v_A \quad \text{ou} \quad v_B = v_A + v_{B/A} \tag{11.10}$$

Um sinal positivo para $v_{B/A}$ significa que *B é observado a partir de A* deslocando-se no sentido positivo; um sinal negativo significa que ele é observado deslocando no sentido negativo.

A taxa de variação de $v_{B/A}$ é denominada *aceleração relativa de B em relação a A* e é representada por $a_{B/A}$. Derivando (11. 10), obtemos*

$$a_{B/A} = a_B - a_A \quad \text{ou} \quad a_B = a_A + a_{B/A} \tag{11.11}$$

Foto 11.2 Múltiplos cabos e polias são usados pelo guindaste portuário.

* Observe que o produto dos subscritos A e B/A, usados no lado direito das Eqs. (11.9), (11.10) e (11.11), é igual ao subscrito B usado no lado esquerdo dessas equações.

Movimentos dependentes. Algumas vezes, a posição de uma partícula vai depender da posição de outra partícula ou de várias outras partículas. Os movimentos são então chamados de *dependentes.* Por exemplo, a posição do bloco B na Fig.11.8 depende da posição do bloco A. Como a corda $ACDEFG$ tem comprimento constante, e como os comprimentos dos segmentos de corda CD e EF que envolvem as polias permanecem constantes, tem-se que a soma dos comprimentos dos segmentos AC, DE e FG é constante. Observando que o comprimento do segmento AC difere de x_A somente por uma constante e que, semelhantemente, os comprimentos dos segmentos DE e FG diferem de x_B por uma constante, escrevemos

Figura 11.8

$$x_A + 2x_B = \text{constante}$$

Como somente uma das duas coordenadas x_A e x_B pode ser escolhida arbitrariamente, dizemos que o sistema ilustrado na Fig. 11.8 tem *um grau de liberdade*. Da relação entre as coordenadas de posição x_A e x_B, segue-se que se em x_A for dado um incremento Δx_A, isto é, se o bloco A for baixado em uma quantidade Δx_A, a coordenada x_B receberá um incremento $\Delta x_B = -\frac{1}{2}\,\Delta x_A$. Em outras palavras, o bloco B vai subir a metade do mesmo valor; isso pode ser facilmente verificado diretamente a partir da Fig. 11.8.

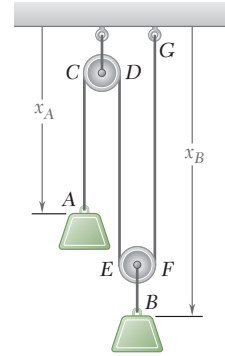
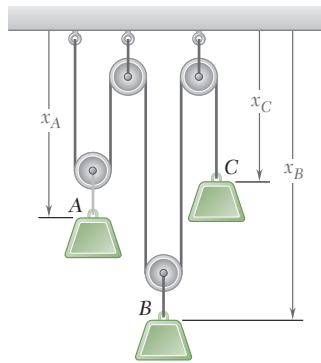



Figura 11.9

No caso dos três blocos da Fig. 11.9, podemos novamente observar que o comprimento da corda que passa nas polias é constante e, portanto, a seguinte relação deve ser satisfeita pelas coordenadas de posição dos três blocos:

$$2x_A + 2x_B + x_C = \text{constante}$$

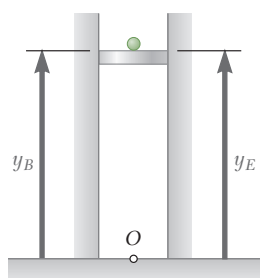
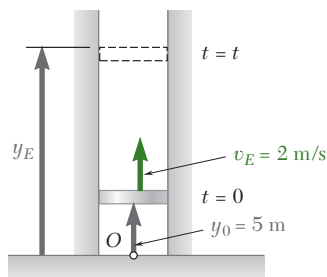
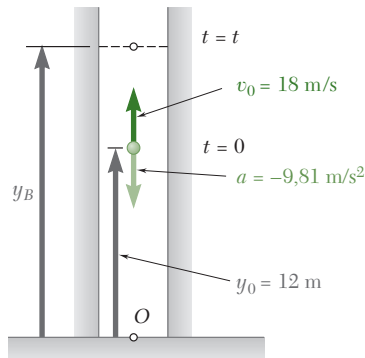
Como duas das coordenadas podem ser escolhidas arbitrariamente, dizemos que o sistema mostrado na Fig. 11.9 tem *dois graus de liberdade.*

Quando a relação existente entre as coordenadas de posição de várias partículas é *linear*, uma relação semelhante é válida entre as velocidades e entre as acelerações dessas partículas. No caso dos blocos da Fig. 11.9, por exemplo, derivamos duas vezes a equação obtida e escrevemos

$$2\frac{dx_A}{dt} + 2\frac{dx_B}{dt} + \frac{dx_C}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2v_A + 2v_B + v_C = 0$$

$$2\frac{dv_A}{dt} + 2\frac{dv_B}{dt} + \frac{dv_C}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad 2a_A + 2a_B + a_C = 0$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.4

Uma bola é arremessada verticalmente para o alto a partir do nível de 12 m de um poço de elevador com uma velocidade inicial de 18 m/s. No mesmo instante, um elevador de plataforma aberta passa pelo nível de 5 m, subindo com uma velocidade constante de 2 m/s. Determine (*a*) quando e onde a bola vai atingir o elevador e (*b*) a velocidade relativa da bola em relação ao elevador quando a bola o atinge.

SOLUÇÃO

Movimento da bola. Como a bola tem uma aceleração constante, seu movimento é *uniformemente acelerado*. Colocando a origem O do eixo y no nível do solo e escolhendo seu sentido positivo para o alto, verificamos que a posição inicial é $y_0 = +12$ m, a velocidade inicial é $v_0 = +18$ m/s e a aceleração é $a = -9{,}81$ m/s^2. Substituindo estes valores nas equações para o movimento uniformemente acelerado, escrevemos

$$v_B = v_0 + at \qquad v_B = 18 - 9{,}81t \qquad (1)$$
$$y_B = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y_B = 12 + 18t - 4{,}905t^2 \qquad (2)$$

Movimento do elevador. Como o elevador tem uma velocidade constante, seu movimento é *uniforme*. Novamente colocando a origem O no nível do solo e escolhendo o sentido positivo para o alto, notamos que $y_0 = +5$ m e escrevemos

$$v_E = +2 \text{ m/s} \qquad (3)$$
$$y_E = y_0 + v_E t \qquad y_E = 5 + 2t \qquad (4)$$

A bola atinge o elevador. Primeiro notamos que o mesmo tempo t e a mesma origem O foram usados para escrever as equações do movimento da bola e do elevador. Vemos na figura que quando a bola encontra a plataforma,

$$y_E = y_B \qquad (5)$$

Substituindo y_E e y_B por (2) e (4) em (5), temos

$$5 + 2t = 12 + 18t - 4{,}905t^2$$
$$t = -0{,}39 \text{ s} \qquad \text{e} \qquad t = 3{,}65 \text{ s} \quad ◀$$

Somente a raiz $t = 3{,}65$ s corresponde a um instante após o movimento ter começado. Substituindo esse valor em (4), temos

$$y_E = 5 + 2(3{,}65) = 12{,}30 \text{ m}$$

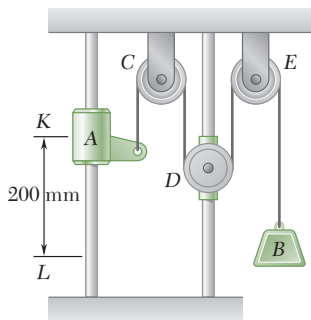
Elevação a partir do solo = 12,30 m ◀

A velocidade relativa da bola em relação ao elevador é

$$v_{B/E} = v_B - v_E = (18 - 9{,}81t) - 2 = 16 - 9{,}81t$$

Quando a bola atinge o elevador no instante $t = 3{,}65$ s, temos

$$v_{B/E} = 16 - 9{,}81(3{,}65) \qquad v_{B/E} = -19{,}81 \text{ m/s} \quad ◀$$

O sinal negativo indica que a bola é observada do elevador deslocando-se no sentido negativo (para baixo).

PROBLEMA RESOLVIDO 11.5

O cursor A e o bloco B estão ligados por um cabo que passa sobre três polias C, D e E, como mostrado na figura. As polias C e E são fixas, enquanto D está presa a um cursor que é puxado para baixo com uma velocidade constante de 75 mm/s. No instante $t = 0$, o cursor A começa a se mover para baixo a partir da posição K com uma aceleração constante e velocidade inicial nula. Sabendo que a velocidade do cursor A é de 300 mm/s ao passar pelo ponto L, determine a variação na elevação, a velocidade e a aceleração do bloco B quando o cursor A passar por L.

SOLUÇÃO

Movimento do cursor *A*. Colocamos a origem O na superfície horizontal superior e escolhemos o sentido positivo para baixo. Observamos que quando $t = 0$, o cursor A está na posição K e $(v_A)_0 = 0$. Como $v_A = 300$ mm/s e $x_A - (x_A)_0 = 200$ mm quando o cursor passa por L, escrevemos

$$v_A^2 = (v_A)_0^2 + 2a_A[x_A - (x_A)_0] \qquad (300)^2 = 0 + 2a_A(200)$$
$$a_A = 225 \text{ mm/s}^2$$

O tempo para que o cursor A alcance o ponto L é obtido escrevendo-se

$$v_A = (v_A)_0 + a_A t \qquad 300 = 0 + 225t \qquad t = 1{,}333 \text{ s}$$

Movimento da polia *D*. Recordando que o sentido positivo é para baixo, escrevemos

$$a_D = 0 \qquad v_D = 75 \text{ mm/s} \qquad x_D = (x_D)_0 + v_D t = (x_D)_0 + 75t$$

Quando o cursor A alcança L, em $t = 1{,}333$ s, temos

$$x_D = (x_D)_0 + 75(1{,}333) = (x_D)_0 + 100$$

Portanto, $$x_D - (x_D)_0 = 100 \text{ mm}$$

Movimento do bloco *B*. Notamos que o comprimento total do cabo $ACDEB$ difere da quantidade $(x_A + 2x_D + x_B)$ apenas por uma constante. Como o comprimento do cabo é constante durante o movimento, essa quantidade também deve permanecer constante. Portanto, considerando os instantes $t = 0$ e $t = 1{,}333$ s, escrevemos

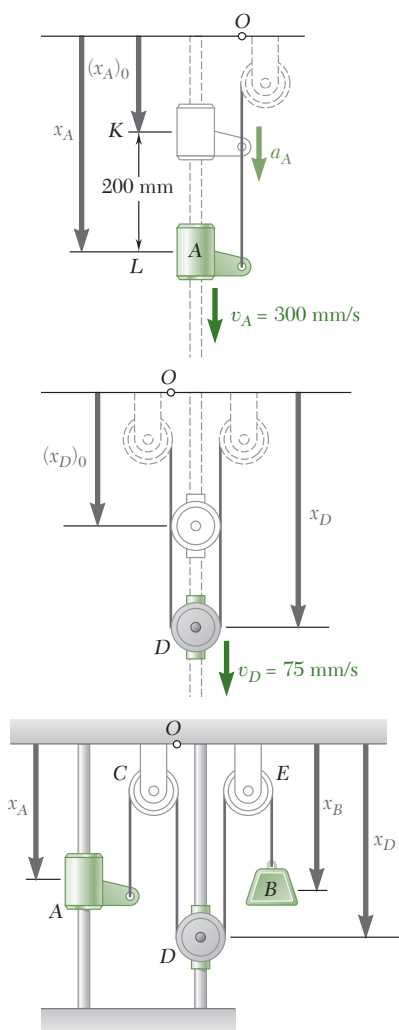
$$x_A + 2x_D + x_B = (x_A)_0 + 2(x_D)_0 + (x_B)_0 \qquad (1)$$
$$[x_A - (x_A)_0] + 2[x_D - (x_D)_0] + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad (2)$$

Mas sabemos que $x_A - (x_A)_0 = 200$ mm e $x_D - (x_D)_0 = 100$ mm; substituindo esses valores em (2), encontramos

$$200 + 2(100) + [x_B - (x_B)_0] = 0 \qquad x_B - (x_B)_0 = -400 \text{ mm}$$

Portanto, Mudança em elevação de B = 400 mm↑ ◀

Derivando (1) duas vezes, obtemos equações que relacionam as velocidades e as acelerações de A, B e D. Substituindo os valores das velocidades e acelerações de A e D em $t = 1{,}333$ s, temos

$$v_A + 2v_D + v_B = 0: \qquad 300 + 2(75) + v_B = 0$$
$$v_B = -450 \text{ mm/s} \qquad v_B = 450 \text{ mm/s}\uparrow \blacktriangleleft$$
$$a_A + 2a_D + a_B = 0: \qquad 225 + 2(0) + a_B = 0$$
$$a_B = -225 \text{ mm/s}^2 \qquad a_B = 225 \text{ mm/s}^2\uparrow \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, derivamos as equações que descrevem o *movimento retilíneo uniforme* (velocidade constante, e o *movimento retilíneo uniformemente acelerado* (aceleração constante). Também introduzimos o conceito de *movimento relativo.* As equações para movimento relativo [Eqs. (11.9) a (11.11)] podem ser aplicadas aos movimentos independentes ou dependentes de quaisquer duas partículas movimentando-se ao longo da mesma linha reta.

A. Movimento independente de uma ou mais partículas. A solução de problemas desse tipo deve ser organizada da seguinte forma:

1. Comece sua solução listando a informação dada, esboçando o sistema e selecionando a origem e a direção positiva do eixo coordenado [Problema Resolvido 11.4]. É sempre vantajoso ter uma representação visual de problemas desse tipo.

2. Escreva as equações que descrevem os movimentos de várias partículas como também aquelas que descrevem como esses movimentos estão relacionados [*Eq.* (5) do Problema Resolvido 11.4].

3. Defina as condições iniciais, ou seja, especifique o estado do sistema correspondente a $t = 0$. Isto é especialmente importante se os movimentos das partículas começam em tempos diferentes. Em tais casos, qualquer uma das duas abordagens a seguir pode ser usada.

a. Seja $t = 0$ o instante em que a última partícula começa seu movimento. Você deve então determinar a posição inicial x_0 e a velocidade inicial v_0 de cada uma das outras partículas.

b. Seja $t = 0$ o instante em que a primeira partícula começa seu movimento. Você deve, então, em cada uma das equações que descrevem o movimento de uma outra partícula, substituir t por $t - t_0$, onde t_0 é o instante em que aquela partícula específica começa seu movimento. É importante reconhecer que as equações obtidas dessa maneira são válidas somente para $t \geq t_0$.

B. Movimento dependente de duas ou mais partículas. Em problemas desse tipo, as partículas do sistema estão unidas umas às outras geralmente por cordas ou cabos. O método de solução desses problemas é parecido com aquele do grupo anterior de problemas, exceto que agora será necessário descrever as *ligações físicas* entre as partículas. Nos problemas a seguir, a ligação é estabelecida por um ou mais cabos. Para cada cabo, você terá que escrever equações similares às três últimas equações da Seção 11.6. Sugerimos que você use o seguinte procedimento:

1. Desenhe um esboço do sistema e selecione um sistema de coordenadas, indicando claramente um sentido positivo para cada um dos eixos coordenados. Por exemplo, no Problema Resolvido 11.5, comprimentos são medidos para baixo a partir do suporte horizontal superior. Segue-se, então, que os deslocamentos, velocidades e acelerações que tiverem valores positivos serão dirigidos para baixo.

2. Escreva a equação que descreve a restrição imposta por cada cabo sobre o movimento das partículas envolvidas. Derivando essa equação duas vezes, você vai obter as relações correspondentes entre velocidades e acelerações.

3. Se várias direções de movimento estão envolvidas, você deve selecionar um eixo coordenado e um sentido positivo para cada uma dessas direções. Você deve também tentar localizar as origens de seus eixos coordenados para que as equações das restrições sejam tão simples quanto possível. Por exemplo, no Problema Resolvido 11.5, é mais fácil definir as várias coordenadas medindo-as para baixo a partir do suporte superior que as medindo para cima a partir do suporte inferior.

Finalmente, tenha em mente que o método de análise descrito nesta lição e as equações correspondentes podem ser usados somente para partículas que se deslocam com um *movimento retilíneo uniforme ou uniformemente acelerado.*

PROBLEMAS

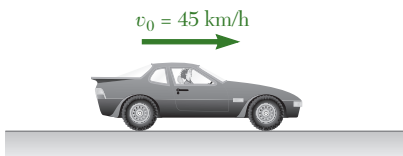



Figura P11.33

11.33 Uma motorista entra em uma autoestrada a 45 km/h e acelera uniformemente até 99 km/h. Pelo hodômetro do carro, o motorista sabe que percorreu 0,2 km enquanto acelerava. Determine (*a*) a aceleração do carro, (*b*) o tempo necessário para chegar a 99 km/h.

11.34 Um caminhão percorre 220 m em 10 s enquanto está sendo desacelerado a uma taxa constante de 0,6 m/s^2. Determine (*a*) sua velocidade inicial, (*b*) sua velocidade final, (*c*) a distância percorrida durante os primeiros 1,5 s.

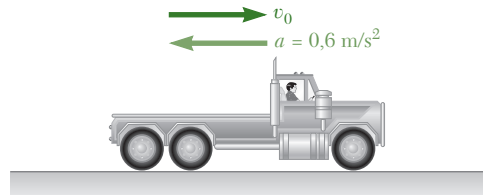



Figura P11.34

11.35 Considerando uma aceleração uniforme de 3 m/s^2 e sabendo que a velocidade escalar de um carro que passa por *A* é 50 km/h, determine (*a*) o tempo necessário para que o carro alcance *B*, (*b*) a velocidade do carro ao passar por *B*.

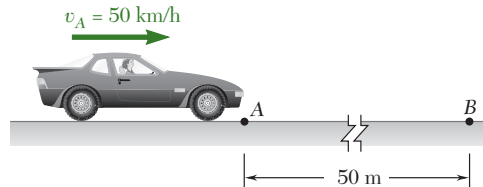



Figura P11.35

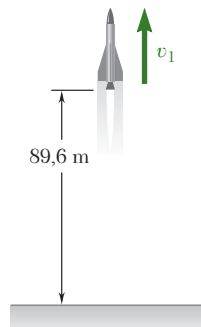



Figura P11.36

11.36 Um grupo dc estudantes lança um modelo de foguete na direção vertical. Baseando-se em dados registrados, eles determinam que a altitude do foguete foi de 89,6 m ao final da porção propulsada do voo e que o foguete aterrissou 16 s depois. Sabendo que o paraquedas de descida não se abriu e que o foguete caiu livremente até o chão depois de atingir sua altitude máxima, e considerando que g = 9,81 m/s^2, determine (*a*) a velocidade v_1 do foguete ao final do voo propulsado, (*b*) a altitude máxima atingida pelo foguete.

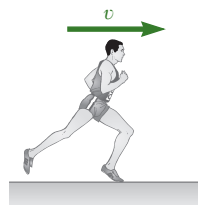



Figura P11.37

11.37 Um corredor em uma corrida de 100 m acelera uniformemente nos primeiros 35 m e então corre com velocidade constante. Se o tempo do corredor nos primeiros 35 m é de 5,4 s, determine (*a*) sua aceleração, (*b*) sua velocidade final e (*c*) seu tempo para a corrida.

11.38 Um pequeno pacote é liberado do repouso em *A* e move ao longo do transportador de rolete *ABCD*. O pacote tem uma aceleração uniforme de 4,8 m/s^2 enquanto se move para baixo pelas seções *AB* e *CD*,

com velocidade constante entre B e C. Se a velocidade do pacote em D é 7,2 m/s, determine (a) a distância d entre C e D, (b) o tempo requerido para o pacote alcançar D.

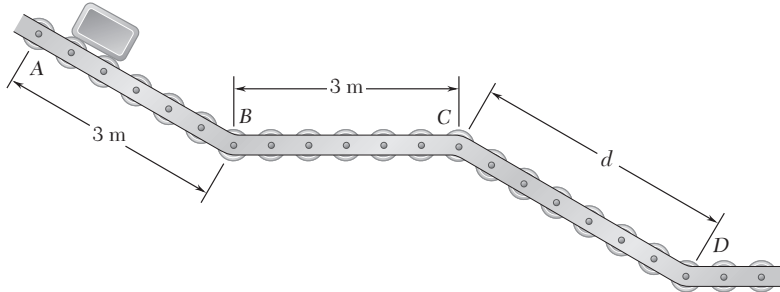



Figura *P11.38*

11.39 Um policial em um carro de patrulha, estacionado em uma zona de 70 km/h de limite de velocidade, observa um automóvel que passa a uma velocidade lenta e constante. Acreditando que o motorista desse automóvel possa estar embriagado, o policial liga seu carro, acelera uniformemente até 90 km/h em 8 s e, mantendo uma velocidade constante de 90 km/h, ultrapassa o motorista 42 s depois desse automóvel ter passado por ele. Sabendo que 18 s se passaram antes do policial começar a perseguir o motorista, determine (a) a distância que o policial percorreu antes de ultrapassar o motorista e (b) a velocidade do motorista.

11.40 Quando o corredor de revezamento A entra na zona de troca de 20 m de extensão com uma velocidade escalar de 12,9 m/s, ele começa a diminuir sua velocidade. Ele passa o bastão ao corredor B 1,82 s depois, enquanto os dois deixam a zona de troca com a mesma velocidade. Determine (a) a aceleração uniforme de cada um dos corredores, (b) quando o corredor B deve começar a correr.

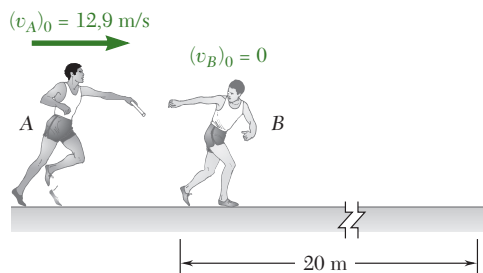



Figura P11.40

11.41 Dois automóveis A e B viajam no mesmo sentido em pistas adjacentes e, em $t = 0$, têm suas posições e velocidades escalares mostradas na figura. Sabendo que o automóvel A tem uma aceleração constante de 0,5 m/s^2 e que B tem uma desaceleração de 0,3 m/s^2, determine (a) quando e onde A vai ultrapassar B, (b) a velocidade de cada automóvel naquele instante.

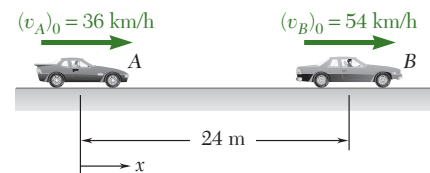



Figura P11.41

11.42 Em uma corrida de barcos, o barco *A* está 36 m a frente do barco *B* e ambos estão viajando a uma velocidade escalar constante de 168 km/h. Em $t = 0$, os barcos aceleram a taxas constantes. Sabendo que quando *B* ultrapassa *A*, $t = 8$ s e $v_A = 216$ km/h, determine (*a*) a aceleração de *A*, (*b*) a aceleração de *B*.

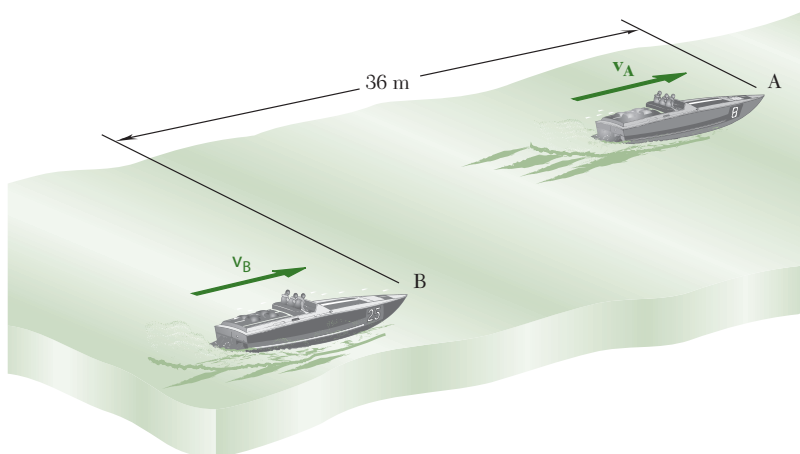



Figura P11.42

11.43 Caixas são colocadas em uma calha em intervalos uniformes de tempo t_R e deslizam para baixo na calha com aceleração uniforme. Sabendo que quando uma caixa *B* qualquer é liberada, a caixa precedente *A* já deslizou 6 m, e que a 1 s depois elas estão a 10 m afastadas, determine (*a*) o valor de t_R, (*b*) a aceleração das caixas.

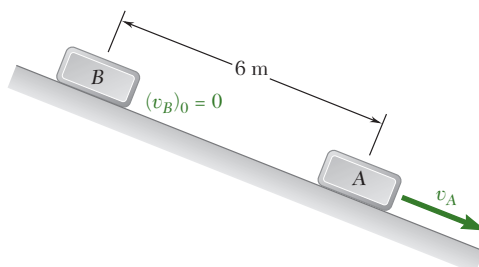



Figura P11.43

11.44 Dois automóveis *A* e *B* estão se aproximando em pistas adjacentes de uma rodovia. Em $t = 0$, *A* e *B* estão distanciados em 1 km entre si, suas velocidades escalares são $v_A = 108$ km/h e $v_B = 63$ km/h, e eles estão nos pontos *P* e *Q*, respectivamente. Sabendo que *A* passa pelo ponto *Q* 40 s depois que *B* passou por ali e que *B* passa pelo ponto *P* 42 s depois que A passou por lá, determine (*a*) as acelerações uniformes de *A* e *B*, (*b*) quando os veículos se cruzam, (*c*) a velocidade de *B* naquele instante.

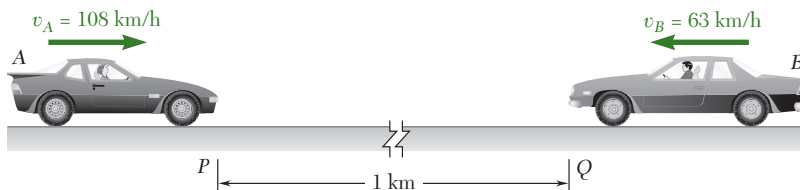



Figura P11.44

11.45 O carro A está estacionado ao longo da pista na direção norte de uma rodovia e o carro B está viajando na pista em direção sul a uma velocidade constante de 96 km/h. Em $t = 0$, A liga o motor e acelera a uma taxa constante a_A, enquanto, em $t = 5$ s, B começa a diminuir a velocidade com uma desaceleração constante de intensidade $a_A/6$. Sabendo que quando os carros se cruzam $x = 88$ m e $v_A = v_B$, determine (*a*) a aceleração a_A, (*b*) quando os veículos se cruzam, (*c*) a distância d entre os veículos quando $t = 0$.

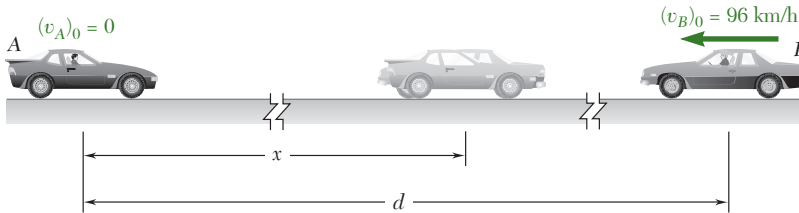



Figura P11.45

11.46 Dois blocos A e B são colocados em uma inclinação como mostrado na figura. Em $t = 0$, A é projetado para cima na inclinação com uma velocidade inicial de 8 m/s e B é liberado em repouso. Os blocos passam um pelo outro após 1 s e B alcança a base da inclinação quando $t = 3{,}4$ s. Sabendo que a distância máxima alcançada pelo bloco A a partir da base da inclinação é 6 m e a aceleração de A e B (devido à gravidade e ao atrito) são constantes e direcionadas para baixo na inclinação, determine (*a*) a aceleração de A e B, (*b*) a distância d, (*c*) a velocidade escalar de A quando os blocos passam um pelo outro.

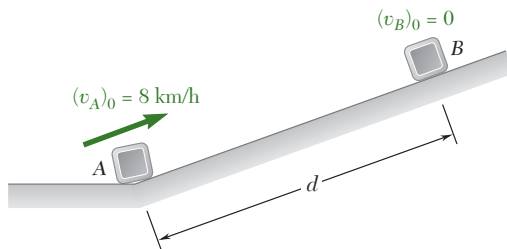



Figura P11.46

11.47 O bloco deslizante A move para a esquerda com a velocidade constante de 6 m/s. Determine (*a*) a velocidade do bloco B, (*b*) a velocidade da porção D do cabo, (*c*) a velocidade relativa da porção C do cabo em relação a porção D.

11.48 O bloco B parte do repouso e se movimenta com uma aceleração constante. Sabendo que depois do bloco deslizante A ter se deslocado 400 mm, sua velocidade é 4 m/s, determine (*a*) a aceleração de A e B, (*b*) a velocidade e a variação de posição de B após 2 s.

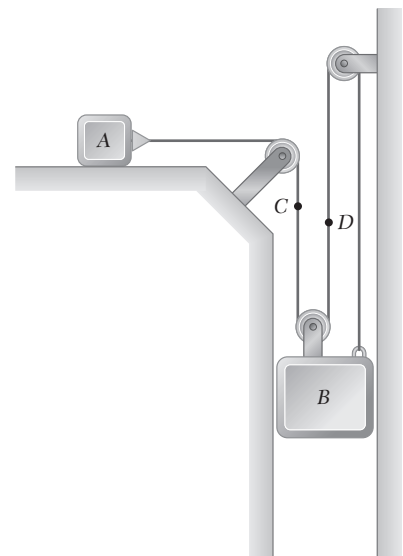



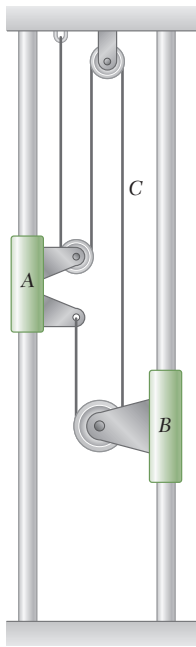
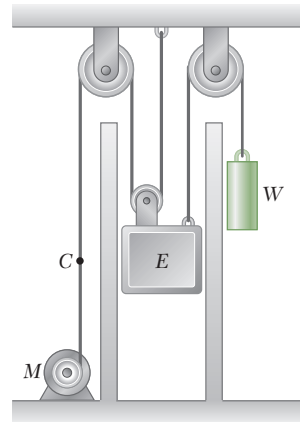
Figura P11.47 e P11.48

11.49 O elevador mostrado na figura se movimenta para baixo com velocidade constante de 4,5 m/s. Determine (*a*) a velocidade do cabo *C*, (*b*) a velocidade do contra peso *W*, (*c*) a velocidade relativa do cabo *C* em relação ao elevador, (*d*) a velocidade relativa do contrapeso *W* em relação ao elevador.

Figura P11.49 e P11.50

11.50 O elevador mostrado na figura sai do repouso e se movimenta para cima com aceleração constante. Se o contrapeso *W* se movimenta 10 m em 5 s, determine (*a*) a aceleração do elevador e do cabo *C*, (*b*) a velocidade do elevador após 5 s.

Figura *P11.51* e *P11.52*

11.51 O colar *A* parte do repouso e se movimenta para cima com aceleração constante. Sabendo que depois de 8 s a velocidade relativa do colar *B* em relação ao colar *A* é 600 mm/s, determine (*a*) as acelerações de *A* e *B*, (*b*) a velocidade e a variação da posição de *B* depois de 6 s.

11.52 Na posição mostrada na figura, o colar *B* se movimenta para baixo com uma velocidade de 300 mm/s. Determine (*a*) a velocidade do colar *A*, (*b*) a velocidade da porção *C* do cabo, (*c*) a velocidade relativa da porção *C* do cabo em relação ao colar *B*.

11.53 O bloco deslizante *B* se movimenta para a direita com uma velocidade constante de 300 mm/s. Determine (*a*) a velocidade do bloco deslizante *A*, (*b*) a velocidade da porção *C* do cabo, (*c*) a velocidade da porção *D* do cabo e (*d*) a velocidade relativa da porção *C* do cabo em relação ao bloco deslizante *A*.

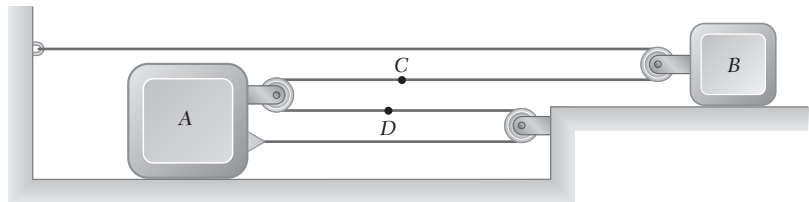



Figura P11.53 e P11.54

11.54 No instante mostrado na figura, o bloco deslizante *B* está se movendo para a direita com uma aceleração constante e sua velocidade é 150 mm/s. Sabendo que depois que o bloco deslizante *A* moveu 240 mm para a direita, sua velocidade é de 60 mm/s, determine (*a*) as acelerações de *A* e *B*, (*b*) a aceleração da porção *D* do cabo, (*c*) a velocidade e a variação de posição do bloco deslizante *B* depois de 4 s.

11.55 O bloco B se movimenta para baixo com velocidade constante de 20 mm/s. Em $t = 0$, o bloco A é movimentado para cima com aceleração constante e sua velocidade é 30 mm/s. Sabendo que em $t = 3$ s o bloco deslizante C teria se movimentado 57 mm para a direita, determine (a) a velocidade do bloco deslizante C em $t = 0$, (b) as acelerações de A e C, (c) a variação da posição do bloco A após 5 s.

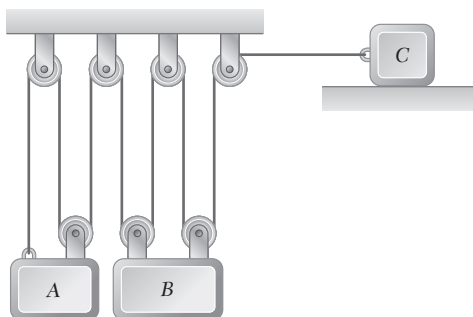
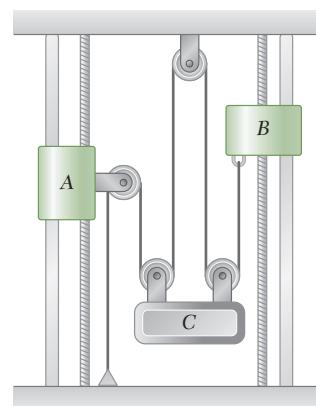



Figura P11.55 e P11.56

11.56 O bloco B inicia em repouso, o bloco A se movimenta com aceleração constante, e o bloco deslizante C se movimenta para a direita com aceleração constante de 75 mm/s^2. Sabendo que em $t = 2$ s as velocidades de B e C são de 480 mm/s para baixo e 280 mm/s para a direita, respectivamente, determine (a) a aceleração de A e B, (b) as velocidades iniciais de A e C, (c) a variação de posição do bloco deslizante C após 3 s.

Figura P11.57 e P11.58

11.57 O colar A parte do repouso em $t = 0$ e se movimenta para baixo com uma aceleração constante de 140 mm/s^2. O colar B se movimenta para cima com uma aceleração constante e sua velocidade inicial é de 160 mm/s. Sabendo que o colar B percorre 400 mm entre $t = 0$ e $t = 2$ s, determine (a) as acelerações do colar B e do bloco C, (b) o instante em que a velocidade do bloco C é igual a zero e (c) a distância que o bloco C terá percorrido naquele instante.

11.58 Os colares A e B partem do repouso e o colar A se movimenta para cima com uma aceleração de $60t^2$ mm/s^2. Sabendo que o colar B se movimenta para baixo com aceleração constante e que sua velocidade é de 160 mm/s depois de ter percorrido 640 mm, determine (a) a aceleração do bloco C e (b) a distância que o bloco C terá percorrido depois de 3 s.

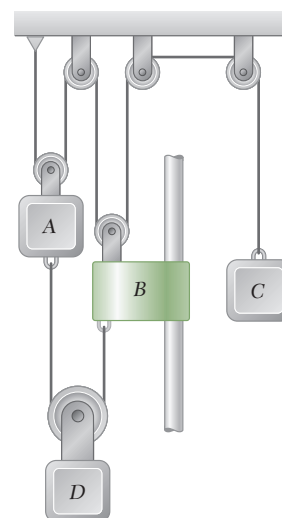
11.59 O sistema mostrado parte do repouso e cada um de seus componentes se move com uma aceleração constante. Se a aceleração relativa do bloco C em relação ao colar B é de 60 mm/s^2 para cima e a aceleração relativa do bloco D em relação ao bloco A é de 110 mm/s^2 para baixo, determine (a) a velocidade do bloco C depois de 3 s e (b) a variação de posição do bloco D depois de 5 s.

11.60 O sistema mostrado parte do repouso e o comprimento da corda superior está ajustado para que A, B e C estejam inicialmente no mesmo nível. Cada componente se move com uma aceleração constante e, depois de 2 s, a variação da posição relativa do bloco C em relação ao bloco A é 280 mm para cima. Sabendo que quando a velocidade relativa do colar B em relação ao bloco A é de 80 mm/s para baixo e que os deslocamentos de A e B são de 160 mm para baixo e 320 mm para baixo, respectivamente, determine (a) as acelerações de A e B, se $a_B > 10$ mm/s^2, (b) a variação da posição do bloco D quando a velocidade do bloco C é de 600 mm/s para cima.

Figura P11.59 e P11.60

*11.7 Solução gráfica de problemas de movimento retilíneo

Foi observado na Seção 11.2 que as fórmulas fundamentais

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad \text{e} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

possuem um significado geométrico. A primeira fórmula expressa que a velocidade em qualquer instante é igual à inclinação da curva x-t nesse mesmo instante (Fig. 11.10). A segunda fórmula expressa que a aceleração é igual à inclinação da curva v-t. Essas duas propriedades podem ser usadas para obter-se graficamente as curvas v-t e a-t de um movimento quando a curva x-t é conhecida.

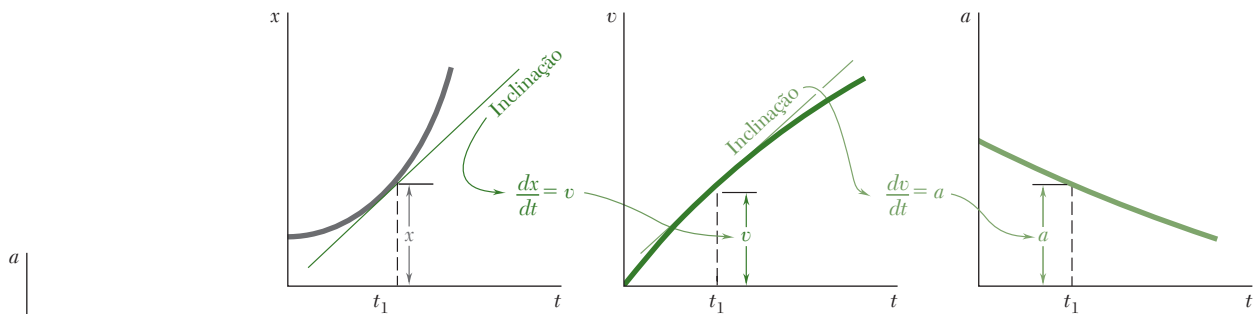



Figura 11.10

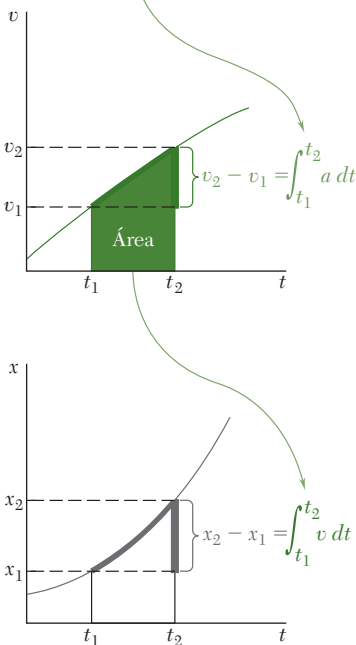
Integrando as duas fórmulas fundamentais de um instante t_1 a um instante t_2 escrevemos

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v\, dt \qquad \text{e} \qquad v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a\, dt \qquad (11.12)$$

A primeira fórmula expressa que a área medida sob a curva v-t, de t_1 a t_2 é igual à variação de x durante esse intervalo de tempo (Fig. 11.11). Semelhantemente, a segunda fórmula nos diz que a área medida sob a curva a-t de t_1 a t_2 é igual à variação de v durante o mesmo intervalo de tempo. Essas duas propriedades podem ser usadas para determinar, graficamente, a curva x-t de um movimento quando sua curva v-t ou sua curva a-t é conhecida (ver Problema Resolvido 11.6).

As soluções gráficas são particularmente úteis quando o movimento considerado é definido a partir de dados experimentais e quando x, v e a não são funções analíticas de t. Elas também podem ser usadas, com vantagem, quando o movimento consiste em partes distintas e quando sua análise requer que se escreva uma equação diferente para cada uma dessas partes. Quando se usa uma solução gráfica, entretanto, deve-se ter o cuidado de observar que (1) a área sob a curva v-t mede a *variação de* x e não x propriamente dito, e, analogamente, que a área sob a curva a-t mede a variação de v; (2) uma área acima do eixo t corresponde a um *aumento* de x ou v, enquanto uma área localizada abaixo do eixo t mede um *decréscimo* de x ou v.

Figura 11.11

Ao desenhar curvas de movimento, será útil lembrar que se a velocidade for constante, ela será representada por uma reta horizontal; a coordenada de posição x será, então, uma função linear de t e será

representada por uma reta oblíqua. Se a aceleração for constante e diferente de zero, ela será representada por uma reta horizontal; v será então uma função linear de t, representada por uma reta oblíqua, e x será expresso por um polinômio de segundo grau em t, representado por uma parábola. Se a aceleração for uma função linear de t, a velocidade e a coordenada de posição serão iguais, respectivamente, a polinômios do segundo e terceiro graus; a será então representada por uma reta oblíqua, v por uma parábola e x por uma cúbica. De um modo geral, se a aceleração for um polinômio de grau n em t, a velocidade será um polinômio de grau $n + 1$ e a coordenada de posição um polinômio de grau $n + 2$; esses polinômios são representados por curvas de movimento de grau correspondente.

*11.8 Outros métodos gráficos

Uma solução gráfica alternativa pode ser usada para determinar a posição de uma partícula em um dado instante, diretamente a partir da curva *a-t*. Representando os valores de x e v em $t = 0$ por x_0 e v_0 e seus valores em $t = t_1$ por x_1 e v_1, e observando que a área sob a curva *v-t* pode ser decomposta em um retângulo de área v_0t_1 e elementos diferenciais horizontais de área $(t_1 - t)dv$ (Fig. 11.12*a*), escrevemos

$$x_1 - x_0 = \text{área sob a curva } v\text{-}t = v_0t_1 + \int_{v_0}^{v_1} (t_1 - t)\, dv$$

Substituindo $dv = a\, dt$ na integral, obtemos

$$x_1 - x_0 = v_0t_1 + \int_0^{t_1} (t_1 - t)\, a\, dt$$

Recorrendo à Fig. 11.12*b*, notamos que a integral representa o primeiro momento da área sob a curva *a-t*, em relação à linha $t = t_1$, que limita a área à direita. Esse método de solução é conhecido, então, como *método do momento de área.* Se a abscissa $\bar{t}$ do centroide C da área for conhecida, a coordenada de posição x_1 pode ser obtida escrevendo

$$x_1 = x_0 + v_0t_1 + (\text{área sob a curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t}) \qquad (11.13)$$

Se a área sob a curva *a-t* for uma área composta, o último termo em (11.13) pode ser obtido multiplicando-se cada área componente pela distância a partir de seu centroide a reta $t = t_1$. As áreas acima do eixo t são consideradas positivas e as áreas abaixo do eixo t, negativas.

Um outro tipo de curva do movimento, a curva *v-x*, é algumas vezes usado. Se tal curva tiver sido traçada (Fig. 11.13), a aceleração a poderia ser obtida, para qualquer instante, desenhando a normal AC à curva e *medindo a subnormal BC.* De fato, observando que o ângulo entre AC e AB é igual ao ângulo θ entre a horizontal e a reta tangente em A (cuja inclinação é $\text{tg}\,\theta = dv/dx$), escrevemos

$$BC = AB\ \text{tg}\ \theta = v\frac{dv}{dx}$$

e assim, recordando a fórmula (11.4),

$$BC = a$$

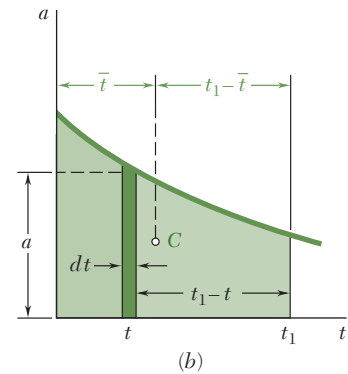
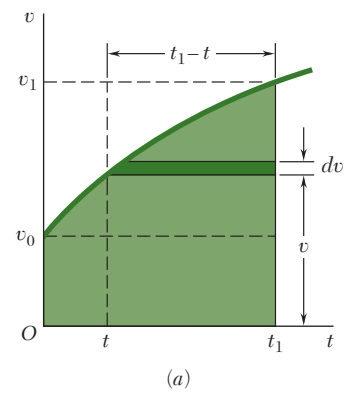



Figura 11.12

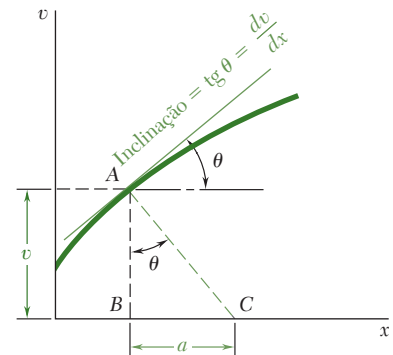
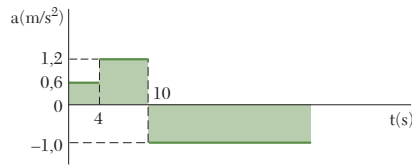



Figura 11.13

PROBLEMA RESOLVIDO 11.6

Uma partícula move-se em linha reta com a aceleração mostrada na figura. Sabendo que começa na origem com $v_0 = -3{,}6$ m/s, (*a*) desenhe as curvas $v - t$ e $x - t$ curves for $0 < t < 20$ s, (*b*) determina sua velocidade, posição e a distância total percorrida quando $t = 12\,s$.

SOLUÇÃO

a. Curva aceleração-tempo.

Condições iniciais: $t = 0,\ v_0 = -3{,}6$ m/s, $x_0 = 0$

Mudança em v = área sob a curva a–t:

$$\text{v}_0 = -3{,}6 \text{ m/s}$$

$0 < t < 4s$: $\quad \text{v}_4 - \text{v}_0 = (0{,}6 \text{ m/s}^2)(4\text{s}) = +2{,}4 \text{ m/s} \qquad \text{v}_4 = -1{,}2 \text{ m/s}$

$4s < t < 10s$: $\quad \text{v}_{10} - \text{v}_4 = (1{,}2 \text{ m/s}^2)(6\text{s}) = +7{,}2 \text{ m/s} \qquad \text{v}_{10} = +6 \text{ m/s}$

$10s < t < 12s$: $\quad \text{v}_{12} - \text{v}_{10} = (-1 \text{ m/s}^2)(2\text{s}) = -2 \text{ m/s} \qquad \text{v}_{12} = +4 \text{ m/s}$

$12s < t < 20s$: $\quad \text{v}_{20} - \text{v}_{12} = (-1 \text{ m/s}^2)(8\text{s}) = -8 \text{ m/s} \qquad \text{v}_{20} = -4 \text{ m/s}$

Mudança em x = área sob a curva v–t: $x_0 = 0$

$0 < t < 4s$: $\quad x_4 - x_0 = \frac{1}{2}(-3{,}6 - 1{,}2)(4) = -9{,}6 \text{ m} \qquad x_4 = -9{,}6 \text{ m}$

$4s < t < 5s$: $\quad x_5 - x_4 = \frac{1}{2}(-1{,}2)(1) = -0{,}6 \text{ m} \qquad x_5 = -10{,}2 \text{ m}$

$5s < t < 10s$: $\quad x_{10} - x_5 = \frac{1}{2}(+6)(5) = +15 \text{ m} \qquad x_{10} = 4{,}8 \text{ m}$

$12s < t < 10s$: $\quad x_{12} - x_{10} = \frac{1}{2}(+6 + 4)(2) = +10 \text{ m} \qquad x_{12} = +14{,}8 \text{ m}$

$16s < t < 12s$: $\quad x_{16} - x_{12} = \frac{1}{2}(+4)(4) = +8 \text{ m} \qquad x_{16} = +22{,}8 \text{ m}$

$20s < t < 16s$: $\quad x_{20} - x_{16} = \frac{1}{2}(-4)(4) = -8 \text{ m} \qquad x_{20} = +14{,}8 \text{ m}$

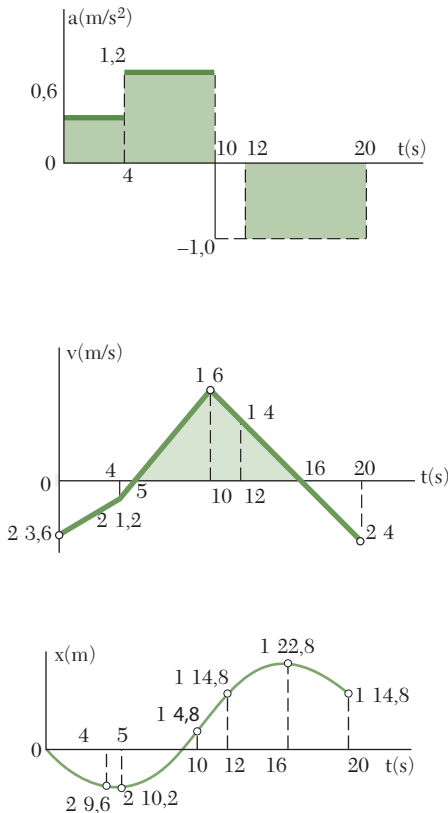
b. Das curvas acima, lemos que

Para $t = 12$s: $\quad v_{12} = +\,4$ m/s, $x_{12} = +\,14{,}8$ m

Distância percorrida $t = 0$ to $t = 12$s

De $t = 0$s to $t = 5$s: Distância percorrida = 10,2 m

De $t = 5$s to $t = 12$s: Distância percorrida = (10,2 + 14,8) = 25 m

Distância total percorrida = 35,2 m ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesse item (Seções 11.7 e 11.8), revisamos e desenvolvemos várias *técnicas gráficas para a resolução de problemas envolvendo o movimento retilíneo.* Essas técnicas podem ser usadas para solucionar problemas diretamente ou para complementar métodos analíticos de solução fornecendo uma descrição visual, e assim uma melhor compreensão do movimento de um dado corpo. Sugerimos que você esboce uma ou mais curvas de movimento para os vários problemas desta seção, mesmo se estes problemas não façam parte de sua tarefa de casa.

1. Desenhando as curvas *x-t*, *v-t* e *a-t* e aplicando métodos gráficos. As seguintes propriedades foram indicadas na Seção 11.7 e você deve tê-las em mente quando usar um método gráfico de solução.

a. As inclinações das curvas *x-t* e *v-t* em um instante t_1 são respectivamente iguais à *velocidade* e à *aceleração* nesse instante t_1.

b. As áreas sob as curvas *a-t* e *v-t* entre os instantes t_1 e t_2 são respectivamente iguais à variação Δv na velocidade e à variação Δx na coordenada de posição durante esse intervalo de tempo.

c. Se uma das curvas de movimento é conhecida, as propriedades fundamentais que resumimos nos parágrafos *a* e *b* vão permitir-lhe construir as duas outras curvas. Entretanto, quando estivermos usando as propriedades do parágrafo *b*, a velocidade e a coordenada de posição no tempo t_1 devem ser conhecidas para determinar a velocidade e a coordenada de posição no instante t_2.

Se você estudou anteriormente os diagramas de esforço cortante e de momento fletor para uma viga, deve reconhecer a analogia que existe entre as três curvas de movimento e os três diagramas que representam respectivamente a carga distribuída, o esforço cortante e o momento fletor na viga. Assim, quaisquer técnicas que você tenha aprendido em relação à construção desses diagramas podem ser aplicadas ao desenhar as curvas de movimento.

2. Usando métodos aproximados. Quando as curvas *a-t* e *v-t* não estão representadas por funções analíticas ou quando elas são baseadas em dados experimentais, é frequentemente necessário usar métodos aproximados para calcular as áreas sob essas curvas. Nesses casos, a área dada é aproximada por uma série de retângulos de largura Δt. Quanto menor for o valor de Δt, tanto menor será o erro introduzido pela aproximação. A velocidade e a coordenada de posição são obtidas escrevendo

$$v = v_0 + \Sigma a_{\text{méd}} \Delta t \qquad x = x_0 + \Sigma v_{\text{méd}} \Delta t$$

onde $a_{méd}$ e $v_{méd}$ são as alturas de um retângulo de aceleração e de um retângulo de velocidade, respectivamente.

(*continua*)

3. Aplicando o método do momento de área. Essa técnica gráfica é usada quando a curva *a-t* é dada e a variação da coordenada de posição deve ser determinada. Verificamos na Seção 11.8 que a coordenada de posição x_1 pode ser expressa por

$$x_1 = x_0 + v_0 t_1 + (\text{área sob a curva } a\text{-}t)(t_1 - \bar{t}) \qquad (11.13)$$

Tenha em mente que quando a área sob a curva *a-t* for uma área composta, o mesmo valor de t_1 deve ser usado para calcular a contribuição de cada uma das áreas componentes.

4. Determinando a aceleração a partir de uma curva *v-x*. Você viu na Seção 11.8 que é possível determinar a aceleração a partir de uma curva *v-x* por medição direta. É importante notar, entretanto, que esse método somente é aplicável se a mesma escala linear for usada para os eixos v e x (por exemplo, 1 cm = 10 m e 1 cm = 10 m/s). Quando esta condição não for satisfeita, a aceleração pode ainda ser determinada pela equação

$$a = v\frac{dv}{dx}$$

onde a inclinação dv/dx é obtida como segue; em primeiro lugar, desenhe a tangente à curva no ponto de interesse. A seguir, usando escalas apropriadas, meça ao longo dessa tangente os incrementos correspondentes Δx e Δv. A inclinação desejada é igual à razão $\Delta v/\Delta x$.

PROBLEMAS

11.61 Um vagão do metrô parte da estação A e ganha velocidade à razão de $2 m/s^2$ por 6 s e, depois, à razão de $3 m/s^2$ até alcançar a velocidade de 24 m/s. O carro mantém a velocidade até aproximar-se da estação B; os freios são aplicados, dando ao carro uma desaceleração constante e levando-o a parar em 6 s. O tempo total do percurso de A a B é de 40 s. Desenhes as curvas $a - t$, $v - t$ e $x - t$ e determina a distância entre as estações A e B.

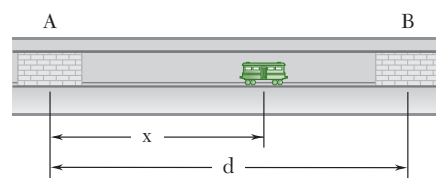



Figura P11.61

11.62 Para a partícula e o movimento do Problema Resolvido 11.6 construa as curvas v-t e x-t para $0 < t < 20$ s e determine (a) o valor máximo de velocidade da partícula, (b) o valor máximo da sua posição coordenada.

11.63 Uma partícula se move em uma linha reta com a velocidade mostrada na figura. Sabendo que $x = -540$ mm em $t = 0$, (a) construa as curvas a-t e x-t para $0 < t < 50$ s e determine (b) a distância total percorrida pela partícula quando $t = 50$ s e (c) os dois instantes em que $x = 0$.

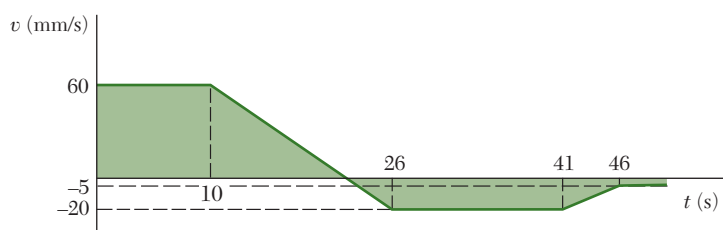



Figura P11.63

11.64 Uma partícula se move em uma linha reta com a velocidade mostrada na figura. Sabendo que $x = -540$ mm em $t = 0$, (a) construa as curvas a-t e x-t para $0 < t < 50$ s e determine (b) o valor máximo da posição coordenada da partícula, (c) os valores de t para os quais a partícula está em $x = 100$ mm.

11.65 Um paraquedista está em queda livre a uma taxa de 200 km/h quando abre seu paraquedas a uma altitude de 600 m. Seguindo-se uma desaceleração rápida e constante, ele então cai para uma taxa constante de 50 km/h de 586 m a 30 m, onde manobra o paraquedas em direção ao vento para diminuir mais ainda a velocidade de sua descida. Sabendo que o paraquedista aterrissa com uma velocidade descendente desprezível, determine (a) o tempo necessário para esse paraquedista aterrissar depois de abrir seu paraquedas, (b) a desaceleração inicial.

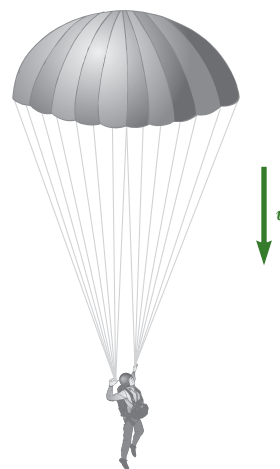



Figura P11.65

11.66 Um componente de máquina é pulverizado com tinta enquanto está montado em única plataforma móvel que percorre 4 m em 20 s. A plataforma tem uma velocidade escalar inicial de 80 mm/s e pode ser acelerada a uma taxa máxima de $60 mm/s^2$. Sabendo que o processo de pintura requer 15 s para ser completado e que é realizado à medida que a plataforma se move com uma velocidade constante, determine o menor valor possível da velocidade máxima da plataforma.

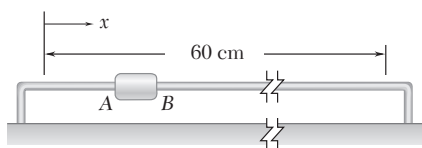



Figura P11.67

11.67 Um sensor de temperatura está acoplado ao cursor AB, que se desloca para frente e para trás ao longo de 60 cm. As velocidades máximas do cursor são 12 cm/s para a direita e 30 cm/s para a esquerda. Quando o cursor se desloca para a direita, ele acera e desacelera a uma taxa constante de 6 cm/s^2 quando se desloca para a esquerda, acelera e desacelera a uma taxa constante de 20 cm/s^2. Determine o tempo necessário para o cursor completar um ciclo inteiro e construa as curvas v-t e x-t de seu movimento.

11.68 Um trem de passageiros que viaja a 40 km/h está a 3 km de uma estação. O trem, então, desacelera de modo que a sua velocidade seja de 20 km/h quando estiver a 0,5 km da estação. Sabendo que o trem chega na estação 7,5 min depois de ter começado a desacelerar e assumindo desacelerações constantes, determine (a) o tempo necessário para percorrer os primeiros 2,5 km, (b) a velocidade escalar do trem quando ele chega na estação, (c) a desaceleração constante final do trem.

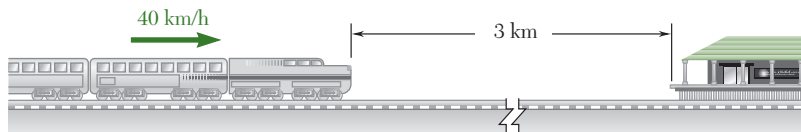



Figura P11.68

11.69 Dois postos de controle A e B de um rali de estrada estão localizados na mesma rodovia e separados entre si por 12 km. Os limites de velocidade escalar para os primeiros 8 km e para os últimos 4 km são de 100 km/h e 70 km/h, respectivamente. Os motoristas devem parar em cada posto de controle, e o tempo especificado entre os postos A e B é de 8 min 20 s. Sabendo que uma motorista acelera e desacelera a uma mesma taxa constante, determine a intensidade de sua aceleração se ela viaja tanto quanto possível no limite da velocidade escalar.

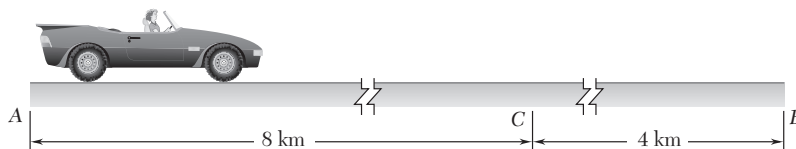



Figura P11.69

11.70 Em um teste de tanque de água que envolve o lançamento de um pequeno modelo de barco, a velocidade inicial horizontal do modelo é de 6 m/s e sua aceleração horizontal varia linearmente de -12 m/s^2 em $t = 0$ até -2 m/s^2 quando $t = t_1$ e depois permanece igual a -2 m/s^2 até $t = 1{,}4$ s. Sabendo que $v = 1{,}8$ m/s quando $t = t_1$, determine (a) o valor de t_1, (b) a velocidade e a posição do modelo quando $t = 1{,}4$ s.

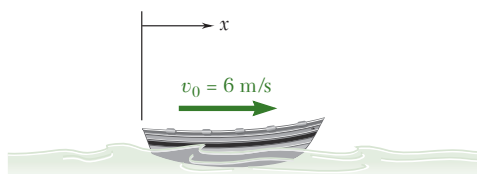



Figura P11.70

11.71 Um carro e um caminhão estão viajando numa velocidade constante de 56 km/h; o carro está 12 m atrás do caminhão. O motorista do carro quer passar o caminhão, ou seja, ele deseja colocar seu carro em *B*, 12 m à frente do caminhão, e depois reduzir sua velocidade para 56 km/h. A aceleração máxima do carro é 1,5 m/s^2 e a máxima desaceleração obtida com aplicando-se os freios é 6 m/s^2. Qual é o menor tempo no qual o motorista do carro pode completar a operação de ultrapassagem se ele não pode exceder a velocidade de 80 km/h. Construa a curva *v-t*.

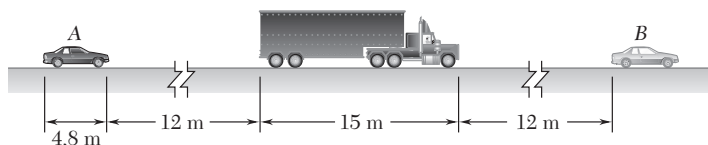



Figura P11.71

11.72 Resolva o Problema 11.71, considerando que o motorista do carro não presta nenhuma atenção ao limite de velocidade enquanto ultrapassa e se concentra em alcançar a posição *B* e reduzir a velocidade para 56 km/h no tempo mais curto possível. Qual é a velocidade escalar máxima atingida? Construa a curva *v-t*.

11.73 Um elevador parte do repouso e sobe acelerando a uma taxa de 1,2 m/s^2 até atingir a velocidade escalar de 7,8 m/s, que é então mantida. Dois segundos depois do elevador ter começado a subir, um homem parado 12 m acima da posição inicial do topo do elevador joga uma bola para cima com uma velocidade inicial de 20 m/s. Determine quando a bola vai atingir o elevador.

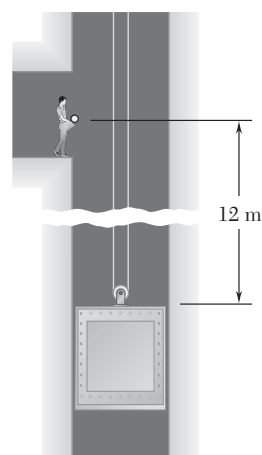



Figura P11.73

11.74 O registro de aceleração foi obtido para um pequeno aeroplano viajando ao longo de um curso em linha reta. Sabendo que $x = 0$ e $v = 60$ m/s quando $t = 0$, determine (*a*) a velocidade e posição do avião em $t = 20$ s, (*b*) a velocidade média durante o intervalo $6 \text{ s} < t < 14 \text{ s}$.

Figura P11.74

11.75 O carro *A* está viajando em uma rodovia a uma velocidade constante $(v_A)_0 = 95$ km/h e está a 115 m da entrada de uma rampa de acesso quando o carro *B* entra na pista de aceleração naquele ponto com uma velocidade escalar $(v_B)_0 = 25$ km/h. O carro *B* acelera uniformemente e entra na pista principal depois de percorrer 60 m em 5 s. Ele então continua a acelerar na mesma taxa até atingir uma velocidade de 95 km/h, que é então mantida. Determine a distância final entre os dois carros.

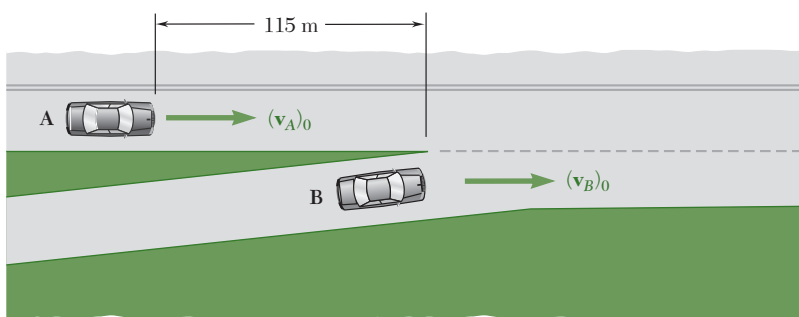
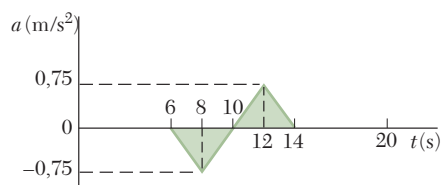



Figura P11.75

11.76 O carro A está viajando a uma velocidade escalar de 64 km/h quando entra em um trecho com limite de velocidade de 48 km/h. A motorista do carro A desacelera a uma taxa de 4,8 m/s^2 até atingir uma velocidade escalar de 48 km/h, que ela então mantém. Quando o carro B, que estava inicialmente 18 m atrás do carro A e viajando a uma velocidade constante de 72 km/h, entra nesse trecho de limite de velocidade, seu motorista desacelera a uma taxa de 6 m/s^2 até atingir uma velocidade de 45 km/h. Sabendo que a motorista do carro B mantém essa velocidade de 45 km/h, determine (a) a menor distância a que o carro B chega do carro A, (b) o momento em que o carro A está 21 m à frente do carro B.

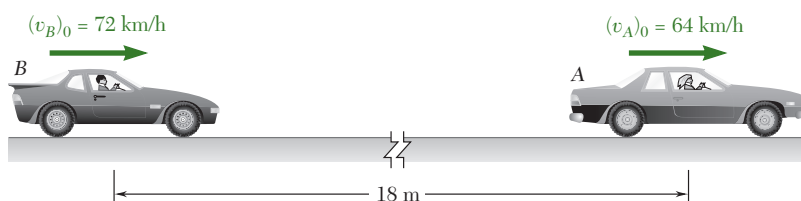



Figura P11.76

11.77 Um carro esta viajando em velocidade constante de 54 km/h quando o motorista vê uma criança correndo na estrada. O motorista pisa nos freios até a criança retornar para a calçada e, então, acelera para retornar à sua velocidade de 54 km/h; o registro da aceleração do carro é mostrado na figura. Considerando $x = 0$ quando $t = 0$, determine (a) o tempo t_1 para que a velocidade seja novamente 54 km/h, (b) a posição do carro nesse instante, (c) a velocidade média do carro durante o intervalo 1 s $\leq t \leq t_1$.

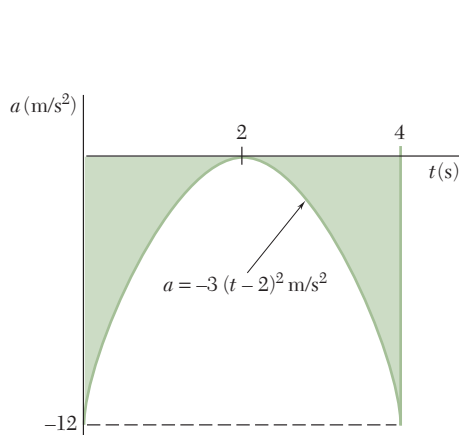



Figura P11.77

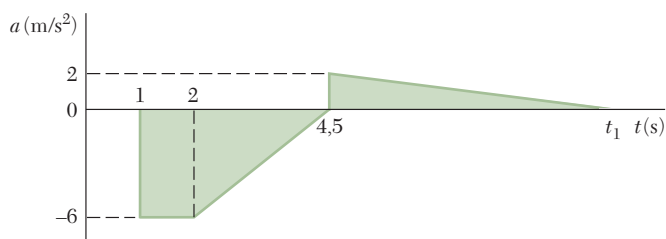



Figura P11.78

11.78 Como mostrado na figura, de $t = 0$ até $t = 4$ a aceleração de uma dada partícula é representada por uma parábola. Sabendo que $x = 0$ e $v = 8$ m/s quando $t = 0$, (a) construa curvas v-t e x-t para $0 < t < 4$ s, (b) determine a posição da partícula em $t = 3$ s. (*Dica:* Use a tabela das páginas finais do livro.)

11.79 Durante um processo de manufatura, uma esteira transportadora parte do repouso e percorre um total de 0,4 m até voltar temporariamente ao repouso. Sabendo que a taxa de mudança da aceleração está limitada a ±1,6 m/s^2 por segundo, determine (a) o tempo mais curto necessário para a esteira percorrer 0,4 m, (b) os valores máximo e médio da velocidade da esteira durante esse tempo.

11.80 Um trem de transporte de um aeroporto trafega entre dois terminais que estão afastados 2,6 km. Para manter o conforto do passageiro, a aceleração do trem é limitada a ±1,2 m/s^2 e a taxa de mudança da aceleração é limitada a ±0,2 m/s^2 por segundo. Se esse trem tem uma velocidade escalar máxima de 32 km/h, determine (*a*) o tempo mais curto para o trem trafegar entre os dois terminais e (*b*) a velocidade média correspondente do trem.

11.81 O registro de aceleração mostrado na figura foi obtido durante os testes de velocidade escalar de um carro esportivo. Sabendo que o carro parte do repouso, determine por meios aproximados (*a*) a velocidade do carro quando $t = 8$ s, (*b*) a distância que o carro percorreu quando $t = 20$ s.

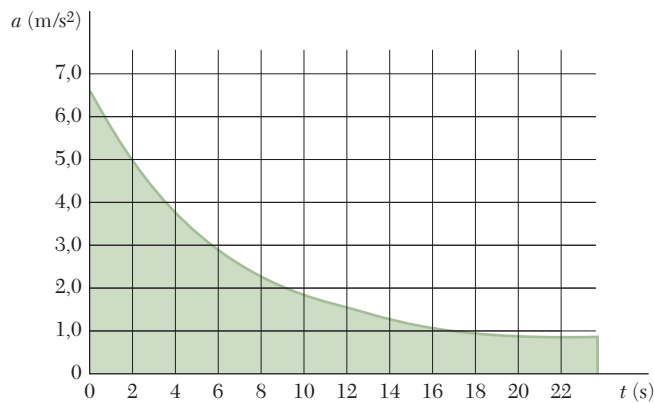



Figura *P11.81*

11.82 Dois segundos são necessários para trazer a haste do pistão de um cilindro de ar ao repouso; o registro da aceleração do pistão durante os 2 s é mostrado na figura. Determine por meios aproximados (*a*) a velocidade inicial da haste do pistão, (*b*) a distância percorrida pela haste do pistão à medida que ela é trazida ao repouso.

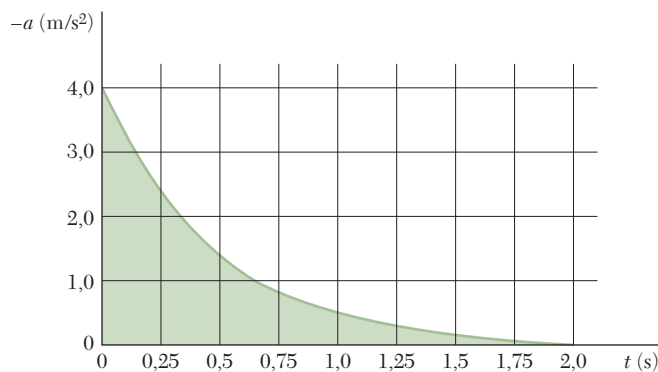



Figura *P11.82*

11.83 Um avião de treinamento tem velocidade de 37,8 m/s ao pousar em um porta-aviões. Quando o mecanismo de parada traz o avião ao repouso, a velocidade e a aceleração do avião são registradas; os resultados são mostrados (curva sólida) na figura. Determine por meios aproximados (*a*) o tempo necessário para o avião chegar ao repouso e (*b*) a distância percorrida nesse tempo.

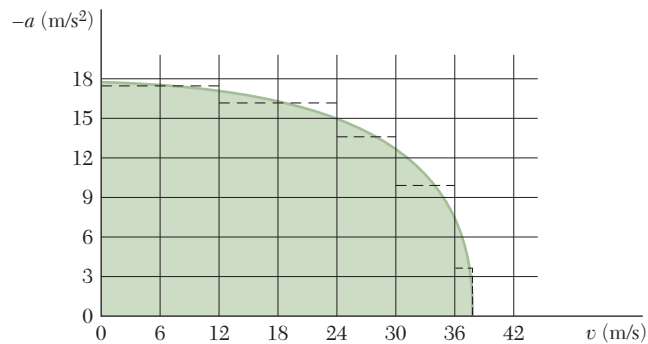



Figura P11.83

11.84 Na figura é mostrada uma parte da curva *v-x* determinada experimentalmente para um carrinho de transporte. Determine por métodos aproximados a aceleração do carrinho (*a*) quando $x = 0{,}25$ m e (*b*) quando $v = 2$ m/s.

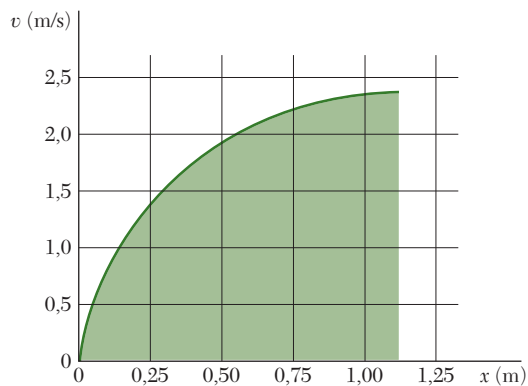
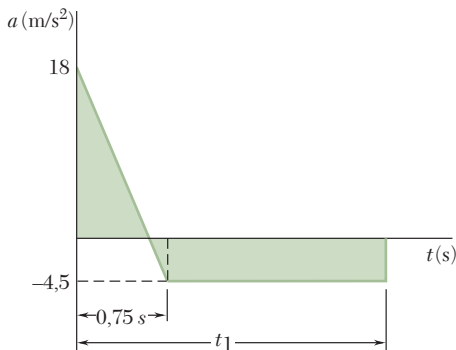



Figura P11.84

11.85 Usando o método da Seção 11.8, deduza a fórmula $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ para a coordenada de posição de uma partícula em um movimento uniformemente acelerado.

11.86 Usando o método da Seção 11.8, determine a posição da partícula do Problema Resolvido 11.6 quando $t = 14$ s.

Figura P11.87

11.87 Durante o teste de um novo bote salva-vidas, um acelerômetro fixado ao bote fornece o registro mostrado na figura. Se o bote tem uma velocidade de 2 m/s, $t = 0$ e fica em repouso no tempo t_1, determine, usando o método da Seção 11.8, (*a*) o tempo t_1, (*b*) a distância por meio da qual o bote se move antes de entrar em repouso.

11.88 Para a partícula do Problema 11.63, trace a curva *a-t* e determine usando o método da Seção 11.8, (*a*) a posição da partícula quando $t = 52$ s, (*b*) o valor máximo de sua posição coordenada.

MOVIMENTO CURVILÍNEO DE PARTÍCULAS

11.9 Vetor posição, velocidade e aceleração

Quando uma partícula se desloca ao longo de uma curva que não seja uma linha reta, dizemos que a partícula está em *movimento curvilíneo*. Para definir a posição P ocupada pela partícula em um instante dado t, selecionamos um sistema de referência fixo, tal como os eixos x, y, z mostrados na Fig 11.14*a*, e desenhamos o vetor $\mathbf{r}$ unindo a origem O ao ponto P. Como o vetor $\mathbf{r}$ é caracterizado por sua intensidade r e sua direção em relação aos eixos de referência, ele define completamente a posição da partícula em relação a esses eixos; o vetor $\mathbf{r}$ é denominado *vetor de posição* da partícula no instante t.

Considere agora o vetor $\mathbf{r}'$ que define a posição P' ocupada pela mesma partícula no instante posterior $t + \Delta t$. O vetor $\Delta\mathbf{r}$ que une P e P' representa a variação do vetor de posição durante o intervalo de tempo Δt, como podemos facilmente verificar da Fig. 11.14*a*, o vetor $\mathbf{r}'$ é obtido adicionando os vetores $\mathbf{r}$ e $\Delta\mathbf{r}$ de acordo com a regra do triângulo. Notamos que $\mathbf{r}$ representa uma variação na *direção* bem como uma variação na *intensidade* do vetor de posição $\mathbf{r}$. A *velocidade média* da partícula no intervalo de tempo t é definida como o quociente de $\Delta\mathbf{r}$ e Δt. Como $\Delta\mathbf{r}$ é um vetor e Δt é um escalar, o quociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ é um vetor ligado a P, de mesma direção que $\Delta\mathbf{r}$ e de intensidade igual à intensidade de $\Delta\mathbf{r}$ dividido por Δt (Fig 11.14*b*).

A *velocidade instantânea* da partícula no instante t é obtida escolhendo-se intervalos de tempo Δt cada vez menores, e, paralelamente, incrementos vetoriais $\Delta\mathbf{r}$ cada vez menores. A velocidade instantânea é então representada pelo vetor

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \tag{11.14}$$

À medida que Δt e $\Delta\mathbf{r}$ se tornam menores, os pontos P e P' se aproximam; o vetor $\mathbf{v}$ obtido no limite deve então ser tangente à trajetória da partícula (Fig. 11.14*c*).

Como o vetor de posição $\mathbf{r}$ depende do instante t, podemos nos referir a ele como *uma função vetorial* da variável escalar t e representá-lo por $\mathbf{r}(t)$. Estendendo o conceito de derivada de uma função escalar introduzido no cálculo elementar, vamos nos referir ao limite do quociente $\Delta\mathbf{r}/\Delta t$ como a *derivada* da função vetorial $\mathbf{r}(t)$. Escrevemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

A intensidade v do vetor $\mathbf{v}$ é chamada de *velocidade escalar* da partícula. Ela pode ser obtida substituindo-se o vetor $\Delta\mathbf{r}$, na fórmula (11.14), pela intensidade desse vetor representada pelo segmento de reta PP'. Mas o comprimento do segmento PP' se aproxima do comprimento Δs do arco PP' à medida que Δt decresce (Fig. 11.14*a*), e podemos escrever

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{PP'}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

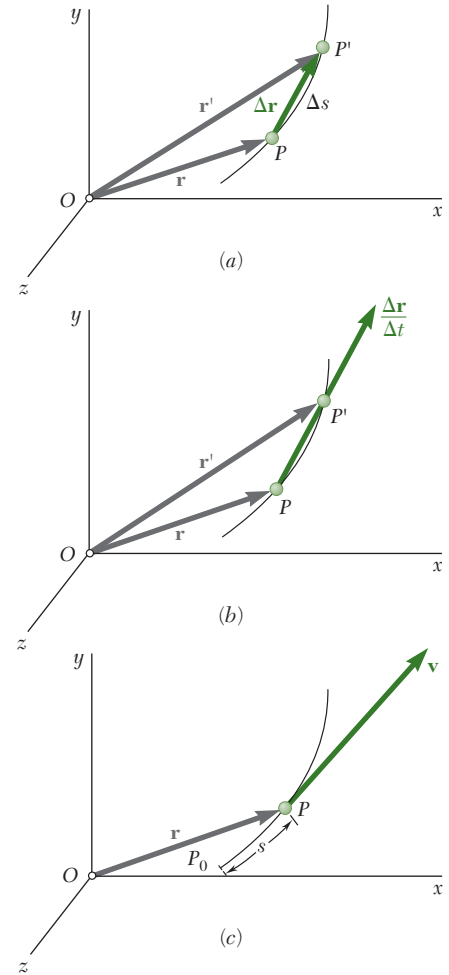



Figura 11.14

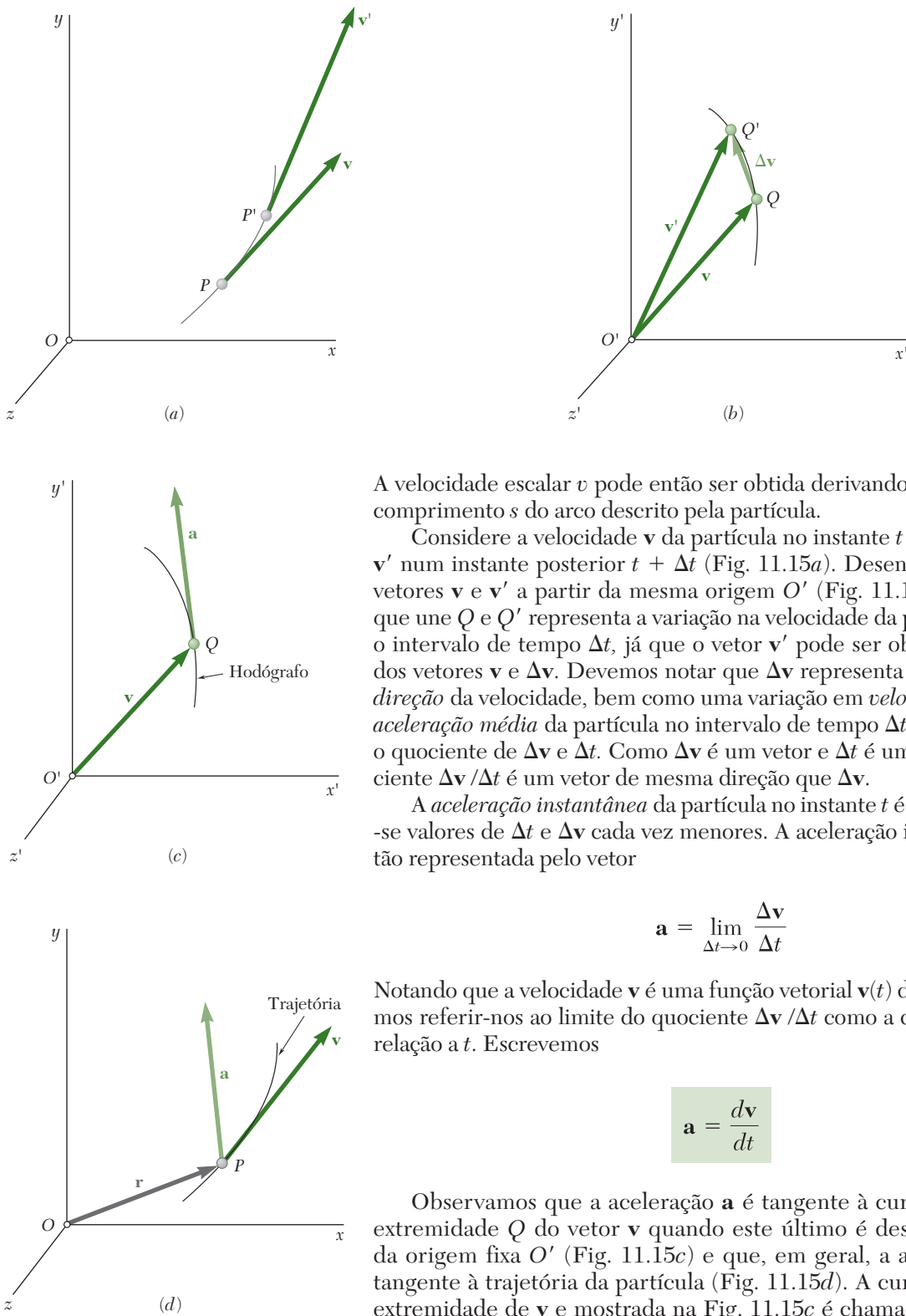



Figura 11.15

A velocidade escalar v pode então ser obtida derivando em relação a t o comprimento s do arco descrito pela partícula.

Considere a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula no instante t e sua velocidade $\mathbf{v}'$ num instante posterior $t + \Delta t$ (Fig. 11.15*a*). Desenhemos ambos os vetores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ a partir da mesma origem O' (Fig. 11.15*b*). O vetor $\Delta\mathbf{v}$ que une Q e Q' representa a variação na velocidade da partícula durante o intervalo de tempo Δt, já que o vetor $\mathbf{v}'$ pode ser obtido pela adição dos vetores $\mathbf{v}$ e $\Delta\mathbf{v}$. Devemos notar que $\Delta\mathbf{v}$ representa uma variação na *direção* da velocidade, bem como uma variação em *velocidade escalar*. A *aceleração média* da partícula no intervalo de tempo Δt é definida como o quociente de $\Delta\mathbf{v}$ e Δt. Como $\Delta\mathbf{v}$ é um vetor e Δt é uma escalar, o quociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ é um vetor de mesma direção que $\Delta\mathbf{v}$.

A *aceleração instantânea* da partícula no instante t é obtida tomando-se valores de Δt e $\Delta\mathbf{v}$ cada vez menores. A aceleração instantânea é então representada pelo vetor

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} \tag{11.17}$$

Notando que a velocidade $\mathbf{v}$ é uma função vetorial $\mathbf{v}(t)$ do tempo t, podemos referir-nos ao limite do quociente $\Delta\mathbf{v}/\Delta t$ como a derivada de $\mathbf{v}$ em relação a t. Escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

Observamos que a aceleração $\mathbf{a}$ é tangente à curva descrita pela extremidade Q do vetor $\mathbf{v}$ quando este último é desenhado a partir da origem fixa O' (Fig. 11.15*c*) e que, em geral, a aceleração *não* é tangente à trajetória da partícula (Fig. 11.15*d*). A curva descrita pela extremidade de $\mathbf{v}$ e mostrada na Fig. 11.15*c* é chamada de *hodógrafo* do movimento.

11.10 Derivadas de funções vetoriais

Vimos na seção anterior que a velocidade $\mathbf{v}$ de uma partícula em movimento curvilíneo pode ser representada pela derivada da função vetorial $\mathbf{r}(t)$, que caracteriza a posição da partícula. Da mesma forma, a aceleração $\mathbf{a}$ da partícula pode ser representada pela derivada da função vetorial $\mathbf{v}(t)$. Nesta seção, vamos dar uma definição formal da derivada de uma função vetorial e estabelecer algumas regras que determinam a derivação de somas e produtos de funções vetoriais.

Seja $\mathbf{P}(u)$ uma função vetorial da variável escalar u. Com isso queremos dizer que o escalar u define completamente a intensidade e a direção do vetor $\mathbf{P}$. Se o vetor $\mathbf{P}$ for desenhado a partir de uma origem fixa O e se o escalar u puder variar, a extremidade de $\mathbf{P}$ vai descrever uma determinada curva no espaço. Considere os vetores $\mathbf{P}$ que correspondem respectivamente, aos valores de u e $u + \Delta u$ da variável escalar (Fig. 11.16*a*). Seja $\Delta\mathbf{P}$ o vetor que une as extremidades dos dois vetores dados; escrevemos

$$\Delta\mathbf{P} = \mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)$$

Dividindo os dois lados da equação por Δu e fazendo Δu tender a zero, *definimos a derivada da função vetorial* $\mathbf{P}(u)$:

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{P}(u + \Delta u) - \mathbf{P}(u)}{\Delta u} \qquad (11.19)$$

À medida que Δu tende para zero, a linha de ação de $\Delta\mathbf{P}$ torna-se tangente à curva da Fig. 11.16*a*. Assim, a derivada $d\mathbf{P}/du$ da função vetorial $\mathbf{P}(u)$ *é tangente à curva descrita pela extremidade de* P(u) (Fig. 11.16*b*).

Figura 11.16

As regras padrão para a derivação de somas e produtos de funções escalares podem ser estendidas às funções vetoriais. Considere primeiro a *adição de duas funções vetoriais* $\mathbf{P}(u)$ e $\mathbf{Q}(u)$ da mesma variável escalar u. De acordo com a definição dada em (11.19), a derivada do vetor $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ é

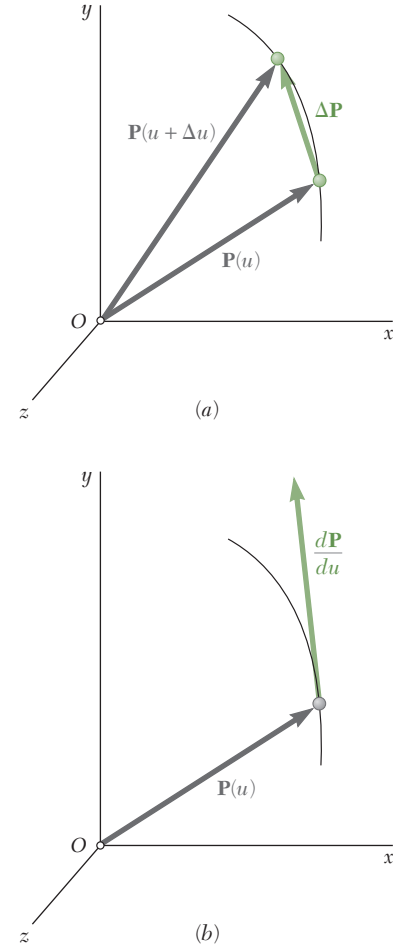
$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u}\right)$$

ou, como o limite de uma soma é igual à soma dos limites de seus termos,

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u} + \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta u}$$

$$\frac{d(\mathbf{P} + \mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du} + \frac{d\mathbf{Q}}{du} \qquad (11.20)$$

O produto de uma função escalar $f(u)$ por uma função vetorial $\mathbf{P}(u)$ da mesma variável escalar u será considerado agora. A derivada do vetor $f\mathbf{P}$ é

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{(f + \Delta f)(\mathbf{P} + \Delta\mathbf{P}) - f\mathbf{P}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta u}\mathbf{P} + f\frac{\Delta\mathbf{P}}{\Delta u}\right)$$

ou recordando as propriedades dos limites de somas e produtos

$$\frac{d(f\mathbf{P})}{du} = \frac{df}{du}\mathbf{P} + f\frac{d\mathbf{P}}{du} \tag{11.21}$$

As derivadas do *produto escalar* e do *produto vetorial* de duas funções vetoriais $\mathbf{P}(u)$ e $\mathbf{Q}(u)$ podem ser obtidas de modo análogo. Temos

$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\cdot\mathbf{Q} + \mathbf{P}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.22}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{du} = \frac{d\mathbf{P}}{du}\times\mathbf{Q} + \mathbf{P}\times\frac{d\mathbf{Q}}{du} \tag{11.23*}$$

As propriedades estabelecidas anteriormente podem ser usadas para determinar os *componentes retangulares da derivada de uma função vetorial* $\mathbf{P}(u)$. Decompondo $\mathbf{P}$ em componentes ao longo de eixos retangulares fixos x, y e z, escrevemos

$$\mathbf{P} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k} \tag{11.24}$$

onde P_x, P_y, P_z são os componentes retangulares escalares do vetor $\mathbf{P}$ e $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são os vetores unitários correspondentes, respectivamente, aos eixos x, y e z (Seção 2.12). Pela Eq. (11.20), a derivada de $\mathbf{P}$ é igual à soma das derivadas dos termos do lado direito da equação. Como cada um destes termos é o produto de um escalar por uma função vetorial, devemos usar a Eq. (11.21). Mas os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ possuem uma intensidade constante (igual a 1) e direções fixas. Suas derivadas são, portanto, iguais a zero, e escrevemos

$$\frac{d\mathbf{P}}{du} = \frac{dP_x}{du}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{du}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{du}\mathbf{k} \tag{11.25}$$

Notando que os coeficientes dos vetores unitários são, por definição, os componentes escalares do vetor $d\mathbf{P}/du$, concluímos que os *componentes retangulares escalares da derivada $d\mathbf{P}/du$ da função vetorial* $\mathbf{P}(u)$ são obtidos derivando os componentes escalares correspondentes de $\mathbf{P}$.

Taxa de variação de um vetor. Quando o vetor $\mathbf{P}$ é uma função do tempo t, sua derivada $d\mathbf{P}/dt$ representa a *taxa de variação* de $\mathbf{P}$ em relação ao sistema de referência $Oxyz$. Decompondo $\mathbf{P}$ em componentes retangulares, temos, pela Eq. (11.25),

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dP_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{dP_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{dP_z}{dt}\mathbf{k}$$

ou, usando pontos para indicar derivação em relação a t,

$$\dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k} \tag{11.25'}$$

* Como o produto vetorial não é comutativo (Seção 3.4), a ordem dos fatores na Eq. (11.23) deve ser mantida.

Como veremos na Seção 15.10, a taxa de variação de um vetor, quando observado de um *sistema de referência em movimento* é em geral diferente da sua taxa de variação quando observado de um sistema de referência fixo. Entretanto, se o sistema $O'x'y'z'$ estiver em *translação,* isto é, se seus eixos permanecem paralelos aos eixos correspondentes do sistema de referência fixo $Oxyz$ (Fig. 11.17), os mesmos vetores unitários **i**, **j**, **k** são usados em ambos os sistemas, e em qualquer instante dado o vetor **P** tem os mesmos componentes P_x, P_y, P_z, em ambos os sistemas de referência. Segue-se da equação (11.25′) que a taxa de variação de **P** é a mesma em relação aos sistemas $Oxyz$ e $O'x'y'z'$. Estabelecemos, portanto: *A taxa de variação de um vetor é a mesma em relação a um sistema fixo e a um sistema em translação.* Esta propriedade vai simplificar muito nosso trabalho, já que trataremos principalmente de sistemas em translação.

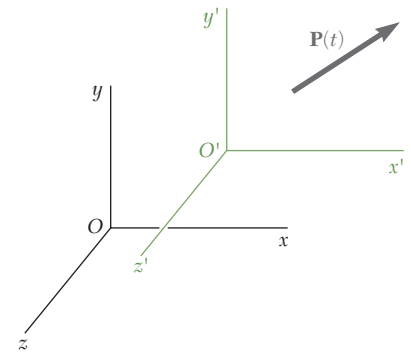



Figura 11.17

11.11 Componentes retangulares de velocidade e aceleração

Quando a posição de uma partícula P for definida em qualquer instante por suas coordenadas retangulares x, y e z, é conveniente decompor a velocidade **v** e a aceleração **a** dessa partícula em componentes retangulares (Fig. 11.18).

Decompondo o vetor de posição **r** da partícula em componentes retangulares, escrevemos

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{11.26}$$

onde as coordenadas, x, y e z são funções de t. Derivando duas vezes, obtemos

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.27}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.28}$$

onde $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ e $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$ representam, respectivamente, as primeira e segunda derivadas de x, y e z em relação a t. Segue-se de (11.27) e (11.28) que os componentes escalares da velocidade e aceleração são

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$

$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Um valor positivo para v_x indica que o componente vetorial $\mathbf{v}_x$ está dirigido para a direita, e um valor negativo indica que ele está dirigido para a esquerda. O sentido de cada um dos outros componentes vetoriais pode ser determinado de modo semelhante a partir do sinal do componente escalar correspondente. Se desejado, as intensidades e direções da velocidade e aceleração podem ser obtidas a partir de seus componentes escalares pelos métodos das Seções 2.7 e 2.12.

O uso de componentes retangulares para descrever a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula é particularmente eficaz quando o componente a_x da aceleração depende somente de t, x e/ou v_x, e quando, da mesma forma, a_y depende somente de t, y e/ou v_y, e a_z de t, z e/ou v_z. As Eqs. (11.30) podem então ser integradas independentemente,

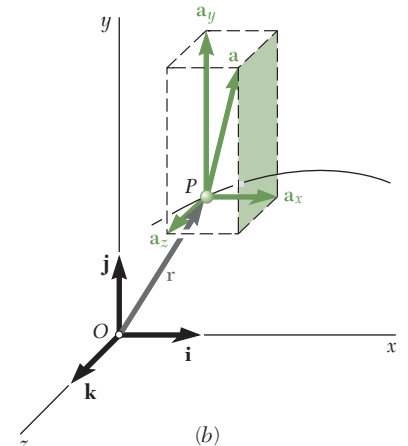
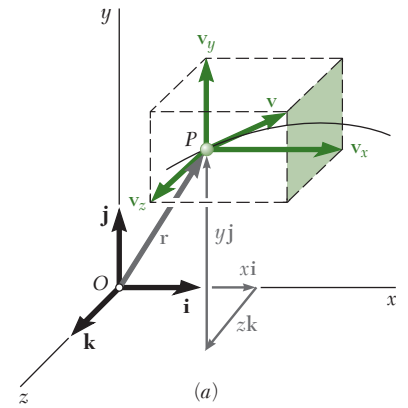



Figura 11.18

Foto 11.3 O movimento deste praticante de *snowboard* no ar será uma parábola, considerando que nos possamos desprezar a resistência do ar.

(*a*) Movimento de um projétil

(*b*) Movimentos retilíneos equivalentes

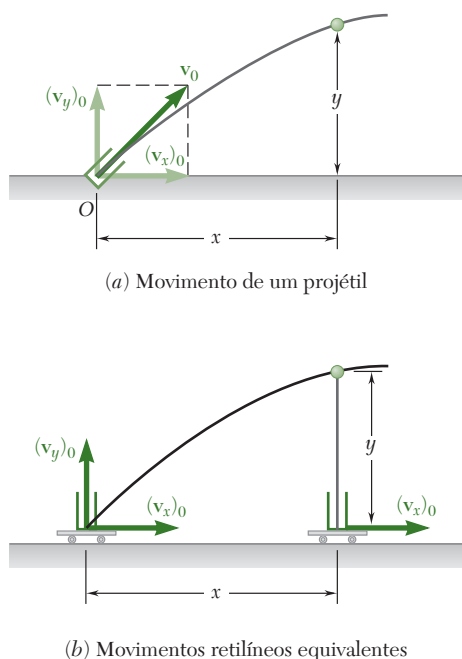



Figura 11.19

e desta forma também as Eqs. (11.29). Em outras palavras, o movimento da partícula na direção x, seu movimento na direção y, e seu movimento na direção z podem ser estudados separadamente.

No caso do *movimento de um projétil*, por exemplo, pode-se mostrar (ver Seção 12.5) que os componentes da aceleração são

$$a_x = \ddot{x} = 0 \qquad a_y = \ddot{y} = -g \qquad a_z = \ddot{z} = 0$$

se a resistência do ar for desprezada. Representando por x_0, y_0 e z_0 as coordenadas de uma arma e por $(v_x)_0$, $(v_y)_0$ e $(v_z)_0$ os componentes da velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ do projétil (uma bala), integramos duas vezes em t e obtemos

$$\begin{array}{lll} v_x = \dot{x} = (v_x)_0 & v_y = \dot{y} = (v_y)_0 - gt & v_z = \dot{z} = (v_z)_0 \\ x = x_0 + (v_x)_0 t & y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & z = z_0 + (v_z)_0 t \end{array}$$

Se o projétil é disparado no plano xy a partir da origem O, temos $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ e $(v_z)_0 = 0$, e as equações de movimento se reduzem

$$\begin{array}{lll} v_x = (v_x)_0 & v_y = (v_y)_0 - gt & v_z = 0 \\ x = (v_x)_0 t & y = (v_y)_0 t - \frac{1}{2}gt^2 & z = 0 \end{array}$$

Essas equações mostram que o projétil permanece no plano xy, que seu movimento na direção horizontal é uniforme e que seu movimento na direção vertical é uniformemente acelerado. O movimento de um projétil pode então ser substituído por dois movimentos retilíneos independentes, que são facilmente visualizados se assumirmos que o projétil é disparado verticalmente com uma velocidade inicial $(\mathbf{v}_y)_0$ a partir de uma plataforma que se desloca com uma velocidade horizontal constante $(\mathbf{v}_x)_0$ (Fig. 11.19). A coordenada x do projétil é igual, em qualquer instante, à distância percorrida pela plataforma, e sua coordenada y pode ser calculada como se o projétil estivesse se deslocando ao longo de uma linha vertical.

Pode-se observar que as equações que definem as coordenadas x e y de um projétil em um instante qualquer são as equações paramédicas de uma parábola. Dessa forma, a trajetória de um projétil é *parabólico*. Esse resultado, entretanto, deixa de ser válido quando a resistência do ar ou a variação da aceleração da gravidade com a altitude forem levadas em conta.

11.12 Movimento relativo a um sistema de referência em translação

Na seção anterior, um único sistema de referência foi usado para descrever o movimento de uma partícula. Na maioria dos casos, esse sistema estava preso à Terra e era considerado como fixo. Situações nas quais é conveniente usar vários sistemas de referência simultaneamente serão agora analisadas. Se um desses sistemas estiver preso à Terra, ele será chamado de *sistema de referência fixo*, e os demais sistemas serão denominados *sistemas dc referência móveis.* Deve-se entender, entretanto, que a seleção de um sistema de referência fixo é puramente arbitrária. Qualquer sistema poderá ser designado como "fixo"; todos os demais sistemas não ligados rigidamente a este sistema serão descritos como "móveis".

Considere duas partículas A e B que se movem no espaço (Fig. 11.20). Os vetores $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ definem as suas posições em qualquer instante dado com relação ao sistema de referência fixo $Oxyz$. Considere agora um sistema de eixos x', y' e z' centrado em A e paralelo aos eixos x, y e z. Enquanto a origem desses eixos se desloca, suas orientações permanecem as mesmas; o sistema de referência $Ax'y'z'$ está em *translação* em relação à $Oxyz$. O vetor $\mathbf{r}_{B/A}$ que une A e B define *a posição de B relativa ao sistema móvel* $Ax'y'z'$ (ou, simplesmente, *a posição de B relativa a A*).

Figura 11.20

Notamos a partir da Fig. 11.20 que o vetor de posição $\mathbf{r}_B$ da partícula B é a soma do vetor de posição $\mathbf{r}_A$ da partícula A com o vetor de posição $\mathbf{r}_{B/A}$ de B relativo a A; logo

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Derivando (11.31) em relação a t, no sistema de referência fixo, e usando pontos para indicar derivadas em relação ao tempo, temos

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A} \tag{11.32}$$

As derivadas $\dot{\mathbf{r}}_A$ e $\dot{\mathbf{r}}_B$ representam, respectivamente, as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ das partículas A e B. Como $Ax'y'z'$ está em translação, a derivada $\dot{\mathbf{r}}_{B/A}$ representa a taxa de variação de $\mathbf{r}_{B/A}$ em relação ao sistema $Ax'y'z'$, bem como em relação ao referencial fixo (Seção 11.10). Essa derivada, portanto, define *a velocidade* $\mathbf{v}_{B/A}$ *de B em relação ao referencial* $Ax'y'z'$ (ou, resumindo, *a velocidade* $\mathbf{v}_{B/A}$ *de B em relação a A*). Escrevemos

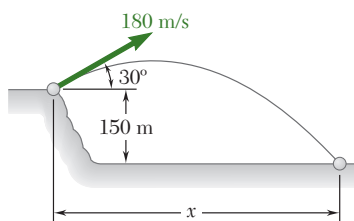
Foto 11.4 O piloto do helicóptero deve levar em conta o movimento relativo do navio quando aterrissar.

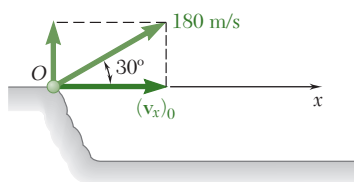
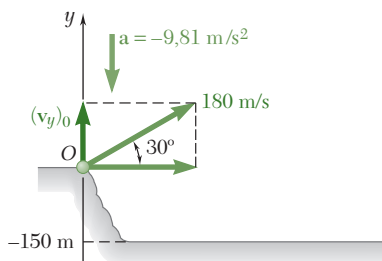
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

Derivando a Eq. (11.33) em relação a t, e usando a derivada $\dot{\mathbf{v}}_{B/A}$ para definir *a aceleração* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B em relação ao referencial* $Ax'y'z'$ (ou, simplesmente, *a aceleração* $\mathbf{a}_{B/A}$ *de B em relação a A*), escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

O movimento de B em relação ao referencial fixo $Oxyz$ é denominado *movimento absoluto de B*. As equações deduzidas nesta seção mostram que *o movimento absoluto de B pode ser obtido pela combinação do movimento de A e do movimento relativo de B em relação ao referencial móvel preso em A*. A Eq. (11.33), por exemplo, expressa que a velocidade absoluta $\mathbf{v}_B$ da partícula B pode ser obtida pela adição vetorial da velocidade de A com a velocidade de B relativa ao referencial $Ax'y'z'$. A Eq. (11.34) expressa uma propriedade semelhante em termos das acelerações*. Devemos ter em mente, entretanto, que o *sistema $Ax'y'z'$ está em translação;* isto é, enquanto ele se move com A, ele mantém a mesma orientação. Como veremos (Seção 15.14), relações diferentes devem ser usadas no caso de um sistema de referência em rotação.

* Observe que o produto dos subscritos A e B/A usados no membro do lado direito das Eqs. (11.31) a (11.34) é igual ao subscrito B usado no membro do lado esquerdo dessas equações.

PROBLEMA RESOLVIDO 11.7

Um projétil é disparado da extremidade de um rochedo de 150 m de altura, com uma velocidade inicial de 180 m/s, em um ângulo de 30° com a horizontal. Desprezando a resistência do ar, encontre (*a*) a distância horizontal da arma até o ponto onde o projétil atinge o solo, e (*b*) a altura máxima em relação ao solo alcançada pelo projétil.

SOLUÇÃO

O movimento vertical e o horizontal serão considerados separadamente.

Movimento vertical. Movimento uniformemente acelerado. Escolhendo o sentido positivo do eixo y para cima e colocando a origem O na arma, temos

$$(v_y)_0 = (180 \text{ m/s}) \text{ sen } 30° = +90 \text{ m/s}$$
$$a = -9{,}81 \text{ m/s}^2$$

Substituindo nas equações de movimento uniformemente acelerado, temos

$$v_y = (v_y)_0 + at \qquad v_y = 90 - 9{,}81t \qquad (1)$$
$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = 90t - 4{,}90t^2 \qquad (2)$$
$$v_y^2 = (v_y)_0^2 + 2ay \qquad v_y^2 = 8.100 - 19{,}62y \qquad (3)$$

Movimento horizontal. Movimento uniforme. Escolhendo o sentido positivo do eixo x para a direita, temos

$$(v_x)_0 = (180 \text{ m/s}) \cos 30° = +155{,}9 \text{ m/s}$$

Substituindo na equação de movimento uniforme, obtemos

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = 155{,}9t \qquad (4)$$

a. Distância horizontal. Quando o projétil atinge o solo, temos

$$y = -150 \text{ m}$$

Levando esse valor para a Eq. (2) do movimento vertical, escrevemos

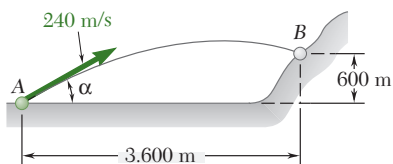
$$-150 = 90t - 4{,}90t^2 \qquad t^2 - 18{,}37t - 30{,}6 = 0 \qquad t = 19{,}91 \text{ s}$$

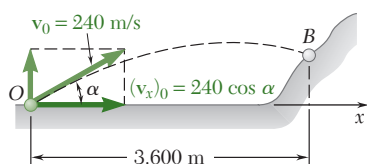
Levando $t = 19{,}91$ s na Eq. (4) do movimento horizontal, obtemos

$$x = 155{,}9(19{,}91) \qquad x = 3.100 \text{ m} \quad ◀$$

b. Máxima elevação. Quando o projétil atinge sua elevação máxima, temos $v_y = 0$; levando este valor à Eq. (3) do movimento vertical, escrevemos

$$0 = 8.100 - 19{,}62y \qquad y = 413 \text{ m}$$

Elevação máxima acima do solo = 150 m + 413 m = 563 m ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 11.8

Um projétil é disparado com uma velocidade inicial de 240 m/s contra um alvo B situado a 600 m acima da arma A e a uma distância horizontal de 3.600 m. Desprezando a resistência do ar, determine o valor do ângulo de disparo α.

SOLUÇÃO

Os movimentos horizontal e vertical serão considerados separadamente.

Movimento horizontal. Colocando a origem dos eixos coordenados na arma, temos

$$(v_x)_0 = 240 \cos \alpha$$

Substituindo na equação de movimento horizontal uniforme, obtemos

$$x = (v_x)_0 t \qquad x = (240 \cos \alpha)t$$

O tempo necessário para que o projétil percorra uma distância horizontal de 3.600 m é obtido fazendo x igual a 3.600 m.

$$3.600 = (240 \cos \alpha)t$$
$$t = \frac{3.600}{240 \cos \alpha} = \frac{15}{\cos \alpha}$$

Movimento vertical

$$(v_y)_0 = 240 \text{ sen } \alpha \qquad a = -9,81 \text{ m/s2}$$

Substituindo na equação de movimento vertical uniformemente acelerado, obtemos

$$y = (v_y)_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \qquad y = (240 \text{ sen } \alpha)t - 4,905t^2$$

O projétil atinge o alvo. Quando $x = 3.600$ m, devemos ter $y = 600$ m. Substituindo y e fazendo t igual ao valor encontrado anteriormente, escrevemos

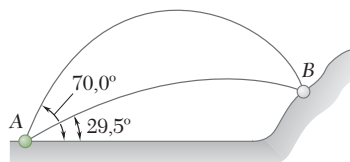
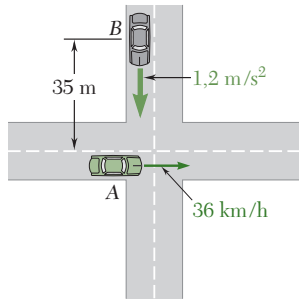
$$600 = 240 \text{ sen } \alpha \frac{15}{\cos \alpha} - 4,905\left(\frac{15}{\cos \alpha}\right)^2$$

Como $1/\cos^2 \alpha = \sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha$, temos

$$600 = 240(15) \text{ tg } \alpha - 4,905(15^2)(1 + \text{tg}^2 \alpha)$$
$$1.104 \text{ tg}^2 \alpha - 3.600 \text{ tg } \alpha + 1.704 = 0$$

Resolvendo essa equação quadrática para tg α, temos

$$\text{tg } \alpha = 0,575 \qquad \text{e} \qquad \text{tg } \alpha = 2,69$$

$$\alpha = 29,9° \quad \text{e} \quad \alpha = 69,6° \quad ◀$$

O alvo será atingido se qualquer um dos dois ângulos de tiro for utilizado (ver figura).

PROBLEMA RESOLVIDO 11.9

O automóvel A está trafegando para leste com uma velocidade constante de 36 km/h. Quando ele passa pelo cruzamento mostrado na figura, o automóvel B parte do repouso a 35 m ao norte do cruzamento e se dirige para o sul com uma aceleração constante de 1,2 m/s². Determine a posição, velocidade e aceleração de B relativas a A 5 s depois de A ter passado pelo cruzamento.

SOLUÇÃO

Escolhemos os eixos x e y com origem no cruzamento das duas ruas e com sentidos positivos dirigidos, respectivamente, para leste e norte.

Movimento do automóvel *A*. Primeiro, a velocidade é expressa em m/s:

$$v_A = \left(36\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right) = 10 \text{ m/s}$$

Notando que o movimento de A é uniforme, escrevemos, para qualquer instante t,

$$a_A = 0$$
$$v_A = +10 \text{ m/s}$$
$$x_A = (x_A)_0 + v_A t = 0 + 10t$$

Para $t = 5$ s, temos

$$a_A = 0 \qquad \mathbf{a}_A = 0$$
$$v_A = +10 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_A = 10 \text{ m/s} \rightarrow$$
$$x_A = +(10 \text{ m/s})(5 \text{ s}) = +50 \text{ m} \qquad \mathbf{r}_A = 50 \text{ m} \rightarrow$$

Movimento do automóvel *B*. Notamos que o movimento de B é uniformemente acelerado e escrevemos

$$a_B = -1{,}2 \text{ m/s}^2$$
$$v_B = (v_B)_0 + at = 0 - 1{,}2\,t$$
$$y_B = (y_B)_0 + (v_B)_0 t + \tfrac{1}{2}a_B t^2 = 35 + 0 - \tfrac{1}{2}(1{,}2)t^2$$

Para $t = 5$ s, temos

$$a_B = -1{,}2 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_B = 1{,}2 \text{ m/s}^2 \downarrow$$
$$v_B = -(1{,}2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s}) = -6 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_B = 6 \text{ m/s} \downarrow$$
$$y_B = 35 - \tfrac{1}{2}(1{,}2 \text{ m/s}^2)(5 \text{ s})^2 = +20 \text{ m} \qquad \mathbf{r}_B = 20 \text{ m} \uparrow$$

Movimento de *B* em relação a *A*. Desenhamos o triângulo correspondente à equação vetorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ e obtemos a intensidade e direção do vetor de posição de B em relação a A.

$$r_{B/A} = 53{,}9 \text{ m} \qquad \alpha = 21{,}8° \qquad \mathbf{r}_{B/A} = 53{,}9 \text{ m} \nwarrow 21{,}8° \quad ◀$$

Procedendo de maneira semelhante, encontramos a velocidade e aceleração de B em relação a A.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$v_{B/A} = 11{,}66 \text{ m/s} \qquad \beta = 31{,}0° \qquad \mathbf{v}_{B/A} = 11{,}66 \text{ m/s} \swarrow 31{,}0° \quad ◀$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 1{,}2 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta seção, você vai analisar o *movimento bi e tridimensional* de uma partícula. Apesar de as interpretações físicas da velocidade e da aceleração serem as mesmas que nas primeiras lições deste capítulo, você deve se lembrar de que essas quantidades são vetores. Além do mais, você deve compreender, a partir de suas experiências com vetores em estática, que é frequentemente vantajoso expressar os vetores de posição, velocidades e acelerações em termos de seus componentes escalares retangulares [Eqs. (11.27) e (11.28)]. Além disso, dados dois vetores **A** e **B**, recorde que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0$ se **A** e **B** forem perpendiculares entre si, enquanto $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = 0$ se **A** e **B** forem paralelos.

A. Analisando o movimento de um projétil. Vários dos problemas a seguir tratam do movimento bidimensional de um projétil, em que a resistência do ar pode ser desprezada. Na Seção 11.11, desenvolvemos as equações que descrevem esse tipo de movimento e observamos que o componente horizontal da velocidade permanecia constante (movimento uniforme), enquanto o componente vertical da aceleração era constante (movimento uniformemente acelerado). Foi possível considerar separadamente os movimentos vertical e horizontal da partícula. Assumindo que o projétil é atirado da origem, podemos escrever as duas equações

$$x = (v_x)_0 t \qquad y = (v_y)_0 t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

1. Se a velocidade inicial e o ângulo de tiro são conhecidos, o valor de y correspondente a qualquer valor dado de x (ou o valor de x para qualquer valor de y) pode ser obtido resolvendo-se uma das equações anteriores para t e substituindo t na outra equação [Problema Resolvido 11.7].

2. Se a velocidade inicial e as coordenadas de um ponto da trajetória são conhecidas e você quer *determinar o ângulo de tiro* α, comece sua solução expressando os componentes $(v_x)_0$ e $(v_y)_0$ da velocidade inicial como funções do ângulo α. Essas expressões e os valores conhecidos de x e y são então substituídos nas equações anteriores. Finalmente, resolva a primeira equação para t e substitua esse valor de t na segunda equação para obter uma equação trigonométrica em α, que você pode resolver para essa incógnita [Problema Resolvido 11.8].

(*continua*)

B. Resolvendo problemas de movimento relativo de translação bidimensional. Você viu na Seção 11.12 que o movimento absoluto de uma partícula *B* pode ser obtido combinando-se o movimento de uma partícula *A* e o *movimento relativo* de *B* em relação a um sistema de referência preso a *A* que está em *translação.* A velocidade e aceleração de *B* podem então ser expressas como mostrado nas Eqs. (11.33) e (11.34), respectivamente.

1. Para visualizar o movimento relativo de B em relação a A, imagine que você está preso à partícula *A* enquanto observa o movimento da partícula *B.* Por exemplo, para um passageiro no automóvel *A* do Problema Resolvido 11.9, o automóvel *B* parece estar andando em uma direção sudoeste (*sul* deve ser óbvio; e *oeste* é devido ao fato de que o automóvel *A* está se movendo para o leste – o automóvel *B* parece então estar se deslocando para oeste). Note que essa conclusão é consistente com a direção de $\mathbf{v}_{B/A}$.

2. Para resolver um problema de movimento relativo, escreva primeiro as equações vetoriais (11.31), (11.33) e (11.34), que se referem aos movimentos das partículas *A* e *B.* Você pode então usar um dos dois métodos a seguir:

a. Construa os triângulos de vetores correspondentes e os resolva para o vetor de posição, velocidade e aceleração desejada [Problema Resolvido 11.9].

b. Expresse todos os vetores em termos de seus componentes retangulares e resolva os dois conjuntos independentes de equações escalares obtidos dessa maneira. Se você escolher este método, não se esqueça de selecionar o mesmo sentido positivo para o deslocamento, velocidade e aceleração de cada partícula.

PROBLEMAS

11.89 O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = 4t^3 - 5t^2 + 5t$ e $y = 5t^2 - 15t$, onde x e y são expressos em milímetros e t é expresso em segundos. Determine a velocidade e a aceleração quando (*a*) $t = 1$ s, (*b*) $t = 2$ s.

11.90 O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = 2 \cos \pi t$ e $y = 1 - 4 \cos 2\pi t$, onde x e y são expressos em metros e t é expresso em segundos. Mostre que a trajetória da partícula é parte da parábola mostrada, e determine a velocidade e a aceleração quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 1{,}5$ s.

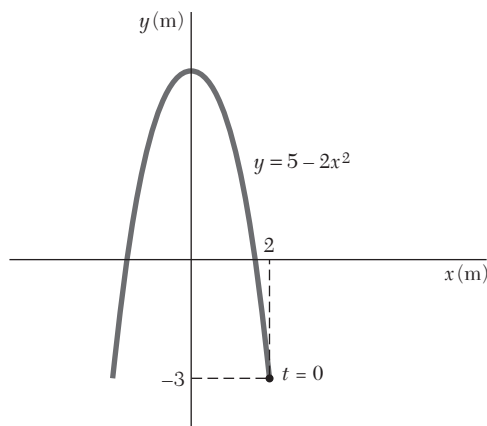



Figura P11.90

11.91 O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = t^2 - 8t + 7$ e $y = 0{,}5t^2 + 2t - 4$, onde x e y são expressos em metros e t em segundos. Determine (*a*) a intensidade da menor velocidade atingida pela partícula, (*b*) os instantes de tempo, posição e direção correspondentes à velocidade.

11.92 O movimento de uma partícula é definido pelas equações $x = 4t - 2 \text{ sen } t$ e $y = 4 - 2 \cos t$, onde x e y são expressos em milímetros e t é expresso em segundos. Esboce a trajetória da partícula e determine (*a*) as intensidades da menor e da maior velocidade atingida pela partícula, (*b*) os instantes de tempo, posição e direção correspondentes à velocidade.

11.93 O movimento de uma partícula está definido pelo vetor de posição $\boldsymbol{r} = A(\cos t + t \text{ sen } t)\mathbf{i} + A(\text{sen } t - t \cos t)\mathbf{j}$, onde t é expresso em segundos. Determine os valores de t para os quais o vetor de posição e o vetor de aceleração são (*a*) perpendiculares e (*b*) paralelos.

Figura *P11.93*

11.94 O movimento amortecido de uma partícula que vibra é definido pelo vetor de posição $\boldsymbol{r} = x_1(1 - 1/(t + 1))\mathbf{i} + (y_1 e^{-\pi t/2} \cos 2\pi t)\mathbf{j}$, onde t é expresso em segundos. Para $x_1 = 30$ mm e $y_1 = 20$ mm, determine a posição, a velocidade e a aceleração da partícula quando (*a*) $t = 0$ e (*b*) $t = 1{,}5$ s.

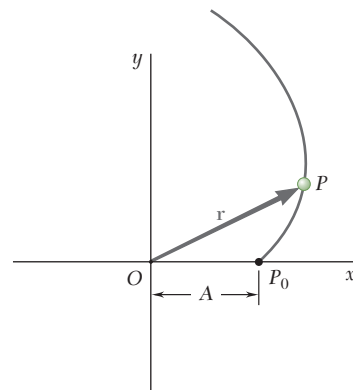
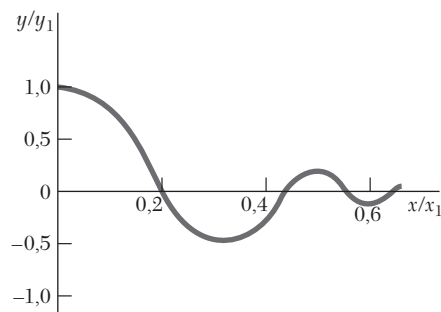



Figura P11.94

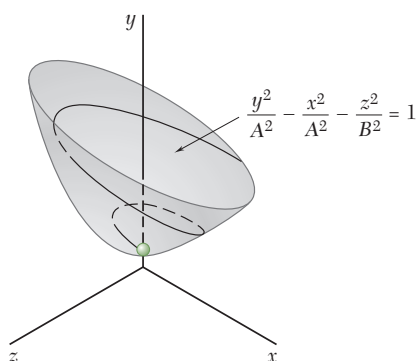



Figura P11.96

11.95 O movimento tridimensional de uma partícula é definido pelo vetor de posição $\mathbf{r} = (Rt \cos \omega_n t)\mathbf{i} + ct\mathbf{j} + (Rt \operatorname{sen} \omega_n t)\mathbf{k}$. Determine as intensidades da velocidade e aceleração da partícula. (A curva espacial descrita pela partícula é uma hélice cônica.)

***11.96** O movimento tridimensional de uma partícula é definido pelo vetor de posição $\mathbf{r} = (At \cos t)\mathbf{i} + (A\sqrt{t^2 + 1})\mathbf{j} + (Bt \operatorname{sen} t)\mathbf{k}$, onde r e t estão expressos em metros e segundos, respectivamente. Mostre que a curva descrita pela partícula cai sobre o hiperboloide $(y/A)^2 - (x/A)^2 - (z/B)^2 = 1$. Para $A = 3$ e $B = 1$, determine (*a*) as intensidades da velocidade e aceleração quando $t = 0$ e (*b*) o menor valor de t diferente de zero para o qual o vetor de posição e o vetor de velocidade são perpendiculares entre si.

11.97 Um aeroplano usado para jogar água sobre um incêndio florestal está voando horizontalmente em linha reta a 315 km/h a uma altitude de 80 m. Determine a distância d na qual o piloto deverá liberar a água tal que ela atinja o fogo em B.

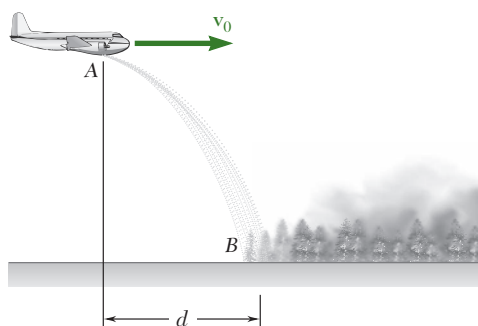



Figura P11.97

11.98 Três crianças estão jogando bolas de neve umas nas outras. A criança A joga uma bola de neve com velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$. Se a bola de neve passa sobre a cabeça da criança B e atinge a criança C, determine (*a*) o valor de v_0, (*b*) a distância d.

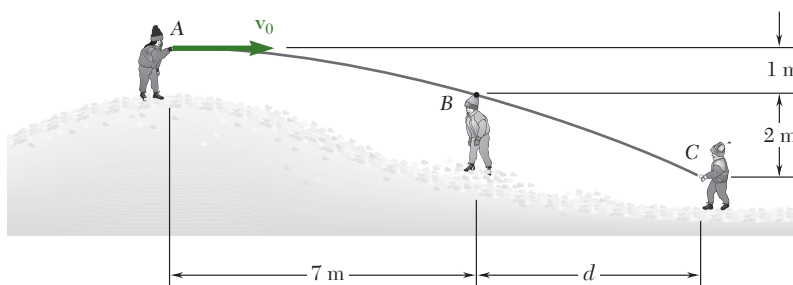



Figura P11.98

11.99 Durante a entrega de jornais, uma garota joga um jornal com uma velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$. Determine o intervalo de valores de v_0 para que o jornal caia entre os pontos B e C.

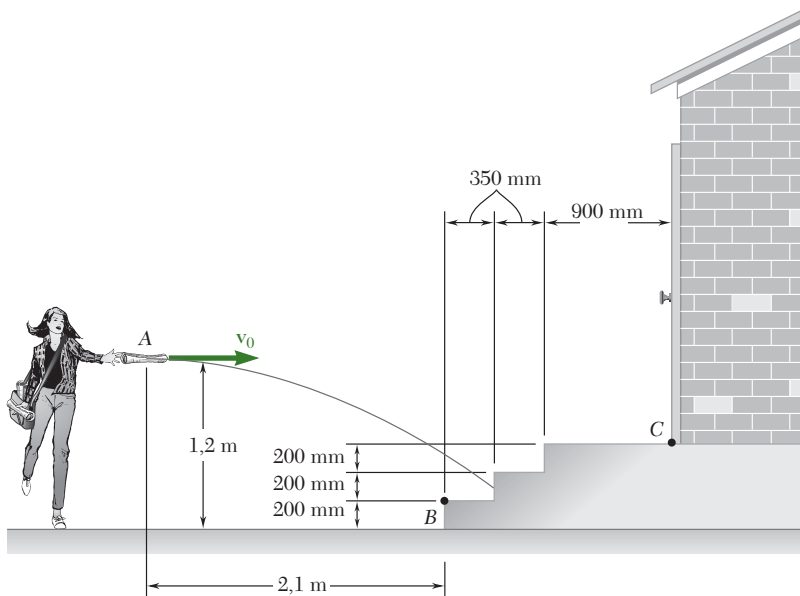



Figura P11.99

11.100 Uma máquina que lança bolas de beisebol a uma velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$. Sabendo que a altura h varia entre 0,8 m e 1 m, determine (a) o intervalo de valores de v_0, (b) os valores de α correspondentes a h = 0,8 m e h = 1 m

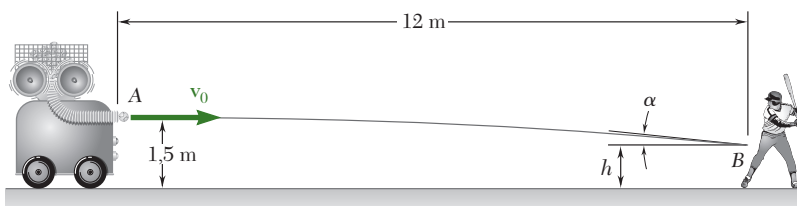



Figura P11.100

11.101 Um jogador de vôlei lança uma bola com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de intensidade 13,40 m/s com um ângulo de 20° com a horizontal. Determine (a) se a bola raspará o topo da rede, (b) quão longe da rede a bola cairá.

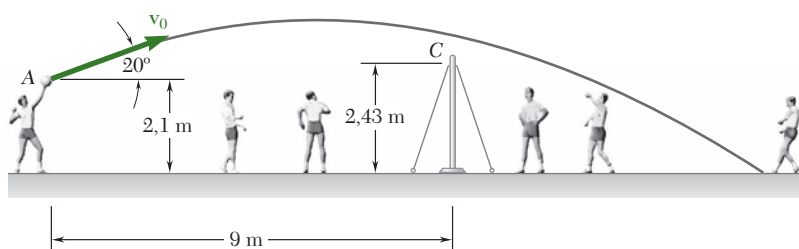



Figura P11.101

11.102 O leite é derramado no copo de vidro com altura de 140 mm e com diâmetro interno de 66 mm. Se a velocidade inicial do leite é 1,2 m/s em um ângulo de 40° com a horizontal, determine o intervalo de valores de altura h para o qual o leite cairá dentro do copo.

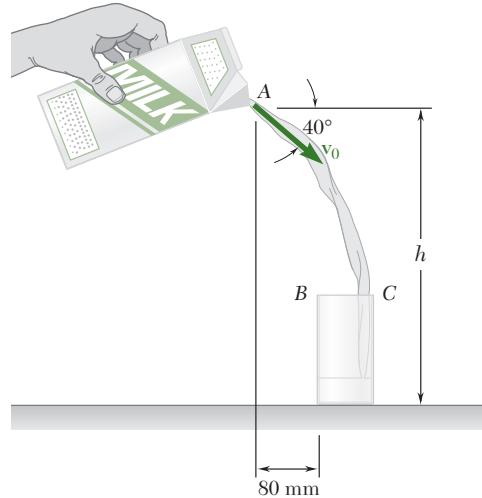



Figura P11.102

11.103 Um golfista bate em uma bola de golfe com velocidade inicial de 48 m/s a um ângulo de 25° com a horizontal. Sabendo que o campo de golfe se inclina para baixo em um ângulo médio de 5°, determine a distância d entre o golfista e o ponto B onde a bola cai primeiro.

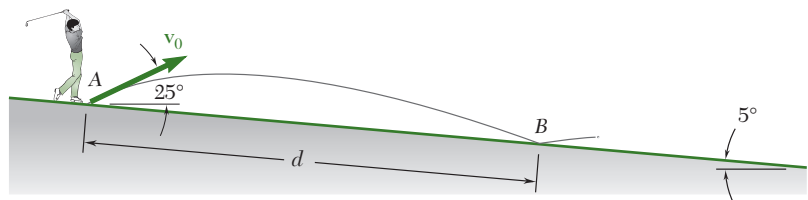



Figura *P11.103*

11.104 A água flui de um tubo de drenagem com uma velocidade inicial de 0,75 m/s a um ângulo de 15° com a horizontal. Determine o intervalo de valores da distância d para o qual a água entrará na tina BC.

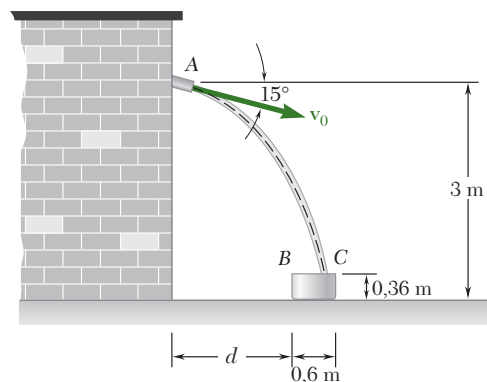



Figura *P11.104*

11.105 A areia é descarregada em A pela correia transportadora e cai no topo de uma pilha em B. Sabendo que a correia transportadora forma uma ângulo de 20° com a horizontal, determine a velocidade v_0 da correia.

Figura P11.105

11.106 Uma jogadora de basquete arremessa a bola a 5 m da tabela. Sabendo que a bola tem uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ em um ângulo de 30° com a horizontal, determine o valor de v_0 quando d é igual a (*a*) 0,2 m e (*b*) 0,38 m.

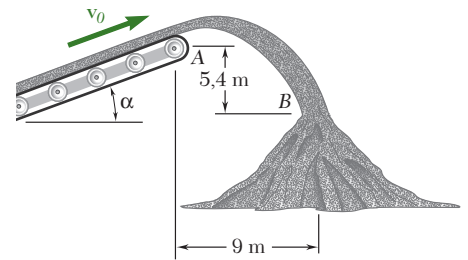
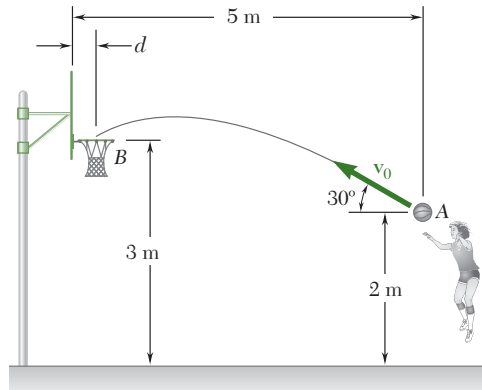



Figura P11.106

11.107 Um grupo de crianças atira bolas através da abertura interna de um pneu, com diâmetro de 0,72 m, que está pendurado em uma árvore. Uma delas atira uma bola com velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ e ângulo de 3° com a horizontal. Determine o intervalo de valores de v_0 que fará com que a bola atravesse o pneu.

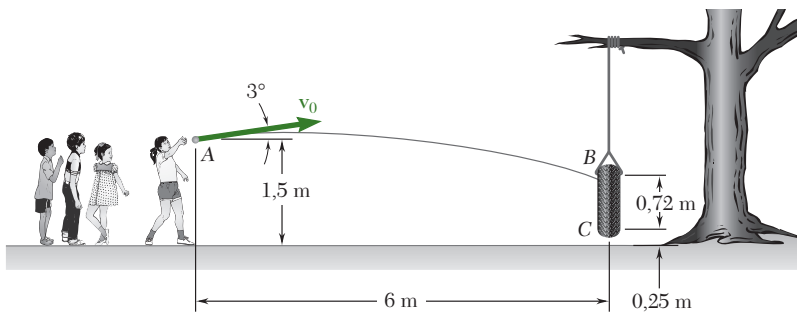



Figura P11.107

11.108 O bocal em A descarrega água de refrigeração com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ a um ângulo de 6° com a horizontal sobre um esmeril de 350 mm de diâmetro. Determine o intervalo de valores da velocidade inicial para o qual a água vai cair no esmeril entre os pontos B e C.

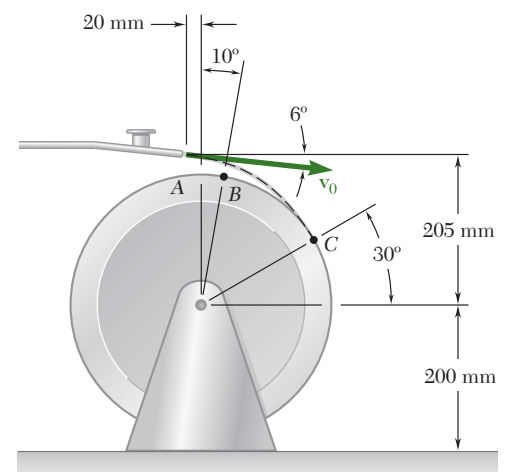



Figura P11.108

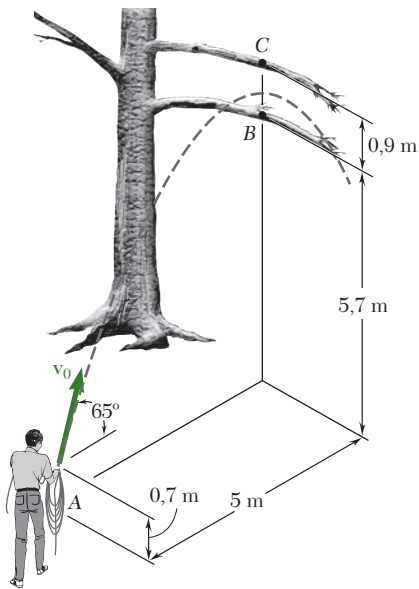



Figura *P11.109*

11.109 Enquanto segura uma das extremidades, o trabalhador lança um rolo de corda sobre o galho mais baixo da árvore. Se ele joga a corda com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ a um ângulo de 65° com a horizontal, determine a variação de valores de v_0 para que a corda passe apenas sobre o galho mais baixo.

11.110 Uma bola é solta sobre um degrau no ponto A e quica com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ a um ângulo de 15° com a vertical. Determine o valor de v_0 sabendo que, no instante imediatamente anterior ao da bola quicar no ponto B, sua velocidade v_B forma um ângulo de 12° com a vertical.

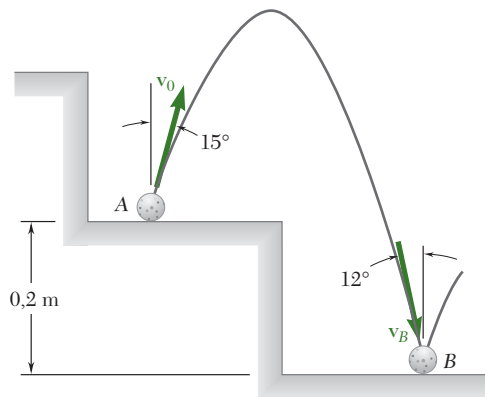



Figura *P11.110*

11.111 Um modelo de foguete é lançado do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de 75 m/s. Se o paraquedas de descida do foguete não se abre e o foguete cai a 120 m de A, determine (*a*) o ângulo α que $\mathbf{v}_0$ forma com a vertical, (*b*) a altura máxima acima do ponto A, (*c*) a duração do voo.

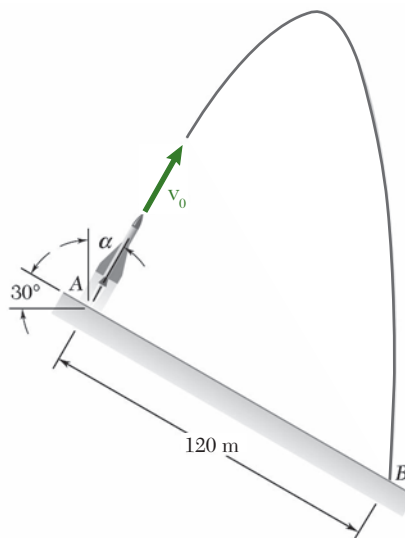



Figura P11.111

11.112 A velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de um disco de *hockey* é de 168 km/h. Determine (*a*) o maior valor (menor que 45°) do ângulo α que o disco entrará na rede e (*b*) o tempo correspondente necessário para o disco atingir a rede.

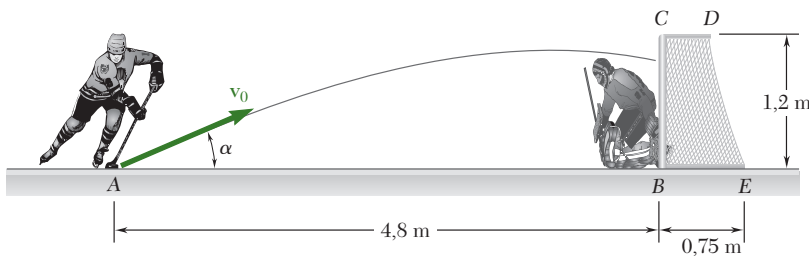



Figura P11.112

11.113 A lançadora de um jogo de *softball* arremessa uma bola com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de 72 km/h a um ângulo α com a horizontal. Se a altura da bola no ponto *B* é de 0,68 m, determine (*a*) o ângulo α, (*b*) o ângulo θ que a velocidade da bola forma com a horizontal no ponto *B*.

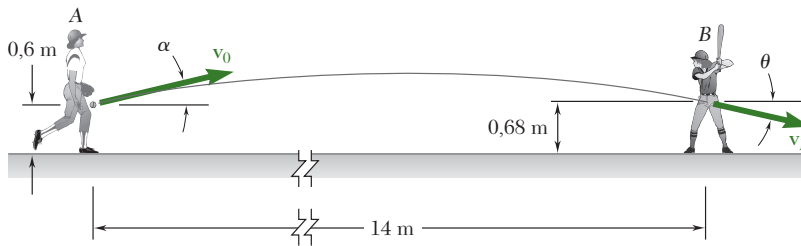



Figura P11.113

***11.114** Um alpinista planeja pular de *A* para *B* sobre uma fenda. Determine o menor valor da velocidade inicial do alpinista $\mathbf{v}_0$ e o valor correspondente do ângulo α para que ele caia em *B*.

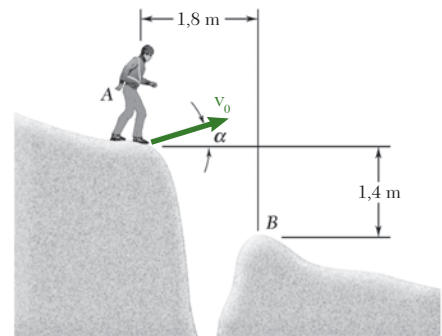



Figura P11.114

11.115 Um irrigador oscilante de jardim, que lança um jato de água com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de 8 m/s, é usado para irrigar uma horta. Determine a distância *d* para o ponto mais afastado *B* que será irrigado e o ângulo α correspondente quando (*a*) os vegetais estiverem apenas começando a crescer e (*b*) a altura *h* de um pé de milho for de 1,8 m.

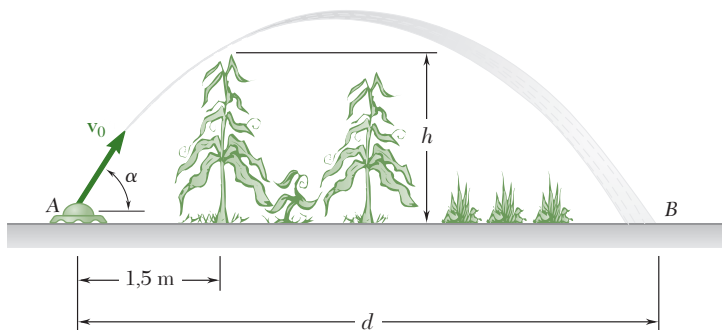



Figura P11.115

11.116 Um trabalhador usa água sob alta pressão para limpar o interior de uma longa canalização de drenagem. Se a água é descarregada com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de 11,5 m/s, determine (*a*) a distância *d* ao ponto mais remoto *B* no alto do cano que a água pode lavar a partir de sua posição em *A* e (*b*) o ângulo α correspondente.

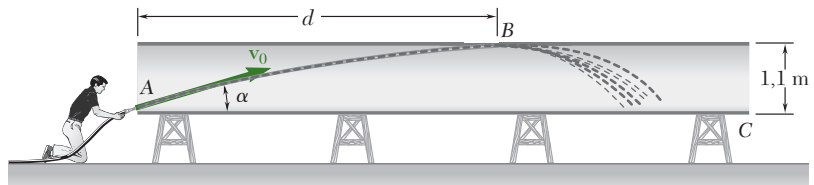



Figura P11.116

11.117 À medida que o bloco deslizante *A* se movimenta para baixo a uma velocidade de 0,5 m/s, a velocidade em relação a *A* da porção da correia *B* entre as polias esticadoras *C* e *D* é $\mathbf{v}_{CD/A} = 2$ m/s $\measuredangle\theta$. Determine a velocidade da porção *CD* da correia quando (*a*) $\theta = 45°$, (*b*) $\theta = 60°$.

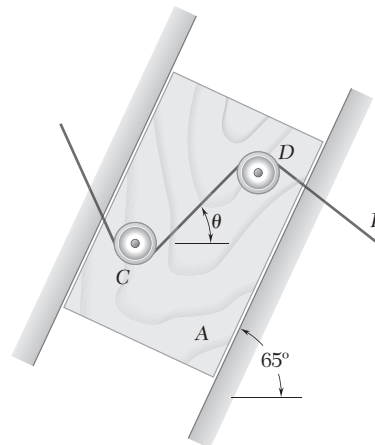



Figura P11.117

11.118 As velocidades dos esquiadores *A* e *B* são mostradas na figura. Determine a velocidade de *A* com relação a *B*.

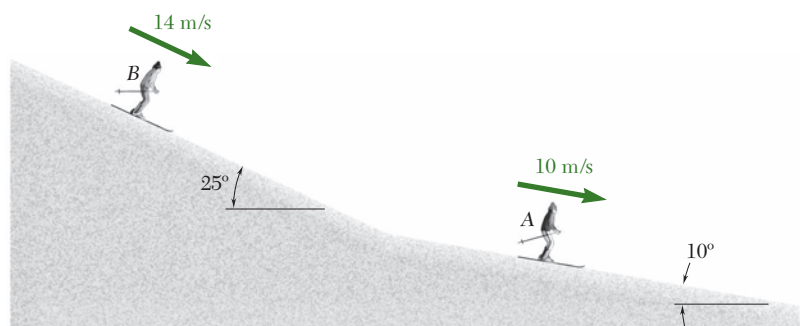



Figura P11.118

11.119 Um radar costeiro indica que uma barca sai de seu atracadouro com uma velocidade $\mathbf{v}$ = 18,5 km/h ∠70°, enquanto instrumentos a bordo da barca indicam velocidade de 19 km/h e direção 30° a oeste da direção sul relativa ao rio. Determine a velocidade do rio. (*Dica:* 1 nó = 1,852 km/h.)

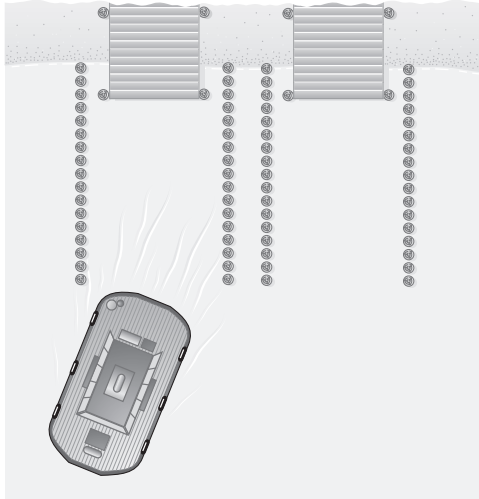



Figura P11.119

11.120 Os aviões *A* e *B* estão voando à mesma altitude e acompanhando o olho de um furacão *C*. A velocidade relativa de *C* em relação a *A* é $\mathbf{v}_{C/A}$ = 235 km/h ∠75°, e a velocidade relativa de *C* em relação a *B* é $\mathbf{v}_{C/B}$ = 260 km/h ∠ 40°. Determine (*a*) a velocidade relativa de *B* em relação a *A*, (*b*) a velocidade de *A* se um radar baseado no chão indica que o furacão está se movendo a uma velocidade escalar de 36 km/h para o norte, (*c*) a mudança na posição de *C* em relação a *B* durante um intervalo de 15 min.

Figura P11.120

11.121 As velocidades dos trens de passageiros *A* e *B* são como mostradas na figura. Sabendo que a velocidade de cada trem é constante e que *B* atinge o cruzamento 10 min depois de *A* ter passado por ele, determine (*a*) a velocidade relativa de *B* em relação a *A*, (*b*) a distância entre a frente das máquinas 3 min depois de *A* ter passado pelo cruzamento.

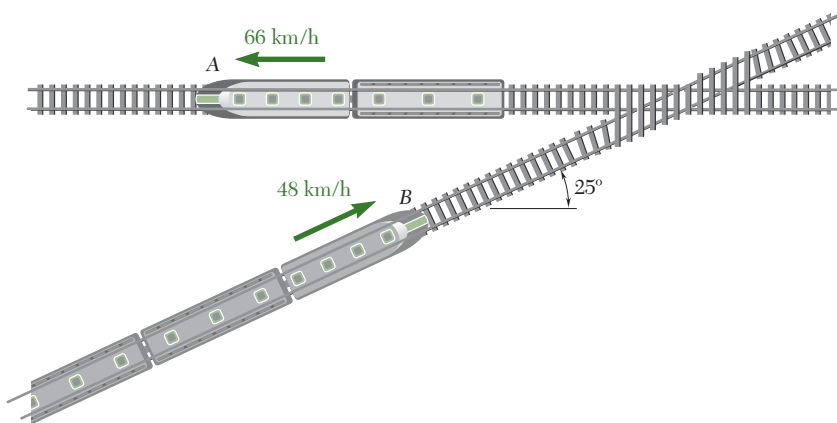



Figura *P11.121*

11.122 Sabendo que a velocidade do bloco B com relação ao bloco A é $\mathbf{v}_{B/A} = 5{,}6$ m/s ⦣ 70°, determine as velocidades de A e B.

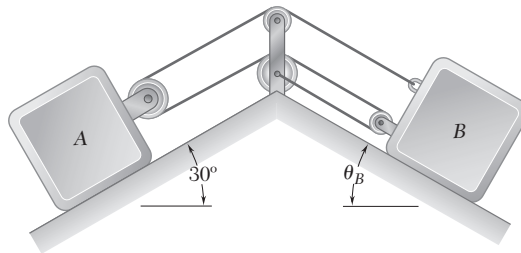



Figura *P11.122*

11.123 Sabendo que no instante mostrado na figura o bloco A tem velocidade de 8 cm/s e aceleração de 6 cm/s^2, ambas no sentido de descida da rampa, determine (*a*) a velocidade do bloco B, (*b*) a aceleração do bloco B.

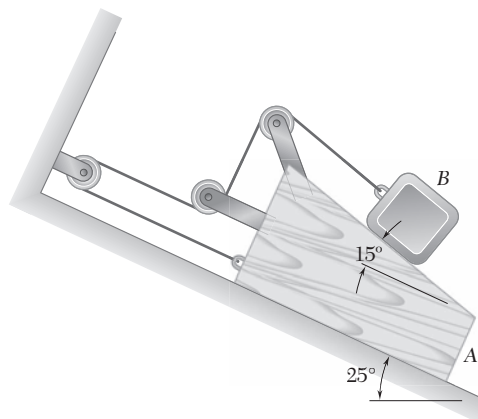



Figura P11.123

11.124 Sabendo que no instante mostrado na figura a montagem A tem a velocidade de 9 cm/s e aceleração de 15 cm/s^2, ambas direcionadas para baixo, determine (*a*) a velocidade do bloco B, (*b*) a aceleração do bloco B.

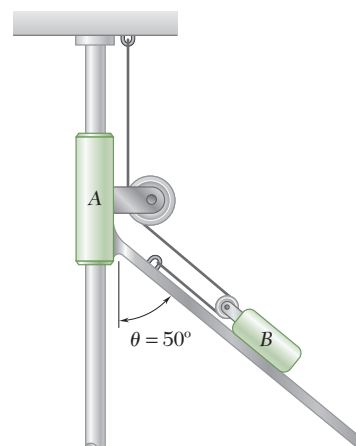



Figura P11.124

11.125 A montagem da barra A com a cunha B sai do repouso e se move para a direita com aceleração constante de 2 mm/s^2. Determine (a) a aceleração da cunha C, (b) a velocidade da cunha C quando t = 10 s.

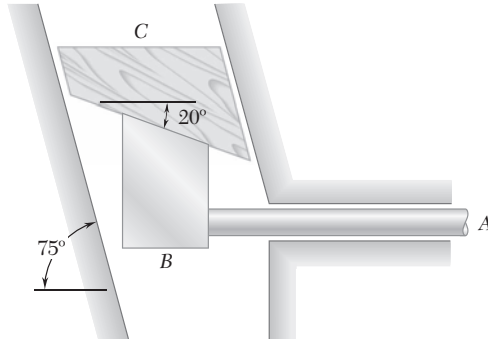



Figura P11.125

11.126 À medida que o caminhão mostrado na figura começa a dar ré com uma aceleração constante de 1,2 m/s^2, a seção exterior B da sua lança começa a se retrair com uma aceleração constante de 0,5 m/s^2 relativa ao caminhão. Determine (a) a aceleração da seção B e (b) a velocidade da seção B quando t = 2 s.

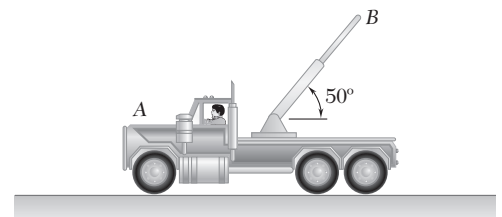



Figura P11.126

11.127 A esteira transportadora A, que forma um ângulo de 20° com a horizontal, se move a uma velocidade constante de 1,2 m/s e é usada para carregar um avião. Sabendo que um trabalhador joga uma bolsa B com uma velocidade inicial de 0,7 m/s a um ângulo de 30° com a horizontal, determine a velocidade da bolsa em relação à esteira ao cair nessa esteira.

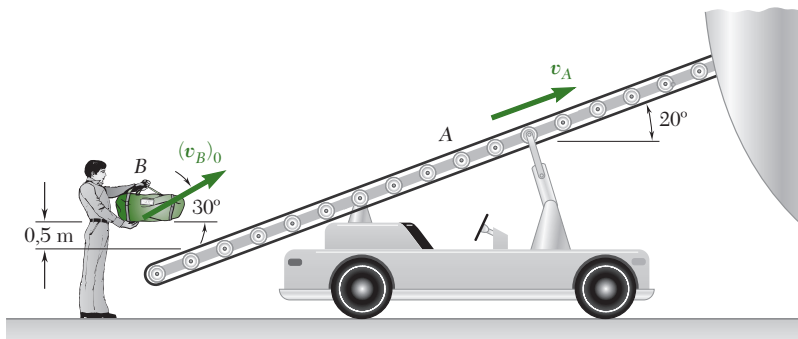
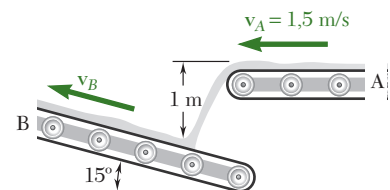



Figura P11.127

11.128 Determine a velocidade necessária da correia B se a velocidade relativa com a qual a areia atinge a correia B é (a) vertical, (b) a menor possível.

Figura P11.128

11.129 À medida que foi observado um navio se movendo para o leste a 9 km/h, o vento parecia soprar do sul. Depois que o navio mudou de curso e velocidade, e este se movia para o norte a 6 km/h, o vento parecia soprar do sudoeste. Considerando que a velocidade do vento é constante durante o período de observação, determine a intensidade e a direção verdadeiras da velocidade do vento.

11.130 Quando um pequeno barco viaja para o norte a 5 km/h, uma bandeira montada na sua popa forma um ângulo $\theta = 50°$ com a linha central do barco, como mostrado na figura. Pouco depois, quando o barco está viajando para leste a 20 km/h, o ângulo θ é novamente de 50°. Determine a velocidade escalar e a direção do vento.

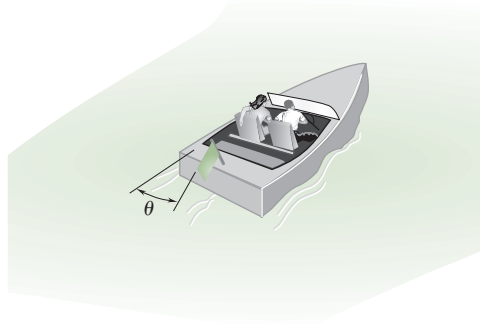



Figura P11.130

11.131 Em uma parte de uma loja de departamento, um trem de ferromodelismo D corre em uma leve inclinação vista entre duas escadas rolantes de subida e descida. Quando o trem e os compradores passam pelo ponto A, o trem parece, para o cliente que sobe na escada rolante B, que se move para baixo, com ângulo de 22° na horizontal, e para a cliente que desce a escada rolante C, parece que se move para cima com ângulo de 23° na horizontal e viaja para a esquerda. Sabendo que a velocidade das escadas rolantes é 1 m/s, determine a velocidade escalar e a direção do trem.

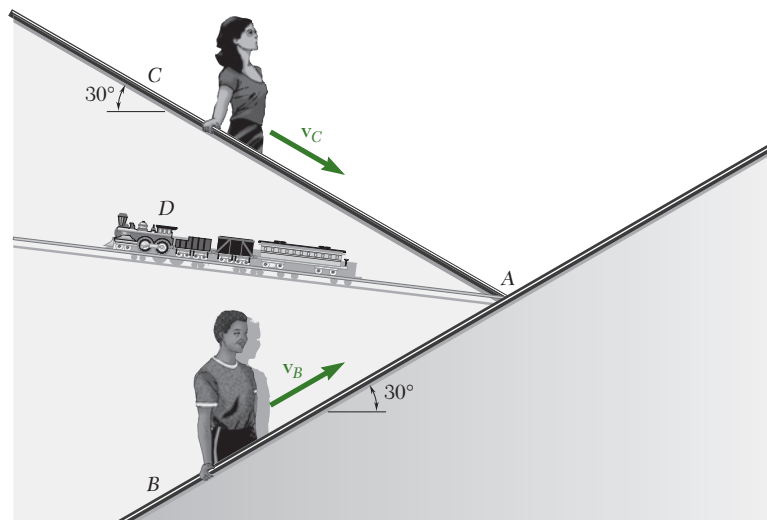



Figura *P11.131*

11.132 As trajetórias das gotas de chuva durante uma tempestade parecem formar um ângulo de 75° com a vertical e cair para a esquerda quando observadas pela janela do lado esquerdo de um automóvel que viaja para o norte a uma velocidade escalar de 40 km/h. Quando observadas pela janela do lado direito de um automóvel que vai para o sul a uma velocidade de 30 km/h, as gotas de chuva parecem formar um ângulo de 60° com a vertical. Se a motorista do automóvel que vai para o norte parasse, em que ângulo e velocidade ela observaria as gotas caindo?

11.13 Componentes tangencial e normal

Vimos na Seção 11.9 que a velocidade de uma partícula é um vetor tangente à trajetória dessa partícula, mas que, em geral, a aceleração não é tangente a essa trajetória. Algumas vezes é conveniente decompor a aceleração em seus componentes dirigidos, respectivamente, ao longo da tangente e da normal à trajetória da partícula.

Movimento plano de uma partícula. Inicialmente, vamos considerar uma partícula que se desloca ao longo de uma curva contida no plano da figura. Seja P a posição da partícula num dado instante. Fixamos em P o vetor $\mathbf{e}_t$ tangente à trajetória da partícula, apontando no sentido do movimento (Fig. 11.21*a*), Seja $\mathbf{e}'_t$ o vetor unitário correspondente à posição P' da partícula num instante seguinte. Traçando os dois vetores a partir da mesma origem O', definimos o vetor $\Delta\mathbf{e}_t = \mathbf{e}'_t - \mathbf{e}_t$ (Fig. 11.21*b*). Como $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$ têm comprimento unitário, suas extremidades estão sobre uma circunferência de raio igual a 1. Representando por $\Delta\theta$ o ângulo formado por $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$, encontramos que a intensidade de $\Delta\mathbf{e}_t$ é 2 sen $(\Delta\theta/2)$. Considerando agora o vetor $\Delta\mathbf{e}_t/\Delta\theta$, observamos que, à medida que $\Delta\theta$ tende para zero, este vetor se torna tangente à circunferência unitária da Fig. 11.21*b*, isto é, perpendicular a $\boldsymbol{e}_t$ e com intensidade tendendo a

Figura 11.21

$$\lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{2\,\text{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\text{sen}(\Delta\theta/2)}{\Delta\theta/2} = 1$$

Portanto, o vetor obtido no limite é um vetor unitário ao longo da normal à trajetória da partícula, apontando na direção para a qual $\mathbf{e}_t$ gira. Representando este vetor por $\mathbf{e}_n$, escrevemos

$$\mathbf{e}_n = \lim_{\Delta\theta\to 0}\frac{\Delta\mathbf{e}_t}{\Delta\theta}$$

$$\mathbf{e}_n = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta} \tag{11.35}$$

Como a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula é tangente à trajetória, ela pode ser expressa como o produto da velocidade escalar v pelo vetor unitário $\boldsymbol{e}_t$. Temos

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

Para obter a aceleração da partícula, derivamos (11.36) em relação a t. Aplicando a regra da derivação do produto de uma função escalar por uma função vetorial (Seção 11.10), escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + v\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} \tag{11.37}$$

Mas

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_t}{d\theta}\frac{d\theta}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Recordando que, a partir da Eq. (11.16), $ds/dt = v$, a partir da Eq. (11.35) $d\mathbf{e}_t/d\theta = \mathbf{e}_n$ e o cálculo elementar $d\theta/ds = 1/\rho$, onde ρ é o raio de curvatura da trajetória em P (Fig. 11.22), temos

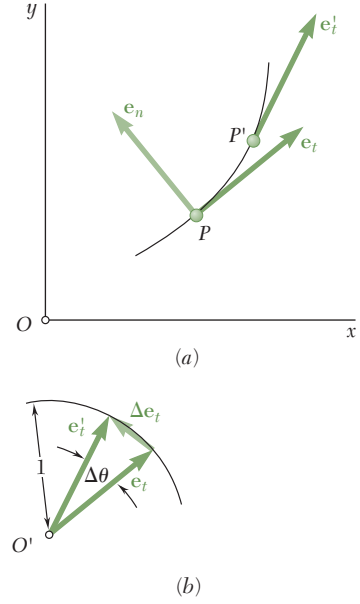
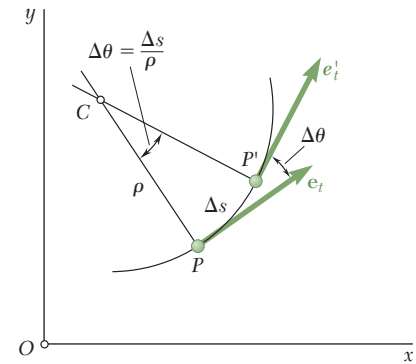



Figura 11.22

Foto 11.5 Os passageiros no trem viajando ao longo da curva experimentarão uma aceleração normal em direção ao centro da curvatura do caminho.

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{dt} = \frac{v}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.38}$$

Substituindo em (11.37), obtemos

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

Portanto, os componentes escalares da aceleração são

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad a_n = \frac{v^2}{\rho} \tag{11.40}$$

As relações obtidas expressam que o *componente tangencial* da aceleração é igual à *taxa de variação da velocidade escalar da partícula,* enquanto o *componente normal* é igual ao *quadrado da velocidade escalar dividido pelo raio de curvatura da trajetória em P.* Se a velocidade da partícula aumenta, a_t é positivo e o componente vetorial $\mathbf{a}_t$ aponta para a direção do movimento. Se a velocidade da partícula diminui, a_t é negativa e $\mathbf{a}_t$ aponta na direção contrária à do movimento. O componente vetorial $\mathbf{a}_n$, por outro lado, está *sempre orientado para o centro de curvatura C da trajetória* (Fig 11.23).

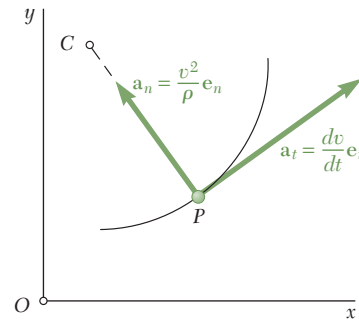



Figura 11.23

Concluímos, a partir do que nos foi apresentado anteriormente, que o componente tangencial da aceleração reflete uma variação na velocidade escalar da partícula, enquanto seu componente normal reflete uma variação na direção de movimento da partícula. A aceleração de uma partícula será zero somente se ambos os componentes forem zero. Assim, a aceleração de uma partícula que se desloca com velocidade constante ao longo de uma curva não será zero, a não ser que a partícula passe por um ponto de inflexão da curva (onde o raio de curvatura é infinito) ou que a curva seja uma linha reta.

O fato de que o componente normal da aceleração depende do raio de curvatura da trajetória seguida pela partícula é levado em conta no projeto de estruturas ou mecanismos tão diferentes entre si como asas de avião, linhas férreas e cames. Para evitar variações repentinas na aceleração das partículas de ar que escoam ao redor de uma asa, perfis de asas são projetados sem qualquer mudança brusca de curvatura. Uma precaução similar é tomada no projeto de curvas de ferrovia, de forma a evitar variações bruscas na aceleração dos vagões (que prejudicariam

o equipamento e causariam desconforto aos passageiros). Uma seção reta de linha férrea, por exemplo, nunca é diretamente seguida de uma seção circular. Seções especiais de transição são usadas para suavizar a passagem de um raio de curvatura infinito do trecho reto para o raio finito do trecho circular. Da mesma maneira, no projeto de cames de alta velocidade, mudanças abruptas na aceleração são evitadas com o uso de curvas de transição que produzem uma variação contínua na aceleração.

Movimento de uma partícula no espaço. As relações (11.39) e (11.40) também são válidas para o caso de uma partícula que se desloca ao longo de uma curva no espaço. Entretanto, como há um número infinito de retas que são perpendiculares à tangente em um dado ponto P de uma curva no espaço, é necessário definir com mais precisão a direção do vetor unitário $\mathbf{e}_n$.

Vamos considerar novamente os vetores unitários $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$ tangentes à trajetória da partícula em dois pontos vizinhos P e P' (Fig. 11.24*a*) e o vetor $\Delta\mathbf{e}_t$ que representa a diferença entre $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}'_t$ (Fig. 11.24*b*).

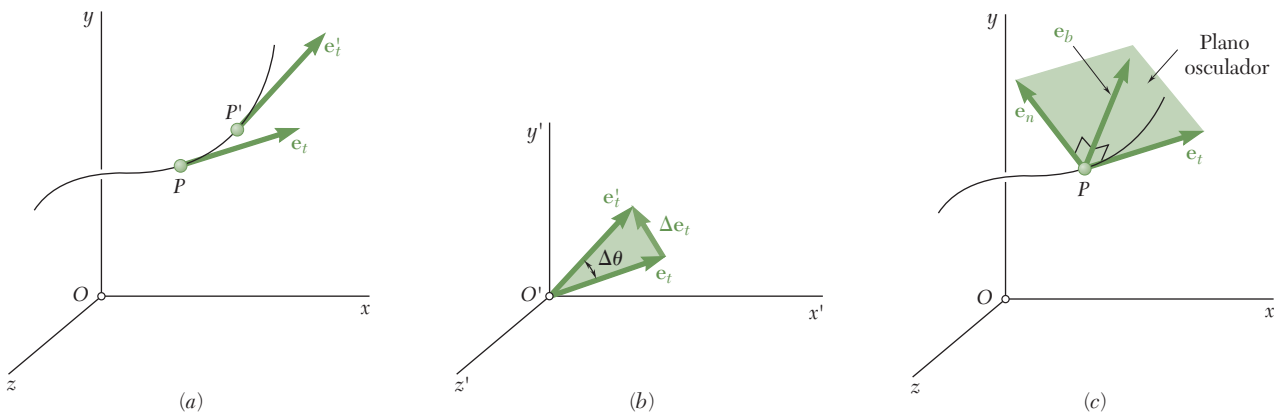



Figura 11.24

Vamos supor agora um plano passando por P (Fig. 11.24*a*), paralelo ao plano definido pelos vetores $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}'_t$ e $\Delta\mathbf{e}_t$, (Fig. 11.24*b*). Este plano contém a tangente à trajetória curva em P e é paralelo à tangente em P'. Se fizermos P' tender a P vamos obter no limite o plano que melhor se ajusta à trajetória nas redondezas de P. Esse plano é chamado de *plano osculador** em P. Segue-se desta definição que o plano osculador contém o vetor unitário $\mathbf{e}_n$ uma vez que esse vetor representa o limite do vetor $\Delta\mathbf{e}_t / \theta$. A normal definida por $\mathbf{e}_n$ está contida, então, no plano osculador; ela é chamada a *normal principal* em P. O vetor unitário $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$ que completa o triedro positivo de vetores $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, $\mathbf{e}_b$ (Fig. 11.24*c*) e define a *binormal* em P. A binormal é, portanto, perpendicular ao plano osculador. Concluímos que a aceleração da partícula em P pode ser expressa mediante dois componentes, um ao longo da tangente e o outro ao longo da normal principal em P, conforme mostrado na Eq. (11.39). Note que a aceleração não tem nenhum componente ao longo da binormal.

---

* Do latim *osculari*, beijar.

11.14 Componentes radial e transversal

Em certos problemas de movimento no plano, a posição da partícula P é definida por suas coordenadas polares r e θ (Fig. 11.25*a*). É, então, conveniente decompor a velocidade e a aceleração da partícula em componentes paralelos e perpendiculares, respectivamente, à linha OP. Esses componentes são denominados *componentes radial* e *transversal.*

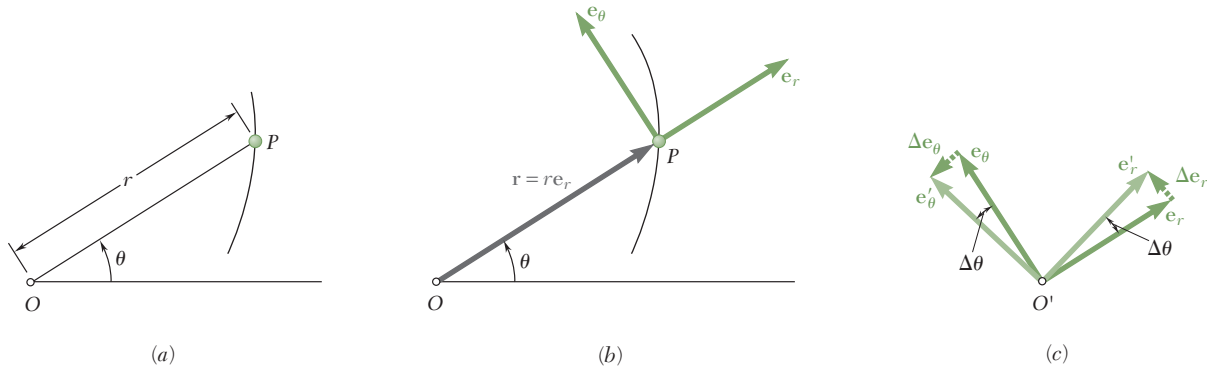



Figura 11.25

Fixamos em P dois vetores unitários, $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\theta$ (Fig. 11.25*b*). O vetor $\mathbf{e}_r$ é dirigido ao longo de OP e o vetor $\mathbf{e}_\theta$ é obtido girando $\mathbf{e}_r$ em 90° no sentido anti-horário. O vetor unitário $\mathbf{e}_r$ define a direção *radial,* isto é, a direção na qual P se deslocaria se r aumentasse e θ permanecesse constante; o vetor unitário $\mathbf{e}_\theta$ define a direção *transversal,* isto é, a direção pela qual P se deslocaria se θ fosse aumentado e r fosse mantido constante. Uma dedução análoga àquela usada na Seção 11.13 para determinar a derivada do vetor unitário $\mathbf{e}_t$ leva às relações

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta} = \mathbf{e}_\theta \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{e}_r \tag{11.41}$$

onde $-\mathbf{e}_r$ representa um vetor unitário de sentido contrário ao de $\mathbf{e}_r$ (Fig. 11.25*c*). Usando a regra da cadeia para derivação, expressamos as derivadas temporais dos vetores unitários $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\theta$ como segue

Foto 11.6 Os suportes para os pés numa bicicleta elíptica estão sujeitos ao movimento curvilíneo.

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt} \qquad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\mathbf{e}_r\frac{d\theta}{dt}$$

ou, usando pontos para indicar as derivadas em relação a t,

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r \tag{11.42}$$

Para obter a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula P, expressamos o vetor de posição $\mathbf{r}$ de P como o produto do escalar r pelo vetor unitário $\mathbf{e}_r$ e derivamos em relação a t

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

ou, recordando a primeira das relações (11.42),

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$

Derivando novamente em relação a t para obter a aceleração, escrevemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta$$

ou, substituindo $\dot{\mathbf{e}}_r$ e $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ de (11.42) e fatorando $\mathbf{e}_r$ e $\mathbf{e}_\theta$,

$$\boldsymbol{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

Os componentes escalares da velocidade e da aceleração nas direções radial e transversal são, portanto,

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

É importante notar que a_r *não* é igual à derivada temporal de v_r e que a_θ *não* é igual a derivada temporal de v_θ.

No caso de uma partícula que se desloca ao longo de uma circunferência de centro O, temos r = constante e $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, e as fórmulas (11.43) e (11.44) se reduzem, respectivamente, a

$$\mathbf{v} = r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \qquad \mathbf{a} = -r\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + r\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.47}$$

Extensão para o movimento de uma partícula no espaço: coordenadas cilíndricas. A posição de uma partícula P no espaço é algumas vezes definida pelas suas coordenadas cilíndricas R, θ e z (Fig. 11.26*a*). Portanto, é conveniente utilizar os vetores unitários $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{k}$ mostrados na Fig 11.26*b*. Decompondo o vetor de posição $\mathbf{r}$ da partícula P segundo componentes ao longo desses vetores unitários, escrevemos

$$\mathbf{r} = R\mathbf{e}_R + z\mathbf{k} \tag{11.48}$$

Observando que $\mathbf{e}_R$ e $\mathbf{e}_\theta$ definem, respectivamente, as direções radial e transversal no plano horizontal xy e que o vetor $\mathbf{k}$, que define a direção *axial* é constante em intensidade e direção, verificamos facilmente que

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{R}\mathbf{e}_R + R\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k} \tag{11.49}$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{R} - R\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_R + (R\ddot{\theta} + 2\dot{R}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{11.50}$$

(*a*)

(*b*)

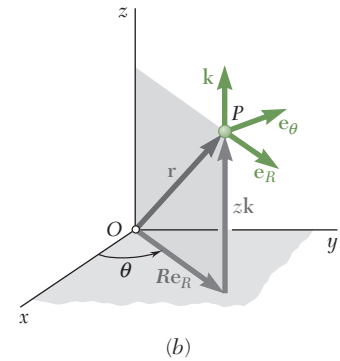
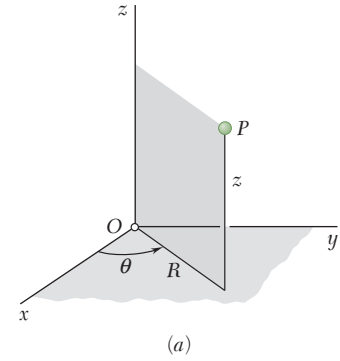
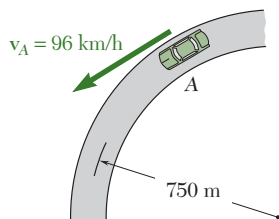



Figura 11.26

PROBLEMA RESOLVIDO 11.10

Um motorista está percorrendo uma seção curva de rodovia de raio de 750 m a uma velocidade escalar de 90 km/h. O motorista de repente aciona os freios, fazendo o automóvel reduzir sua velocidade escalar de forma constante. Sabendo que após 8 s a velocidade escalar foi reduzida para 72 km/h, determine a aceleração do automóvel imediatamente após os freios terem sido aplicados.

SOLUÇÃO

Componente tangencial da aceleração. Em primeiro lugar, as velocidades escalares são expressas em m/s.

$$90 \text{ km/h} = \left(90 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1.000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right)\left(\frac{1 \text{ h}}{3.600 \text{ s}}\right) = 25 \text{ m/s}$$

$$72 \text{ km/h} = 20 \text{ m/s}$$

Uma vez que a velocidade do veículo diminui a uma taxa constante, temos

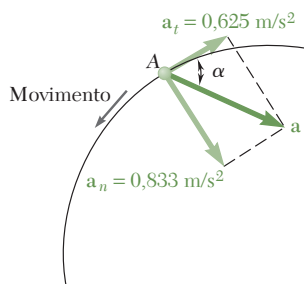
$$a_t = \text{média } a_t = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{20 \text{ m/s} - 25 \text{ m/s}}{8 \text{ s}} = -0{,}625 \text{ m/s}^2$$

Componente normal da aceleração. Imediatamente após os freios terem sido acionados, a velocidade escalar ainda é de 25 m/s, e temos

$$an = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(25 \text{ m/s})^2}{750 \text{ m}} = 0{,}833 \text{ m/s}^2$$

Intensidade e direção da aceleração. A intensidade e a direção da resultante **a** cujos componentes são $\mathbf{a}_n$ e $\mathbf{a}_t$ são

$$\text{tg } \alpha = \frac{a_n}{a_t} = \frac{0{,}833 \text{ m/s}^2}{0{,}625 \text{ m/s}^2} \qquad \alpha = 53{,}1° \blacktriangleleft$$

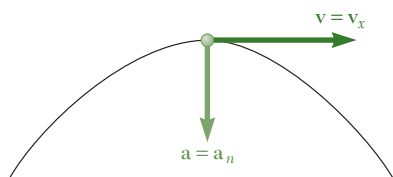
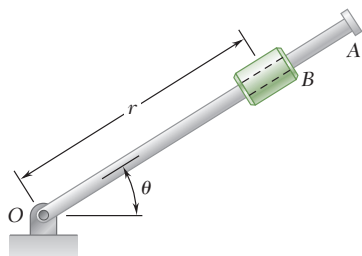
$$a = \frac{a_n}{\text{sen } \alpha} = \frac{0{,}833 \text{ m/s}^2}{\text{sen } 53{,}1°} \qquad \mathbf{a} = 1{,}041 \text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.11

Determine o raio de curvatura mínimo da trajetória descrita pelo projétil considerado no Problema Resolvido 11.7.

SOLUÇÃO

Como $a_n = v^2/\rho$, temos $\rho = v^2/a_n$. O raio será pequeno quando v for pequeno ou quando a_n for grande. A velocidade v é mínima no topo da trajetória visto que $v_y = 0$ neste ponto; a_n é máxima neste mesmo ponto, uma vez que a direção vertical coincide com a direção da normal. Portanto, o raio mínimo de curvatura ocorre no topo da trajetória. Nesse ponto, temos

$$v = v_x = 155{,}9 \text{ m/s} \qquad a_n = a = 9{,}81 \text{ m/s}^2$$

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(155{,}9 \text{ m/s})^2}{9{,}81 \text{ m/s}^2} \qquad \rho = 2.480 \text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 11.12

A rotação do braço OA de 0,9 m de comprimento em torno de O é definida pela relação $\theta = 0{,}15t^2$, onde θ está expresso em radianos e t em segundos. O cursor B desliza ao longo do braço de tal maneira que sua distância em relação a O é $r = 0{,}9 - 0{,}12t^2$, onde r é expresso em metros e t em segundos. Após o braço OA ter girado 30°, determine (a) a velocidade total do cursor, (b) a aceleração total do cursor, e (c) a aceleração relativa do cursor em relação ao braço.

SOLUÇÃO

Instante t no qual $\theta = 30°$. Substituindo $\theta = 30° = 0{,}524$ rad na expressão para θ, obtemos

$$\theta = 0{,}15t^2 \qquad 0{,}524 = 0{,}15t^2 \qquad t = 1{,}869 \text{ s}$$

Equações de movimento. Substituindo $t = 1{,}869$ s nas expressões para r, θ e suas primeiras e segundas derivadas, temos

$$\begin{aligned} r &= 0{,}9 - 0{,}12t^2 = 0{,}481 \text{ m} & \theta &= 0{,}15t^2 = 0{,}524 \text{ rad} \\ \dot{r} &= -0{,}24t = -0{,}449 \text{ m/s} & \dot{\theta} &= 0{,}30t = 0{,}561 \text{ rad/s} \\ \ddot{r} &= -0{,}24 = -0{,}240 \text{ m/s}^2 & \ddot{\theta} &= 0{,}30 = 0{,}300 \text{ rad/s}^2 \end{aligned}$$

a. Velocidade de B. Usando as Eqs. (11.45), obtemos os valores de v_r e v_θ quando $t = 1{,}869$ s.

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} = -0{,}449 \text{ m/s} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} = 0{,}481(0{,}561) = 0{,}270 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Resolvendo o triângulo retângulo mostrado na figura, obtemos a intensidade e direção da velocidade,

$$v = 0{,}524 \text{ m/s} \qquad \beta = 31{,}0° \quad ◀$$

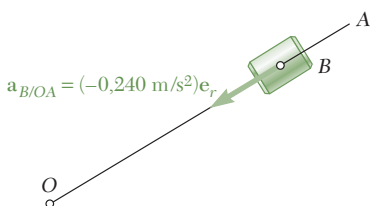
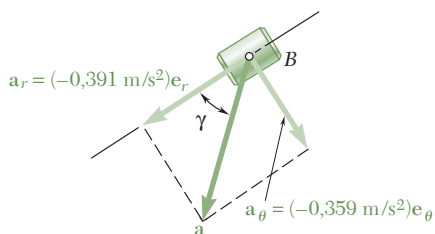
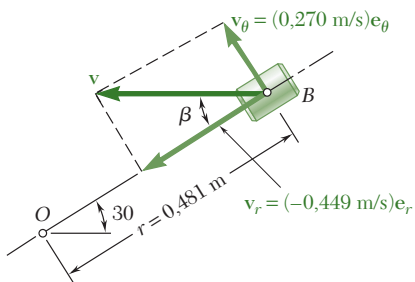
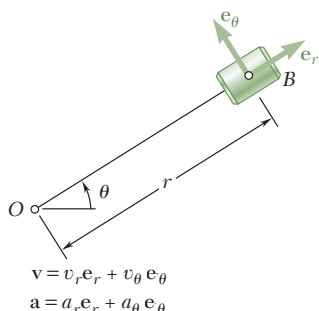
b. Aceleração de B. Usando as Eqs. (11.46), obtemos

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ &= -0{,}240 - 0{,}481(0{,}561)^2 = -0{,}391 \text{ m/s}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \\ &= 0{,}481(0{,}300) + 2(-0{,}449)(0{,}561) = -0{,}359 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$a = 0{,}531 \text{ m/s}^2 \qquad \gamma = 42{,}6° \quad ◀$$

c. Aceleração de B em relação ao braço OA. Notamos que o movimento do cursor em relação ao braço é retilíneo e definido pela coordenada r. Escrevemos

$$a_{B/OA} = \ddot{r} = -0{,}240 \text{ m/s}^2$$

$$a_{B/OA} = 0{,}240 \text{ m/s}^2 \text{ no sentido de } O \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Será pedido, nos problemas a seguir, que você dê a velocidade e a aceleração de partículas em termos de seus *componentes normais e tangenciais* ou em termos de seus *componentes radiais e transversais.* Embora esses componentes possam não ser tão familiares para você quanto os componentes retangulares, você vai descobrir que eles podem simplificar a solução de muitos problemas, e que certos tipos de movimento são mais facilmente descritos quando são utilizados.

1. Usando componentes normais e tangenciais. Esses componentes são mais frequentemente usados quando a partícula de interesse se movimenta ao longo de uma trajetória circular ou quando o raio de curvatura da trajetória precisa ser determinado. Lembre-se de que o vetor unitário $\mathbf{e}_t$ é tangente à trajetória da partícula (e assim alinhado com a velocidade) enquanto o vetor unitário $\mathbf{e}_n$ está dirigido ao longo da normal para a trajetória e sempre aponta na direção do seu centro de curvatura. Segue-se que, à medida que a partícula se movimenta, as direções dos dois vetores unitários estão em constante variação.

2. Expressando a aceleração em termos de seus componentes tangenciais e normais. Deduzimos da Seção 11.13 a seguinte equação, aplicável tanto ao movimento bidimensional como ao tridimensional de uma partícula:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \qquad (11.39)$$

As seguintes observações podem ajudá-lo a resolver os problemas desta seção.

a. O componente tangencial da aceleração mede a taxa de mudança da velocidade escalar: $a_t = dv/dt$. Segue-se que, quando a_t é constante, as equações para o movimento uniformemente acelerado podem ser usadas com a aceleração igual a a_t. Além disso, quando uma partícula se movimenta a uma velocidade constante, temos $a_t = 0$ e a aceleração da partícula se reduz a seu componente normal.

b. O componente normal da aceleração é sempre dirigido para o centro de curvatura da trajetória da partícula e sua intensidade é $a_n = v^2/\rho$. Portanto, o componente normal pode ser facilmente determinado se a velocidade escalar da partícula e o raio de curvatura ρ da trajetória forem conhecidos. Reciprocamente, quando a velocidade escalar e a aceleração normal da partícula são conhecidas, o raio de curvatura da trajetória pode ser obtido resolvendo essa equação para ρ [Problema Resolvido 11.11].

c. No movimento tridimensional, um terceiro vetor unitário é usado, $\mathbf{e}_b = \mathbf{e}_t \times \mathbf{e}_n$, que define a direção da *binormal.* Como esse vetor é perpendicular tanto à velocidade quanto à aceleração, ele pode ser obtido escrevendo

$$\mathbf{e}_b = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}$$

3. Usando componentes radiais e transversais. Esses componentes são usados para analisar o movimento plano de uma partícula P, quando a posição de P é definida pelas suas coordenadas polares r e θ. Como mostrado na Fig 11.25, o vetor unitário $\mathbf{e}_r$, que define a direção *radial*, está preso a P e aponta em direção oposta ao ponto fixo O, enquanto o vetor unitário $\mathbf{e}_\theta$, que define a direção *transversal*, é obtido girando-se $\mathbf{e}_r$ em 90° *no sentido anti-horário*. A velocidade e a aceleração de uma partícula foram expressas em termos de seus componentes radiais e transversais nas Eqs. (11.43) e (11.44), respectivamente. Você vai notar que as expressões obtidas contêm a primeira e a segunda derivadas em relação a t das coordenadas r e θ.

Nos problemas desta seção, você vai encontrar os seguintes tipos de questões envolvendo componentes radiais e transversais:

a. Tanto r como θ são funções conhecidas de t. Nesse caso, você vai calcular a primeira e a segunda derivadas de r e θ e substituir as expressões obtidas nas Eqs. (11.43) e (11.44).

b. Existe uma certa relação entre r e θ. Primeiro, você deve determinar essa relação a partir da geometria do sistema dado e usá-la para expressar r em função de θ. Quando a função $r = f(\theta)$ for conhecida, você poderá aplicar a regra da cadeia para determinar $\dot{r}$ em termos de θ e $\dot{\theta}$, e $\ddot{r}$ em termos de θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$

$$\dot{r} = f'(\theta)\dot{\theta}$$

$$\ddot{r} = f''(\theta)\dot{\theta}^2 + f'(\theta)\ddot{\theta}$$

As expressões obtidas podem então ser substituídas nas Eqs. (11.43) e (11.44).

c. O movimento tridimensional de uma partícula, como indicado no final da Seção 11.14, pode muitas vezes ser descrito efetivamente em termos das *coordenadas cilíndricas* R, θ e z (Fig. 11.26). Os vetores unitários devem então consistir de $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\theta$ e $\mathbf{k}$. Os componentes correspondentes da velocidade e da aceleração são dados nas Eqs. (11.49) e (11.50). Note que a distância radial R é sempre medida em um plano paralelo ao plano xy e tenha cuidado para não confundir o vetor de posição $\mathbf{r}$ com seu componente radial $R\mathbf{e}_R$.

PROBLEMAS

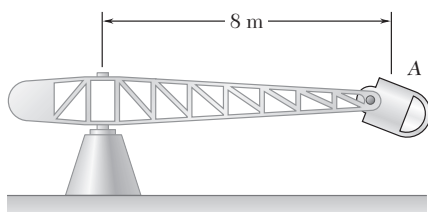



Figura P11.133

11.133 Determinar a velocidade periférica de uma cabine de teste de centrifugação para que a componente normal da aceleração seja 10g.

11.134 Em um teste de *desempenho*, dirige-se um automóvel ao longo de uma pista de teste circular de diâmetro d. Determine (a) o valor de d quando a velocidade do automóvel é 72 km/h e a componente normal da aceleração é 3,2 m/s^2, (b) a velocidade escalar do automóvel se $d = 180$ m e a componente normal da aceleração é calculada para ser 0,6g.

11.135 Determine o menor raio que deveria ser usado para a rodovia se a componente normal da aceleração do carro viajando a 72 km/h não pudesse exceder 0,7 m/s^2.

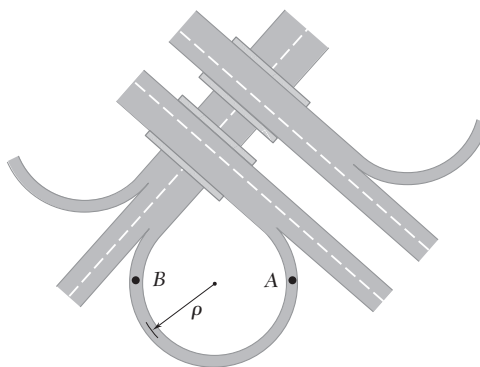



Figura P11.135

11.136 Determine a velocidade escalar máxima que os carros da montanha-russa podem atingir ao longo da seção circular AB da pista se o componente normal de sua aceleração não pode exceder 3g.

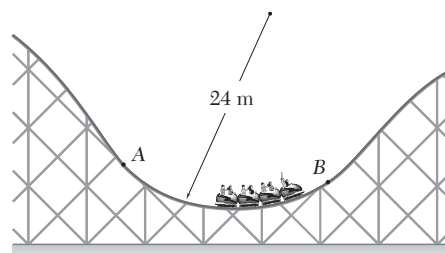



Fig P11.136

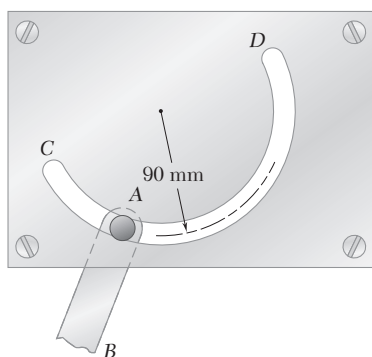



Figura P11.137

11.137 O pino A, que está fixado à haste de conexão AB, tem seu movimento restrito à ranhura circular CD. Sabendo que no instante $t = 0$ o pino parte do repouso e se movimenta de tal modo que sua velocidade escalar aumenta a uma taxa constante de 20 mm/s^2, determine a intensidade da aceleração total quando (a) $t = 0$ e (b) $t = 2$ s.

11.138 Um trem monotrilho parte do repouso em uma curva de raio 400 m e acelera com uma taxa constante a_t. Se a aceleração máxima total do trem não deve exceder 1,5 m/s^2, determine (a) a distância mais curta em que o trem pode alcançar a velocidade de 72 km/h, (b) a taxa constante da aceleração a_t correspondente.

11.139 Uma pista ao ar livre tem 125 m de diâmetro. A corredora aumenta sua velocidade escalar numa taxa constante de 4 para 7 m/s em uma distância de 28 m. Determine a aceleração total da corredora 2 s depois dela iniciar o aumento de sua velocidade escalar.

Figura P11.139

11.140 Em um dado instante de uma corrida de aeronaves, o avião A está voando horizontalmente em linha reta e sua velocidade escalar aumentada a uma taxa de 8 m/s^2. O avião B está voando na mesma altitude que o avião A e, à medida que ele contorna um marco, segue uma trajetória circular de 300 m de raio. Sabendo que em um dado instante a velocidade de B começa a decrescer para uma taxa de 3 m/s^2, determine, para as posições mostradas na figura, (a) a velocidade de B em relação a A, (b) a aceleração de B em relação a A.

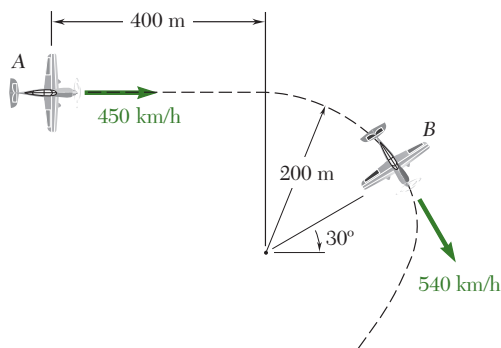



Figura *P11.140*

11.141 Um motorista que dirige ao longo de um trecho de reta de uma rodovia diminui a velocidade de seu automóvel para uma taxa constante antes de sair da rodovia em direção a uma rampa de saída circular com um raio de 168 m. Ele continua a desaceleração com a mesma taxa constante de tal forma que, 10 s após ter entrado na rampa, sua velocidade escalar diminuiu para 32 km/h, uma velocidade escalar que ele, então, mantém. Sabendo que a essa velocidade constante a aceleração total do carro é igual a um quarto de seu valor antes de entrar na rampa, determine o valor máximo da aceleração total do carro.

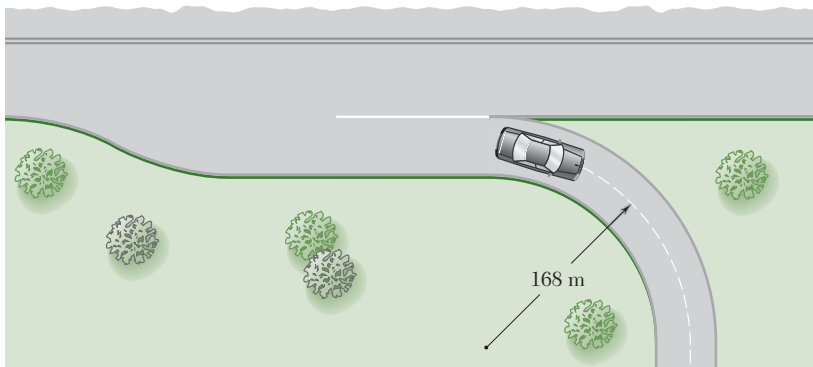



Figura P11.141

11.142 Os carros de corrida *A* e *B* se deslocam em trechos circulares de um autódromo. No instante mostrado na figura, a velocidade de *A* está decrescendo a uma taxa de 7 m/s^2 e a velocidade de *B* está aumentando a uma taxa de 2 m/s^2. Para as posições mostradas, determine (*a*) a velocidade de *B* em relação a *A*, (*b*) a aceleração de *B* em relação a *A*.

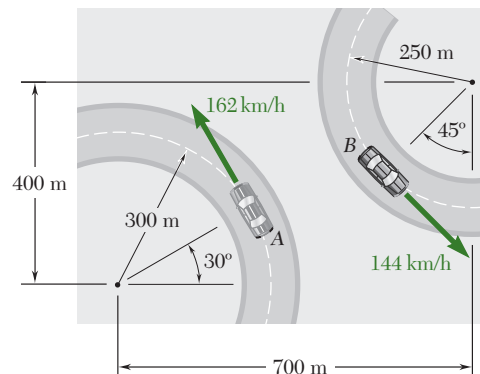



Figura *P11.142*

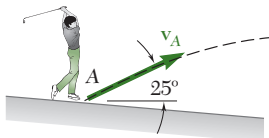



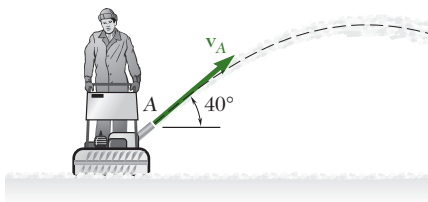
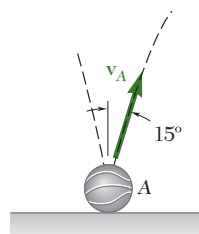
Figura P11.143

11.143 Um jogador de golfe lança uma bola a partir do ponto *A* com uma velocidade inicial de 50 m/s e um ângulo de 25° com a horizontal. Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola (*a*) no ponto *A*, (*b*) no ponto mais alto da trajetória.

Figura P11.144

11.144 A partir de uma fotografia do dono de uma casa utilizando um removedor de neve determina-se que o raio de curvatura da trajetória da neve foi de 8,5 m a partir do momento em que ela deixa o cano de descarga em *A*. Determine (*a*) a velocidade de descarga $\mathbf{v}_A$ da neve, (*b*) o raio de curvatura no ponto mais alto da trajetória.

11.145 Uma bola de basquete é solta no chão no ponto *A* e quica com velocidade $\mathbf{v}_A$ de intensidade 2,25 m/s como mostrado na figura. Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela bola (*a*) no ponto *A*, (*b*) no ponto mais alto da trajetória.

Figura P11.145

11.146 O carvão é descarregado da carroceria de um caminhão basculante com uma velocidade inicial de $\mathbf{v}_A = 2$ m/s ⦣ 50°. Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pelo carvão (*a*) no ponto *A*, (*b*) no ponto da trajetória localizado 1 m abaixo do ponto *A*.

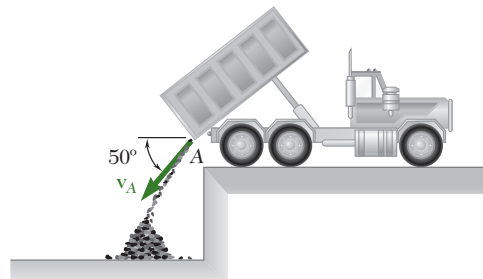



Figura P11.146

11.147 Uma tubulação horizontal descarrega no ponto A um jato de água dentro de um reservatório. Determine o raio de curvatura do jato no ponto B em termos das intensidades das velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$.

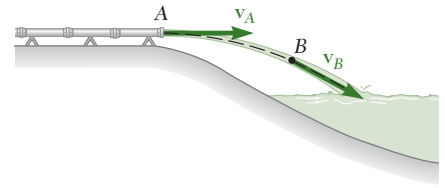



Figura P11.147

11.148 Uma criança lança uma bola do ponto A com velocidade inicial $\mathbf{v}_A$ de 20 m/s com um ângulo de 25° em relação à horizontal. Determine a velocidade da bola nos pontos da trajetória descrita pela bola onde o raio de curvatura é igual a três quartos de seu valor em A.

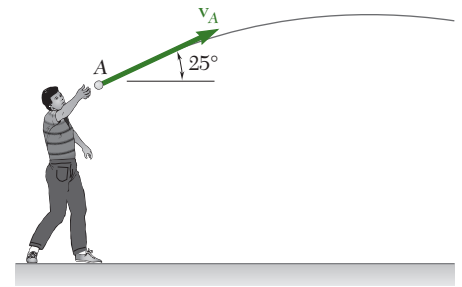



Figura P11.148

11.149 Um projétil é disparado a partir do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$. (*a*) Mostre que o raio de curvatura da trajetória do projétil alcança seu valor mínimo no ponto mais alto B da trajetória. (*b*) Representando por θ o ângulo formado entre a trajetória e a horizontal em um dado ponto C, mostre que o raio de curvatura da trajetória em C é $\rho = \rho_{\text{mín}}/\cos^3 \theta$.

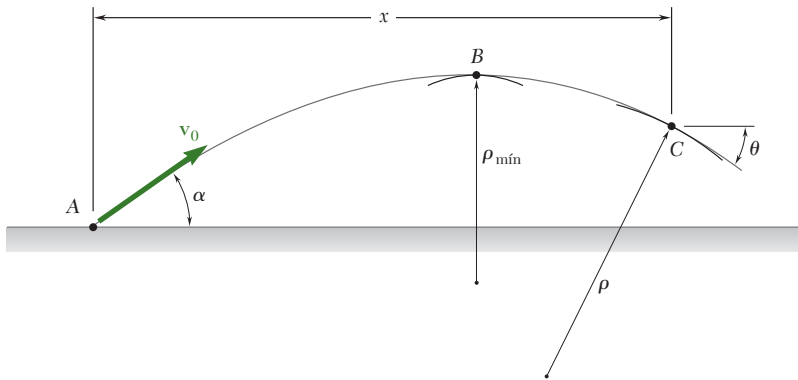



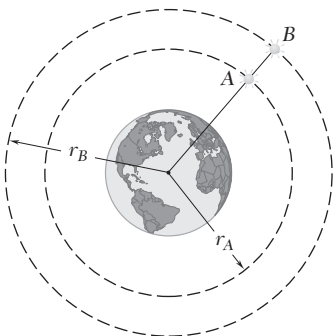
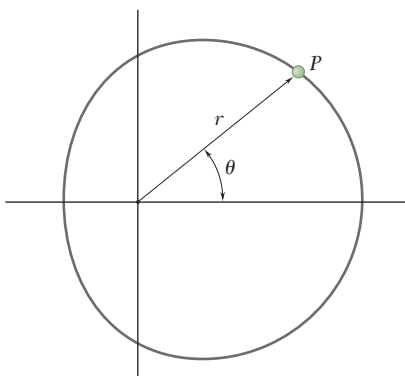
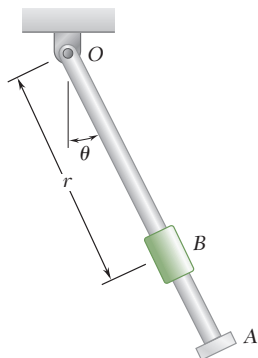
Figura *P11.149* e *P11.150*

11.150 Um projétil é disparado a partir do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ que forma um ângulo α com a horizontal. Expresse o raio de curvatura da trajetória do projétil no ponto C em termos de x, v_0, α e g.

***11.151** Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela partícula do Problema 11.95 quando $t = 0$.

***11.152** Determine o raio de curvatura da trajetória descrita pela partícula do Problema 11.96 quando $t = 0$, $A = 3$ e $B = 1$.

11.153 a 11.155 Um satélite vai percorrer indefinidamente uma órbita circular em torno de um planeta se o componente normal da aceleração do satélite for igual a $g(R/r)^2$, onde g é a aceleração da gravidade na superfície do planeta, R é o raio do planeta e r é a distância do centro do planeta até o satélite. Determine a velocidade escalar do satélite relativa ao planeta indicado se o satélite deve percorrer indefinidamente uma órbita circular 160 km acima da superfície do planeta.

11.153 Vênus: $g = 8{,}53$ m/s^2, $R = 6.161$ km.
11.154 Marte: $g = 3{,}83$ m/s^2, $R = 3.332$ km.
11.155 Júpiter: $g = 26{,}0$ m/s^2, $R = 69.893$ km.

11.156 e 11.157 Sabendo que o diâmetro do sol é de 1382×10^3 km e que a aceleração da gravidade na sua superfície é de 270 m/s^2, determine o raio da órbita do planeta indicado em torno do sol considerando que a órbita é circular. (Ver informações dadas nos Problemas 11.153-11.155.)

11.156 Terra: $(v_{\text{méd}})_{\text{órbita}} = 106\,500$ km/h

11.157 Saturno: $(v_{\text{méd}})_{\text{órbita}} = 34\,500$ Mm/h

11.158 Sabendo que o raio da Terra é 6.370 km, determine o tempo que o telescópio espacial Hubble leva para percorrer uma órbita, considerando que o telescópio percorre uma órbita circular 590 km acima da superfície da Terra. (Veja as informações fornecidas nos Problemas 11.153-11.155.)

11.159 Um satélite percorre uma órbita circular em torno de Marte a uma altitude de 300 km. Após a altitude do satélite ter sido ajustada, constatou-se que o tempo gasto para percorrer uma órbita aumentou em 10%. Sabendo que o raio de Marte é de 3310 km, determine a nova altitude do satélite. (Veja as informações fornecidas nos Problemas 11.153-11.155.)

Figura *P11.160*

11.160 Dois satélites A e B percorrerem órbitas circulares coplanares em torno da Terra com altitudes de 190 e 320 km, respectivamente. Se em $t = 0$ os satélites estão alinhados como mostrado na figura e sabendo que o raio da Terra é $R = 6.370$ km, determine quando os satélites estarão radialmente alinhados de novo. (Veja as informações fornecidas nos Problemas 11.153-11.155.)

Figura P11.161

11.161 A trajetória de uma partícula P é um caracol de Pascal. O movimento da partícula é definido pelas relações $r = b(2 + \cos\theta)$ e $\theta = \pi t$, onde t e θ são expressos em segundos e radianos, respectivamente. Determine (a) a velocidade e a aceleração da partícula quando $t = 2$ s, (b) o valor de θ para o qual a intensidade da velocidade é máxima.

11.162 O movimento bidimensional de uma partícula é definido pelas relações $r = 2b\cos\omega t$ e $\theta = \omega t$, onde b e ω são constantes. Determine (a) a velocidade e a aceleração da partícula em qualquer instante, (b) o raio de curvatura da trajetória. O que se pode concluir em relação à trajetória da partícula?

11.163 A rotação da haste OA em torno de O é definida pela relação $\theta = \pi(4t^2 - 8t)$, onde θ e t são expressos em radianos e segundos, respectivamente. O cursor B desliza ao longo da haste de tal modo que sua distância do ponto O é $r = 10 + 6\,\text{sen}\,\pi t$, onde r e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Quando $t = 1$ s, determine (a) a velocidade do cursor, (b) a aceleração total do cursor, (c) a aceleração do cursor em relação a haste.

Figura P11.163 e *P11.164*

11.164 A oscilação da haste OA em torno de O é definida pela relação $\theta = (2/\pi)\,(\text{sen}\,\pi t)$, onde θ e t são expressos em radianos e segundos, respectivamente. O cursor B desliza ao longo da haste de tal forma que sua distância do ponto O é $r = 25/(t + 4)$, onde r e t são expressos em milímetros e segundos, respectivamente. Quando $t = 1$ s, determine (a) a velocidade do cursor, (b) a aceleração total do cursor, (c) a aceleração do cursor em relação à haste.

11.165 A trajetória de uma partícula P é um elipse definida pelas relações $r = 2/(2 - \cos\theta)$ e $\theta = \pi t$, onde r é expresso em metros, t em segundos e θ em radianos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 0{,}5$ s.

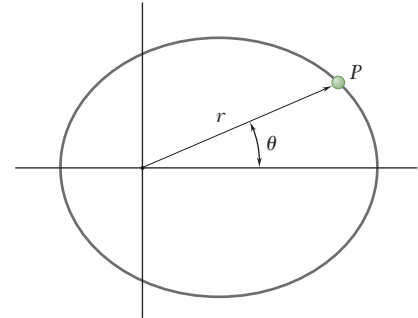



Figura P11.165

11.166 O movimento bidimensional de uma partícula é definido pelas relações $r = 2a\cos\theta$ e $\theta = bt^2/2$, onde a e b são constantes. Determine (*a*) as intensidades da velocidade e a aceleração em qualquer instante, (*b*) o raio de curvatura da trajetória. O que se pode concluir em relação à trajetória da partícula?

11.167 Para o estudo do desempenho de um carro de corrida posiciona-se uma câmera filmadora de alta velocidade no ponto A. A câmera é montada em um mecanismo que possibilita que ela grave o movimento do carro à medida que ele percorre a trajetória reta BC. Determine a velocidade escalar do carro em termos de b θ e $\dot{\theta}$.

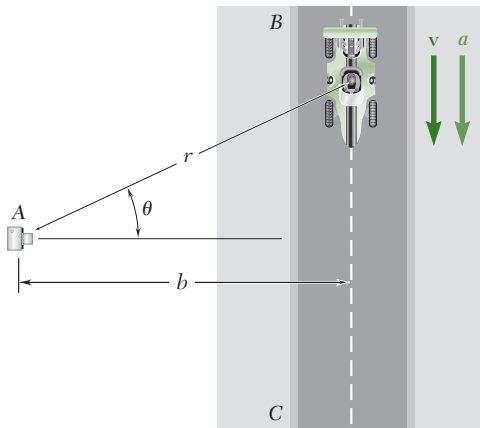



Figura *P11.167*

11.168 Determine a intensidade da aceleração do carro de corrida do Problema 11.167 em termos de θ, $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$.

11.169 Após a decolagem, um helicóptero sobe em linha reta em um ângulo constante de rampa β. Seu voo é rastreado por um radar localizado no ponto A. Determine a velocidade escalar do helicóptero em termos de d, β, θ e $\dot{\theta}$.

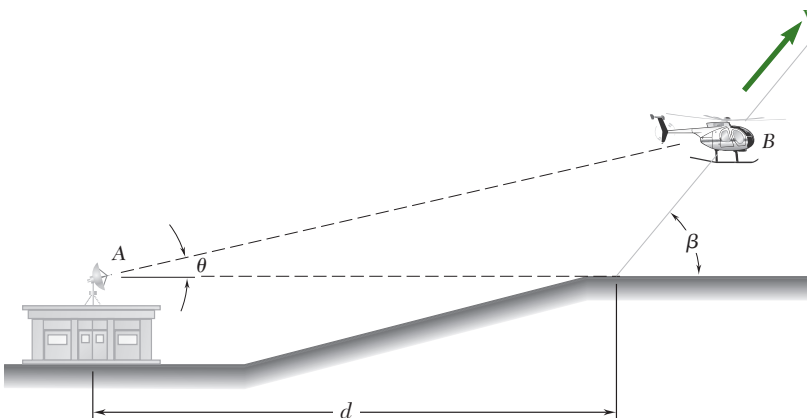



Figura P11.169

***11.170** O pino P está ligado à haste BC e desliza livremente ao longo da ranhura existente na haste AO. Determine a taxa de variação $\dot{\theta}$ do ângulo θ, sabendo que BC se move com velocidade escalar constante v_0. Expresse sua resposta em termos de v_0, h, β e θ.

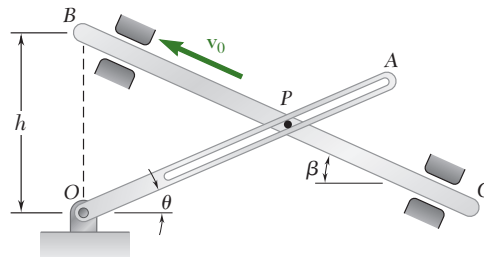



Figura P11.170

11.171 Para o carro de corrida do Problema 11.167 determinou-se que ele levou 0,5 s para se deslocar da posição $\theta = 60°$ para a posição $\theta = 35°$. Sabendo que $b = 25$ m, determine a velocidade escalar média do carro durante o intervalo de 0,5 s.

11.172 Para o helicóptero do Problema 11.169 determinou-se que, quando ele se encontrava no ponto B, a distância e o ângulo de rampa desse helicóptero eram $r = 900$ m e $\theta = 20°$, respectivamente. Quatro segundos depois, a estação de radar avistou o helicóptero na posição $r = 996$ m e $\theta = 23{,}1°$. Determine a velocidade escalar média e o ângulo de subida β do helicóptero durante o intervalo de 4 s.

11.173* e *11.174 Uma partícula se move ao longo da espiral mostrada na figura. Determine a intensidade da velocidade da partícula em termos de b, θ, $\dot{\theta}$.

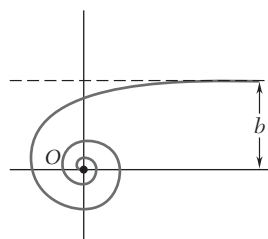
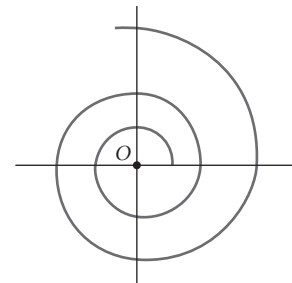



Figura P11.173 e P11.175 **Figura *P11.174* e P11.176**

11.175 e 11.176 Uma partícula se move ao longo da espiral mostrada na figura. Sabendo que $\dot{\theta}$ é constante e representando essa constante por ω, determine a intensidade da aceleração da partícula em termos de b, θ e ω.

11.177 Mostre que $\dot{r} = h\dot{\phi}$ sen θ sabendo que, para o instante mostrado na figura, o degrau AB do aparelho de ginástica está girando no sentido anti-horário a uma taxa constante $\dot{\phi}$.

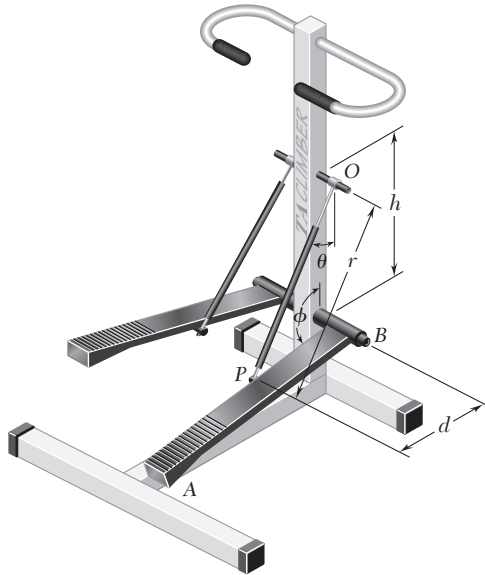



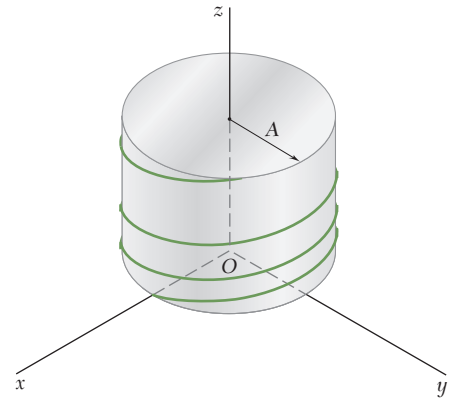
Figura P11.177

11.178 O movimento de uma partícula sobre a superfície de um cilindro circular reto é definido pelas relações $R = A$, $\theta = 2\pi t$ e $z = At^2/4$, onde A é uma constante. Determine as intensidades da velocidade e da aceleração da partícula em qualquer instante t.

Figura *P11.178*

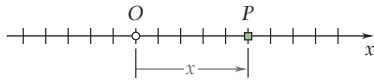
11.179 O movimento tridimensional de uma partícula é definido por suas coordenadas cilíndricas (veja a Fig. 11.26) $R = A/(t + 1)$, $\theta = Bt$ e $z = Ct/(t + 1)$. Determine as intensidades da velocidade e da aceleração quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = \infty$.

***11.180** Para a hélice cônica do Problema 11.95, determine o ângulo que o plano de oscilação forma com o eixo y.

***11.181** Determine a direção da binormal à trajetória descrita pela partícula do Problema 11.96 quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = \pi/2$ s.

REVISÃO E RESUMO

Coordenada de posição de uma partícula em movimento retilíneo

Figura 11.27

Na primeira metade do capítulo, analisamos o *movimento retilíneo de uma partícula,* isto é, o movimento de uma partícula ao longo de uma reta. Para definir a posição P da partícula sobre essa reta, escolhemos uma origem fixa O e um sentido positivo (Fig. 11.27). A distância x de O a P, com o sinal apropriado, define completamente a posição da partícula sobre a linha e é chamada de *coordenada de posição* da partícula [Seção 11.2].

Velocidade e aceleração em movimento retilíneo

Foi mostrado que a *velocidade* v da partícula é igual à derivada temporal da coordenada de posição x

$$v = \frac{dx}{dt} \tag{11.1}$$

e a *aceleração* a foi obtida diferenciando-se v em relação a t

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{11.2}$$

ou:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} \tag{11.3}$$

Notamos também que a aceleração a pode ser expressa como

$$a = v\frac{dv}{dx} \tag{11.4}$$

Observamos que a velocidade v e a aceleração a foram representadas por números algébricos que podem ser positivos ou negativos. Um valor positivo para v indica que a partícula se movimenta no sentido positivo, e um valor negativo indica que ela se move no sentido negativo. Porém, um valor positivo de a pode indicar que a partícula está sendo realmente acelerada (isto é, movendo-se cada vez mais rápido) no sentido positivo, ou que ela está sendo desacelerada (ou seja, movendo-se cada vez mais devagar) no sentido negativo. Um valor negativo para a tem uma interpretação análoga [Problema Resolvido 11.11].

Determinação da velocidade e aceleração por integração

Na maioria dos problemas, as condições de movimento de uma partícula são definidas pelo tipo de aceleração que essa partícula possui e pelas condições iniciais [Seção 11.3]. A velocidade e a posição da partícula podem, então, ser obtidas integrando duas das Eqs. de (11.1) a (11.4). A escolha de quais dessas equações devem ser selecionadas depende do tipo de aceleração envolvida [Problemas Resolvidos 11.2 e 11.3].

Movimento retilíneo uniforme

Dois tipos de movimentos são frequentemente encontrados: o *movimento retilíneo uniforme* [Seção 11.4], no qual a velocidade v da partícula é constante

$$x = x_0 + vt \tag{11.5}$$

e o *movimento retilíneo uniformemente acelerado* [Seção 11.5], no qual a aceleração a da partícula é constante e temos

Movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$v = v_0 + at \quad (11.6)$$
$$x = x_0 + v_0t + \tfrac{1}{2}at^2 \quad (11.7)$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (11.8)$$

Movimento relativo de duas partículas

Quando duas partículas A e B se movem ao longo da mesma linha reta, podemos querer considerar o *movimento relativo* de B em relação a A [Seção 11.6].

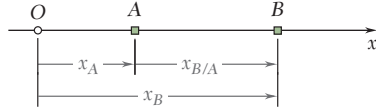



Figura 11.28

Representando por $x_{B/A}$ *a coordenada de posição relativa* de B em relação a A (Fig. 11.28), temos

$$x_B = x_A + x_{B/A} \quad (11.9)$$

Diferenciando a Eq. (11.9) duas vezes em relação a t, obtemos sucessivamente

$$v_B = v_A + v_{B/A} \quad (11.10)$$
$$a_B = a_A + a_{B/A} \quad (11.11)$$

onde $v_{B/A}$ e $a_{B/A}$ representam, respectivamente, a *velocidade relativa* e a *aceleração relativa* de B em relação a A.

Blocos unidos por cordas inextensíveis

Quando vários blocos estão *unidos por cordas inextensíveis*, é possível escrever uma *relação linear* entre as suas coordenadas de posição. Relações similares podem, então, ser escritas entre suas velocidades e entre suas acelerações e podem ser usadas para analisar o movimento desses blocos [Problema Resolvido 11.5].

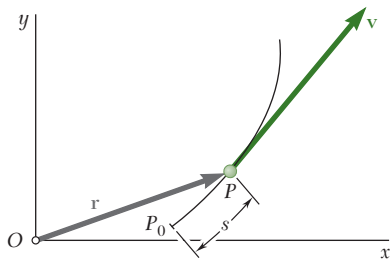
Soluções gráficas

Algumas vezes é conveniente utilizar uma *solução gráfica* para problemas que envolvem o movimento retilíneo de uma partícula [Seções 11.7 e 11.8]. A solução gráfica de modo geral utilizada envolve as curvas x-t, v-t e a-t [Seção 11.7; Problema Resolvido 11.6]. Foi mostrado que, para qualquer instante dado t,

$$v = \text{inclinação da curva } x\text{-}t$$
$$a = \text{inclinação da curva } v\text{-}t$$

ao passo que, para qualquer intervalo de tempo dado de t_1 até t_2

$$v_2 - v_1 = \text{área sob a curva } a\text{-}t$$
$$x_2 - x_1 = \text{área sob a curva } v\text{-}t$$

Vetor posição e velocidade em movimento curvilíneo

Na segunda metade do capítulo, analisamos o *movimento curvilíneo de uma partícula*, isto é, o movimento de uma partícula ao longo de uma trajetória curvilínea. A posição P da partícula, num dado instante [Seção 11.9], foi determinada pelo *vetor de posição* $\mathbf{r}$, que liga a origem O do sis-

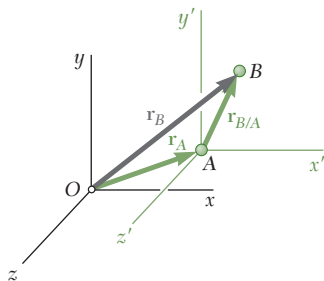



Figura 11.29

tema de coordenadas ao ponto P (Fig. 11.29). A *velocidade* v da partícula foi definida pela relação

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{11.15}$$

e foi visto ser um *vetor tangente à trajetória da partícula*, com intensidade v (chamada de *velocidade escalar* da partícula) igual à derivada temporal do comprimento s do arco descrito pela partícula:

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{11.16}$$

Aceleração em movimento curvilíneo

A *aceleração* **a** da partícula foi definida pela relação

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{11.18}$$

e notamos que, em geral, a *aceleração não é tangente à trajetória da partícula.*

Derivada de uma função vetorial

Antes de prosseguirmos com o estudo dos componentes de velocidade e aceleração, recapitulamos a definição formal da derivada de uma função vetorial e estabelecemos algumas regras que determinam a diferenciação de somas e produtos de funções vetoriais. Mostramos, então, que a taxa de variação de um vetor é a mesma em relação a um referencial fixo e a um referencial em translação [Seção 11.10].

Componentes retangulares de velocidade e aceleração

Representando por x, y e z as coordenadas retangulares de uma partícula P, encontramos que os componentes retangulares da velocidade e aceleração de P são iguais, respectivamente, às primeiras e segundas derivadas em relação a t das coordenadas correspondentes:

$$v_x = \dot{x} \qquad v_y = \dot{y} \qquad v_z = \dot{z} \tag{11.29}$$
$$a_x = \ddot{x} \qquad a_y = \ddot{y} \qquad a_z = \ddot{z} \tag{11.30}$$

Movimentos componentes

Quando o componente a_x da aceleração depende apenas de t, x e/ou v_x, e quando, analogamente, a_y depende de t, y e/ou v_y, e a_z de t, z e/ou v_z, as Eqs. (11.30) podem ser integradas independentemente. Nesse caso, a análise do movimento curvilíneo dado se reduz à análise de três movimentos componentes retilíneos independentes [Seção 11.1]. Esse procedimento é particularmente eficaz no estudo do movimento de projéteis [Problemas Resolvidos 11.7 e 11.8].

Movimento relativo de duas partículas

Para duas partículas A e B que se movem no espaço (Fig. 11.30), consideramos o movimento relativo de B em relação a A, ou, mais precisamente, em relação a um sistema móvel de coordenadas fixado em A e em translação com A [Seção 11. 12]. Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o *vetor de posição relativa* de B em relação a A (Fig. 11.30), obtivemos

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{11.31}$$

Representando por $\mathbf{v}_{B/A}$ e $\mathbf{a}_{B/A}$ respectivamente, a *velocidade relativa* e a *aceleração relativa* de B em relação a A, mostramos também que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{11.33}$$

e

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{11.34}$$

Figura 11.30

Componentes tangencial e normal

Em alguns casos, é conveniente decompor a velocidade e a aceleração de uma partícula P em termos de outros componentes que não os componentes retangulares x, y e z. Para uma partícula P que se move ao longo de uma trajetória plana, fixamos a P os vetores unitários $\mathbf{e}_t$, tangente à trajetória, e $\mathbf{e}_n$, normal à trajetória, e apontamos para o centro de curvatura dessa trajetória [Seção 11.13]. Expressamos, então, a velocidade e a aceleração da partícula em termos de seus componentes tangencial e normal. Escrevemos

$$\mathbf{v} = v\mathbf{e}_t \tag{11.36}$$

e

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{e}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{e}_n \tag{11.39}$$

onde v é a velocidade escalar da partícula e p o raio de curvatura de sua trajetória [Problemas Resolvidos 11.10 e 11.11], Observamos que enquanto a velocidade $\mathbf{v}$ é sempre dirigida ao longo da tangente para a trajetória, a aceleração $\mathbf{a}$ consiste em um componente tangencial $\mathbf{a}_t$ dirigido ao longo da tangente para a trajetória e um componente normal $\mathbf{a}_n$ apontando para o centro de curvatura da trajetória (Fig. 11.31).

Figura 11.31

Movimento ao longo de uma curva no espaço

Para uma partícula P que se desloca ao longo de uma curva no espaço, definimos como *plano osculador* o plano que melhor se ajusta à trajetória nas redondezas de P. Esse plano contém os vetores unitários $\mathbf{e}_t$ e $\mathbf{e}_n$ que definem, respectivamente, a tangente e a normal principal à curva. O vetor unitário $\mathbf{e}_b$, que é perpendicular ao plano osculador, define a *binormal.*

Componentes radial e transversal

Quando a posição de uma partícula P que se move em um plano é definida por suas coordenadas polares r e θ, é conveniente usar as componentes radial e transversal dirigidas, respectivamente, ao longo do vetor de posição $\mathbf{r}$ da partícula e na direção obtida pela rotação do vetor $\mathbf{r}$ de 90° no sentido anti-horário [Seção 11.14]. Fixamos em P os vetores unitários $\mathbf{e}_r$, e $\mathbf{e}_\theta$ dirigidos, respectivamente, nas direções radial e transversal (Fig 11.32). Expressamos, então, a velocidade e aceleração da partícula em termos dos componentes radial e transversal

Figura 11.32

$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \tag{11.43}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta \tag{11.44}$$

onde os pontos são usados para indicar derivação em relação ao tempo. Os componentes escalares da velocidade e aceleração nas direções radial e transversal são, portanto:

$$v_r = \dot{r} \qquad v_\theta = r\dot{\theta} \tag{11.45}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} = 2\dot{r}\dot{\theta} \tag{11.46}$$

É importante notar que a_r *não* é igual à derivada temporal de v_r e que a_θ *não* é igual à derivada temporal de v_θ [Problema Resolvido 11.12].

O capítulo se encerra com uma discussão sobre o uso de coordenadas cilíndricas para definir a posição e o movimento de uma partícula no espaço.

PROBLEMAS DE REVISÃO

Figura P11.184

Figura P11.186

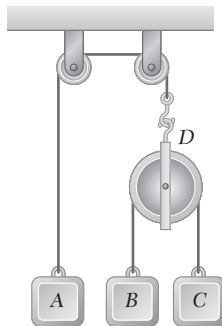



Figura P11.187

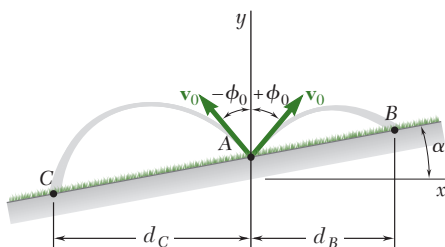



Figura *P11.188*

11.182 O movimento de uma partícula é definida pela relação $x = 2t^3 - 15t^2 + 24t + 4$, onde x e t são expressos em metros e segundos, respectivamente. Determine (*a*) quando a velocidade é zero, (*b*) a posição e a distância total percorrida quando a aceleração é zero.

11.183 A aceleração de uma partícula é definida pela relação $a = -60x^{-1,5}$, onde a e x são expressos em m/s^2 e metros, respectivamente. Sabendo que a partícula parte sem velocidade inicial em $x = 4$ m, determine a velocidade da partícula quando (*a*) $x = 2$ m, (*b*) $x = 1$ m, (*c*) $x = 100$ m.

11.184 Um projétil entra em um meio resistente em $x = 0$ com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0 = 270$ m/s e percorre 100 mm antes de entrar em repouso. Considerando que a velocidade do projétil é definida pela relação $v = v_0 - kx$, onde v é expressa em m/s e x é em metros, determine (*a*) a aceleração inicial do projétil, (*b*) o tempo requerido para que o projétil penetre 97,5 mm no meio resistente.

11.185 Um elevador de carga subindo com velocidade constante de 1,8 m/s passa por um elevador de passageiros que está parado. Quatro segundos depois, o elevador de passageiros começa a subir com uma aceleração constante de 0,72 m/s^2. Determine (*a*) quando e onde os elevadores estarão na mesma altura, (*b*) a velocidade escalar do elevador de passageiros naquele instante.

11.186 O bloco C parte do repouso em $t = 0$ e move-se para cima com aceleração constante de 25 mm/s^2. Sabendo que o bloco A move-se para baixo com velocidade constante de 75 mm/s, determine (*a*) o instante no qual a velocidade do bloco B é zero, (*b*) a posição do bloco B correspondente.

11.187 Os três blocos mostrados na figura movem-se com velocidades constantes. Encontre a velocidade de cada bloco, sabendo que a velocidade relativa de A com relação a C é 300 mm/s para cima e que a velocidade relativa de B com relação a A é 200 mm/s para baixo.

11.188 Um irrigador de água oscilante é colocado no ponto A de uma inclinação que forma um ângulo α com a horizontal. O irrigador libera água com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ em um ângulo ϕ com a vertical que varia se $-\phi_0$ até $+\phi_0$. Sabendo que $\mathbf{v}_0 = 9$ m/s, $\phi_0 = 40°$ e $\alpha = 10°$, determine a distância horizontal entre o irrigador e os pontos B e C que definem a área molhada.

11.189 Como o motorista de um automóvel viaja para o norte a 25 km/h em um estacionamento, ele observa um caminhão aproximando pelo noroeste. Depois ele reduz sua velocidade escalar para 15 km/h e assim que gira, viajando na direção noroeste, o caminhão parece estar se aproximando pelo oeste. Considerando que a velocidade do caminhão é constante durante o período de observação, determine a intensidade e a direção da velocidade do caminhão.

11.190 O motorista de um automóvel diminui sua velocidade escalar numa taxa constante de 72 km/h para 48 km/h em uma distância de 225 m ao longo de uma curva de raio 450 m. Determine a intensidade da aceleração total do automóvel depois que o automóvel tiver percorrido 150 m ao longo da curva.

11.191 Um morador usa o removedor de neve para limpar a entrada de sua garagem. Sabendo que a neve é lançada a um ângulo médio de 40° com a horizontal, determine a velocidade inicial v_0 da neve.

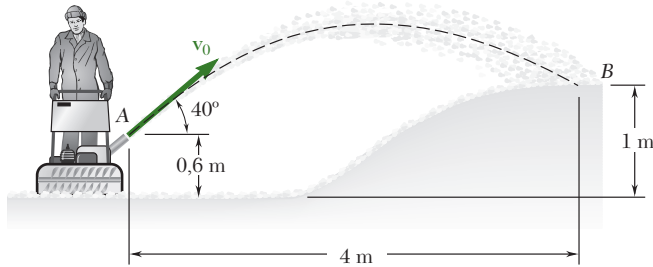



Figura *P11.191*

11.192 A partir de medições de uma fotografia, verificou-se que o fluxo de água mostrado na figura deixa o bocal em A e tem raio de curvatura de 25 m. Determine (a) a velocidade inicial $\mathbf{v}_A$ do fluxo, (b) o raio da curvatura do fluxo se ele alcança sua altura máxima em B.

Figura *P11.192*

11.193 Na parte baixa do *loop* em um plano vertical, um aeroplano tem velocidade de 150 m/s e está acelerando a uma taxa de 25 m/s^2. O raio de curvatura do *loop* é 2.000 m. O aeroplano está sendo controlado pelo radar em O. Qual é o valor registrado de $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$ para esse instante?

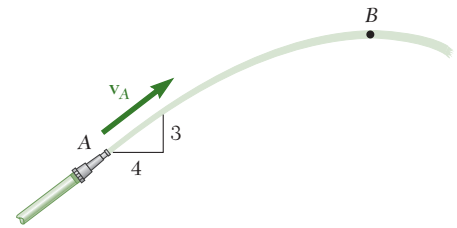
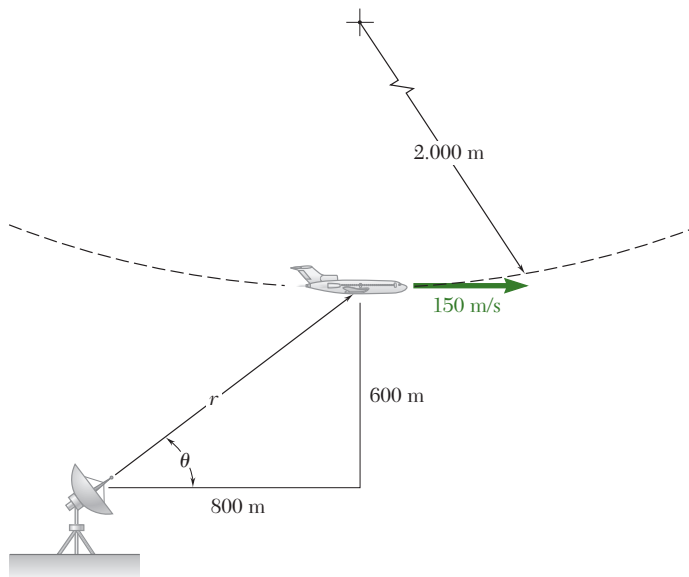



Figura P11.193

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

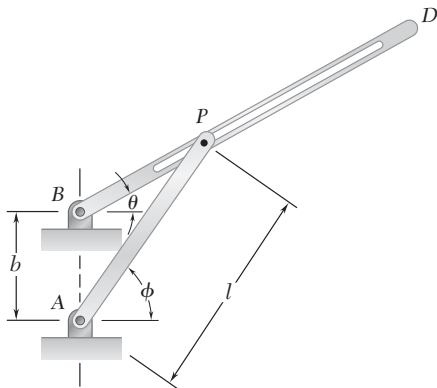



Figura P11.C1

11.C1 O mecanismo mostrado na figura é conhecido como um mecanismo *Whitworth* de retorno rápido. A haste motora (*input*) AP gira com uma taxa constante $\dot{\phi}$, e o pino P pode deslizar livremente ao longo da ranhura da haste movida (*output*) BD. Usando um programa de computador, calcule e trace θ *versus* ϕ e $\dot{\phi}$ versus ϕ para uma rotação da haste AP. Considere $\dot{\phi} = 1$ rad/s, $l = 100$ mm, (a) $b = 62{,}5$ mm, (b) $h = 75$ mm, (c) $b = 87{,}5$ mm.

11.C2 Uma bola é jogada com velocidade $\mathbf{v}_0$ a um ângulo α com a vertical no degrau mais alto de um lance de escadas de 8 degraus. A bola quica e salta nos degraus abaixo como mostrado na figura. A cada instante que a bola quica nos pontos A, B, C, ..., a componente horizontal de sua velocidade permanece constante e a intensidade da componente vertical de sua velocidade é reduzida em k por cento. Usando um programa de computador determine (a) se a bola quica nos degraus abaixo sem saltar qualquer degrau, (b) se a bola quica nos degraus abaixo sem quicar duas vezes no mesmo degrau, (c) o primeiro degrau no qual a bola quica duas vezes. Use valores de v_0 de 1,8 m/s até 3,0 m/s, com 0,6 m/s de incremento, valores de α de 18° até 26° fazer com 4°, de incremento, e valores de k iguais de 40 a 50.

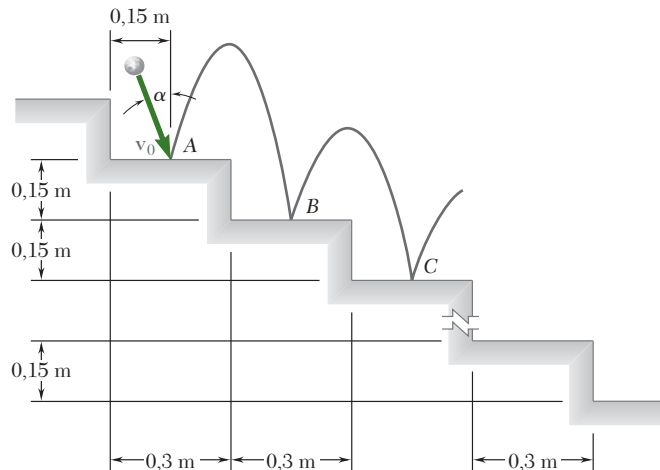



Figura P11.C2

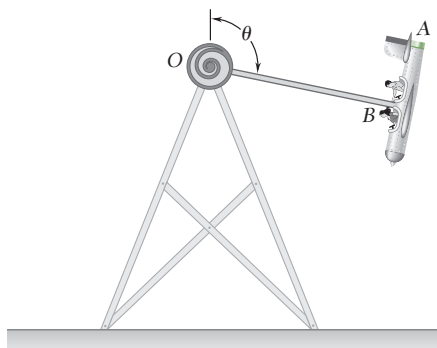



Figura P11.C3

11.C3 Num brinquedo de um parque de diversões, o "avião" A está unido ao elemento rígido OB de 10 m de comprimento. Para operar esse brinquedo, o avião e OB são girados de modo que $70° \leq \theta_0 \leq 130°$ e, então soltos para oscilar livremente em torno de O. O avião está sujeito à aceleração da gravidade e á desaceleração devida à resistência do ar, $-kv^2$, que atua em uma direção oposta àquela de sua velocidade $\mathbf{v}$. Desprezando a massa, o arrasto aerodinâmico de OB e o atrito no mancal O, use um programa de computador para determinar a velocidade escalar do avião para dados valores de θ_0 e θ e o valor de θ em que o avião chega primeiro ao repouso depois de ser solto. Use valores de θ_0 de 70° a 130° em incrementos de 30°, e determine a velocidade escalar máxima do avião e os dois primeiros valores de θ em que $v = 0$. Para cada valor de θ_0, faça (a) $k = 0$, (b) $k = 2 \times 10^{-4}$ m^{-1}, (c) $k = 4{,}0 \times 10^{-2}$ m^{-1}. (*Dica:* Expresse a aceleração tangencial do avião em termos de g, k e θ. Recorde que $v_\theta = r\dot{\theta}$.)

11.C4 Um motorista, viajando por uma rodovia a uma velocidade escalar de 90 km/h, sai para uma rampa coberta de gelo. Desejando parar, ele aplica os freios até seu automóvel ficar em repouso. Sabendo que a intensidade da aceleração total do automóvel não pode exceder a 3 m/s^2, usando um programa de computador, determine o tempo mínimo necessário para o automóvel ficar em repouso e a distância percorrida por ele na rampa durante esse tempo se a rampa (*a*) é reta, (*b*) tem um raio de curvatura constante de 240 m. Resolva cada parte considerando que o motorista aplica os freios, assim dv/dt, durante cada intervalo de tempo, (1) permanece constante, (2) varia linearmente.

11.C5 Um irrigador de jardim oscilatório libera água com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ de 10 m/s. (*a*) Sabendo que os lados, mas não o topo do caramanchão *BCDE*, são abertos, usando um programa de computador calcule a distância *d* até o ponto *F* que será molhada para valores de α de 20° a 80° e (*b*) determine o valor máximo de *d* e o valor de α correspondente.

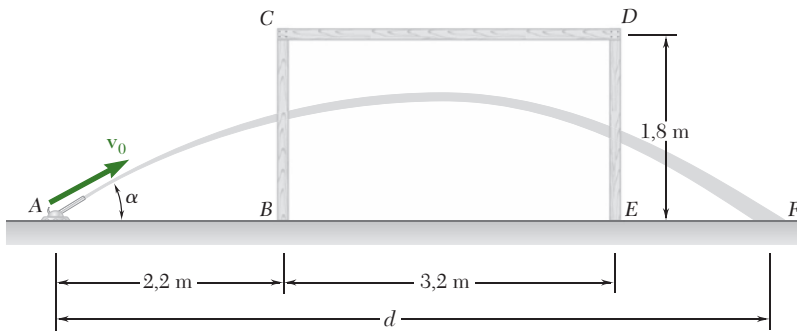



Figura P11.C5

A força experimentada pelos passageiros em um carro de montanha-russa dependerá se o carro está subindo ou descendo uma colina em linha reta ou ao longo de uma trajetória curvilínea horizontal ou vertical. A relação existente entre força, massa e aceleração será estudada neste capítulo.

CAPÍTULO 12

Cinemática de partículas: a segunda lei de Newton

12 Cinemática de partículas: a segunda lei de Newton

12.1 Introdução

A primeira e a terceira leis de Newton do movimento foram extensivamente empregadas na Estática para estudar corpos em repouso e as forças que atuam sobre eles. Essas duas leis também são usadas em Dinâmica; de fato, elas são suficientes para o estudo do movimento de corpos que não têm aceleração. Entretanto, quando os corpos são acelerados, isto é, quando a intensidade ou a direção de suas velocidades mudam, é necessário utilizar a segunda lei de Newton do movimento para relacionar o movimento do corpo às forças que atuam sobre ele.

Neste capítulo, discutiremos a segunda lei de Newton e a aplicaremos à análise do movimento de partículas. Como enunciaremos na Seção 12.2, se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula não for zero, a partícula terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na direção e sentido dessa força resultante. Mais ainda, a razão entre as intensidades da força resultante e da aceleração pode ser usada para definir a *massa* da partícula.

Na Seção 12.3, a *quantidade de movimento linear* de uma partícula é definida como o produto $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ da massa m pela velocidade $\mathbf{v}$ da partícula. Também é demonstrado que a segunda lei de Newton pode ser expressa de forma alternativa, relacionando a taxa de variação da quantidade de movimento linear com a resultante das forças que atuam nessa partícula.

A Seção 12.4 enfatiza a necessidade de um sistema consistente de unidades para a solução de problemas de Dinâmica e fornece uma revisão do Sistema Internacional de Unidades (unidades do SI).

Nas Seções 12.5 e 12.6 e nos Problemas Resolvidos subsequentes, a segunda lei de Newton é aplicada à solução de problemas de engenharia, empregando tanto componentes retangulares quanto componentes tangencial e normal das forças e acelerações envolvidas. Recordamos que um corpo real – incluindo corpos tão grandes quanto um carro, um foguete ou um avião – pode ser considerado como uma partícula para a finalidade de analisar-se o seu movimento, contanto que o efeito de uma rotação do corpo em torno de seu centro de massa possa ser ignorado.

A segunda parte deste capítulo é dedicada à solução de problemas em termos dos componentes radial e transversal, com ênfase especial no movimento de uma partícula sob a ação de uma força central. Na Seção 12.7, a quantidade de *movimento angular* $\mathbf{H}_O$ de uma partícula em relação a um ponto O é definida como o momento em relação a O da quantidade de movimento linear da partícula: $\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. Segue-se, então, da segunda lei de Newton que a taxa de variação temporal da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ de uma partícula é igual à soma dos momentos em relação a O das forças que atuam sobre essa partícula.

A Seção 12.9 trata do movimento de uma partícula sob a ação de uma *força central*, isto é, sob a ação de uma força direcionada para, ou afastando-se de, um ponto fixo O. Como tal força tem momento igual a zero em relação ao ponto O, segue-se que a quantidade de movimento angular da partícula em relação a O se mantém. Essa propriedade simplifica muito a análise do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central; na Seção 12.10, ela é aplicada à solução de problemas que envolvem o movimento orbital de corpos sob atração gravitacional.

As Seções de 12.11 a 12.13 são opcionais. Elas apresentam uma discussão mais ampla do movimento orbital e contêm um certo número de problemas relacionados à mecânica espacial.

12.2 A segunda lei de Newton do movimento

A segunda lei de Newton pode ser enunciada como se segue:

Se a força resultante que atua sobre uma partícula não for nula, a partícula terá uma aceleração proporcional à intensidade da resultante e na mesma direção dessa força resultante.

A segunda lei de Newton do movimento é mais bem compreendida se imaginarmos o seguinte experimento: uma partícula está sujeita a uma força $\mathbf{F}_1$ de direção e intensidade constantes F_1. Sob a ação dessa força, a partícula se desloca em uma linha reta e *na direção e sentido da força* (Fig. 12.1*a*). Determinando a posição da partícula em vários instantes, verificamos que sua aceleração tem uma intensidade constante a_1. Se o experimento for repetido com forças $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... de diferentes intensidades ou direções (Fig. 12.1*b e c*), constatamos que, para cada caso, a partícula se move na direção e sentido da força que atua sobre ela e que as intensidades a_1, a_2, a_3 das acelerações são proporcionais às intensidades F_1, F_2, F_3, ... das forças correspondentes:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \frac{F_3}{a_3} = \cdots = \text{constante}$$

(*a*)

(*b*)

(*c*)

Figura 12.1

O valor constante obtido para a relação entre as intensidades das forças e acelerações é uma característica da partícula que está sendo considerada; ele é chamado de *massa* da partícula e é representado por *m*. Quando uma força $\mathbf{F}$ atua sobre uma partícula de massa *m*, a força $\mathbf{F}$ e a aceleração $\mathbf{a}$ dessa partícula devem, portanto, satisfazer à relação

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.1}$$

Figura 12.2

Essa relação fornece uma formulação completa da segunda lei de Newton; ela expressa não somente que as intensidades de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{a}$ são proporcionais, mas também (como *m* é um escalar positivo) que os vetores $\mathbf{F}$ e a têm $\mathbf{a}$ mesma direção e sentido (Fig 12.2). Devemos notar que a Eq. (12.1) permanece válida quando $\mathbf{F}$ não for constante, mas varia com o tempo em intensidade ou direção. As intensidades de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{a}$ permanecem proporcionais, e os dois vetores têm a mesma direção e sentido em qualquer instante dado. Entretanto, esses vetores não serão, em geral, tangentes à trajetória da partícula.

Quando uma partícula estiver sujeita simultaneamente a várias forças, a Eq. (12.1) deve ser substituída por

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

onde $\Sigma\mathbf{F}$ representa a soma, ou resultante, de todas as forças que atuam sobre a partícula.

Deve-se observar que o sistema de eixos de referência em relação ao qual a aceleração $\mathbf{a}$ é determinada não é arbitrário. Esses eixos devem ter uma orientação constante em relação às estrelas e sua origem deve estar fixa no Sol* ou se deslocar com uma velocidade constante em relação a ele. Tal sistema de eixos é chamado de *sistema de referência*

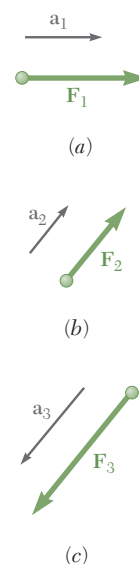
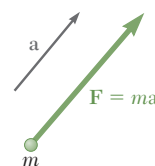



Foto 12.1 Quando o carro de corrida acelera para frente, os pneus traseiros sofrem uma força de atrito atuando na direção em que o carro está se movimentando.

* Mais precisamente, no centro de massa do sistema solar.

*newtoniano**. Um sistema de eixos fixos na Terra *não* constitui um sistema de referência newtoniano, pois a Terra gira em relação às estrelas e está acelerada em relação ao Sol. Entretanto, na maioria das aplicações da engenharia, a aceleração **a** pode ser determinada em relação a eixos ligados a Terra, e as Eqs. (12.1) e (12.2) podem ser usadas sem qualquer erro apreciável. Por outro lado, essas equações não valem se **a** representa uma aceleração relativa, medida em relação a eixos em movimento, tais como eixos ligados a um carro acelerado ou a uma peça rotativa de uma máquina.

Observamos que se a resultante $\Sigma\mathbf{F}$ das forças que atuam sobre a partícula for zero, segue-se da Eq. (12.2) que a aceleração **a** dessa partícula também é zero. Se a partícula está inicialmente em repouso ($\mathbf{v}_0 = 0$) em relação ao sistema de referência newtoniano usado, ela permanecerá então em repouso ($\mathbf{v} = 0$). Se a partícula estiver originalmente com uma velocidade $\mathbf{v}_0$, ela manterá uma velocidade constante $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$; ou seja, ela se moverá com velocidade escalar constante v_o em uma linha reta. Lembrando, essa é a expressão da primeira lei de Newton (Seção 2.10). Portanto, a primeira lei de Newton é um caso particular da segunda lei de Newton e pode ser omitida dos princípios fundamentais da mecânica.

12.3 Quantidade de movimento linear de uma partícula. Taxa de variação da quantidade de movimento linear

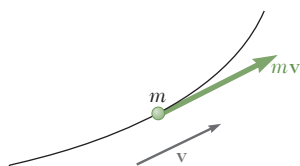
Substituindo a aceleração **a** pela derivada $d\mathbf{v}/dt$ na Eq. (12.2), escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

ou, uma vez que a massa m da partícula é constante

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \qquad (12.3)$$

Figura 12.3

O vetor $m\mathbf{v}$ é chamado de *quantidade de movimento linear* da partícula. Ele tem a mesma direção e sentido que a velocidade da partícula e sua intensidade é igual ao produto da massa m pela velocidade escalar v dessa partícula (Fig. 12.3). A Eq. (12.3) expressa que *a resultante das forças que atuam sobre uma partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento linear dessa partícula.* Foi sob essa forma que a segunda lei do movimento foi originalmente enunciada por Newton. Representando por **L** a quantidade de movimento linear da partícula,

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v} \qquad (12.4)$$

e por $\dot{\mathbf{L}}$ sua derivada em relação a t, podemos escrever a Eq. (12.3) na forma alternativa

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (12.5)$$

* Como as estrelas, na realidade, não são fixas, uma definição mais rigorosa de um sistema de referência newtoniano (também chamado de *sistema inercial*) *é um sistema em relação ao qual a Eq.* (12.2) *é válida.*

Deve-se notar que a massa m da partícula foi assumida como sendo constante nas Eqs. (12.3) a (12.5). As Eqs. (12.3) ou (12.5), portanto, não devem ser utilizadas para resolver problemas envolvendo o movimento de corpos, tais como foguetes, que ganham ou perdem massa. Problemas desse tipo serão considerados na Seção 14.12.*

Decorre da Eq. (12.3) que a taxa de variação da quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}$ é zero quando $\Sigma\mathbf{F} = 0$. Portanto, *se a força resultante que atua sobre a partícula é zero, a quantidade de movimento linear dessa partícula permanece constante tanto em intensidade quanto em direção e sentido.* Esse é o princípio da *conservação da quantidade de movimento linear* para uma partícula, que pode ser reconhecido como um enunciado alternativo da primeira lei de Newton (Seção 2.10).

12.4 Sistemas de unidades

Usando-se a equação fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, as unidades de força, massa, comprimento e tempo não podem ser escolhidas de maneira arbitrária. Se forem, a intensidade da força $\mathbf{F}$ necessária para dar uma aceleração $\mathbf{a}$ à massa *m não* será numericamente igual ao produto *ma;* ela seria somente proporcional a esse produto. Portanto, podemos escolher três das quatro unidades arbitrariamente, mas devemos escolher a quarta unidade de modo que a equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ seja satisfeita. Dizemos então que as unidades formam um sistema de unidades cinéticas consistentes.

Um sistema de unidades cinéticas consistentes é comumente usado por engenheiros: o Sistema Internacional de Unidades (unidades SI). Tal sistema foi discutido em detalhe na Seção 1.3 e está brevemente descrito nesta seção.

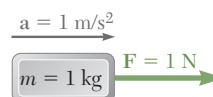
Sistema Internacional de Unidades (Unidades SI). Nesse sistema, as unidades de base são as unidades de comprimento, massa e tempo chamadas, respectivamente, de *metro* (m), *quilograma* (kg) e *segundo* (s). Todas as três são arbitrariamente definidas (Seção 1.3). A unidade de força é uma unidade derivada. Ela é chamada de *newton* (N) e é definida como a força que produz uma aceleração de 1 m/s^2 em uma massa de 1 kg (Fig 12.4). Da Eq. (12.1), escrevemos

Figura 12.4

$$1\ \text{N} = (1\ \text{kg})\ (1\ \text{m/s}^2) = 1\ \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$$

Diz-se que as unidades SI formam um sistema *absoluto* de unidades. Isto significa que as três unidades de base escolhidas são independentes do local onde as medidas são feitas. O metro, o quilograma e o segundo podem ser usados em qualquer lugar na Terra; até em outro planeta. Terão sempre o mesmo significado.

O *peso* $\mathbf{W}$ de um corpo, ou a *força da gravidade* exercida sobre esse corpo, deve, como qualquer outra força, ser expresso em newtons. Como um corpo sujeito a seu peso próprio adquire uma aceleração igual à aceleração da gravidade g, segue-se da segunda lei de Newton que a intensidade W do peso de um corpo de massa m é

$$W = mg \tag{12.6}$$

* Por outro lado, as Eqs. (12.3) e (12.5) valem em *mecânica relativística,* onde a massa m da partícula é assumida como variável de acordo com a velocidade escalar dessa partícula.

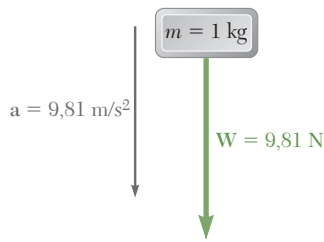



Figura 12.5

Recordando que g = 9,81 m/s², verificamos que o peso de um corpo de massa de 1 kg (Fig. 12.5) é

$$W = (1 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 9{,}81 \text{ N}$$

Múltiplos e submúltiplos das unidades de comprimento, massa e força são usados frequentemente na prática de engenharia. Eles são, respectivamente: *quilômetro* (km) e *milímetro* (mm); *megagrama** (Mg) e *grama* (g); e *quilonewton* (kN). Por definição,

$$1 \text{ km} = 1.000 \text{ m} \qquad 1 \text{ mm} = 0{,}001 \text{ m}$$
$$1 \text{ Mg} = 1.000 \text{ kg} \qquad 1 \text{ g} = 0{,}001 \text{ kg}$$
$$1 \text{ kN} = 1.000 \text{ N}$$

A conversão dessas unidades em metros, quilogramas e newtons, respectivamente, pode ser efetivada simplesmente movendo-se o ponto decimal três casas para a direita ou para a esquerda.

Outras unidades, além das unidades de massa, comprimento e tempo, podem ser expressas em termos dessas três unidades de base. Por exemplo, a unidade da quantidade de movimento linear pode ser obtida recordando a definição de quantidade de movimento linear e escrevendo

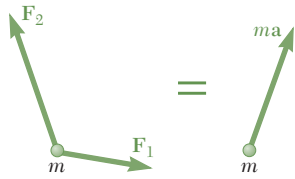
$$mv = (\text{kg})(\text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

12.5 Equações de movimento

Considere uma partícula de massa m sob a ação de diversas forças. Recordamos da Seção 12.2 que a segunda lei de Newton pode ser expressa pela equação

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

Figura 12.6

que relaciona as forças que atuam sobre a partícula e o vetor $m\mathbf{a}$ (Fig 12.6). Entretanto, para resolver problemas que envolvem o movimento de uma partícula, veremos que é mais conveniente substituir a Eq. (12.2) por equações equivalentes que incluem quantidades escalares.

Componentes retangulares. Decompondo cada força **F** e a aceleração **a** em componentes retangulares, escrevemos

$$\Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

da qual se segue que

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.7}$$

Relembrando a partir da Seção 11.11 que os componentes da aceleração são iguais às derivadas segundas das coordenadas da partícula, temos

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z} \tag{12.7$'$}$$

Considere, como exemplo, o movimento de um projétil. Se a resistência do ar for desprezada, a única força que atua no projétil após ele ter sido disparado é seu peso $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$. As equações que definem o movimento do projétil são, portanto,

$$m\ddot{x} = 0 \qquad m\ddot{y} = -W \qquad m\ddot{z} = 0$$

* Também conhecido como tonelada métrica.

e os componentes da aceleração do projétil são:

$$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -\frac{W}{m} = -g \qquad \ddot{z} = 0$$

onde g é 9,81 m/s^2. As equações obtidas podem ser integradas independentemente, como mostrado na Seção 11.11, para se obter a velocidade e o deslocamento do projétil em qualquer instante.

Quando um problema envolve dois ou mais corpos, equações de movimento devem ser escritas para cada um dos corpos (ver os Problemas Resolvidos 12.3 *e* 12.4). Você vai se recordar da Seção 12.2, que todas as acelerações devem ser medidas em relação a um sistema de referência newtoniano. Na maioria das aplicações de engenharia, as acelerações podem ser determinadas em relação a eixos presos a Terra, mas as acelerações relativas medidas com respeito a eixos em movimento, tais como eixos presos a um corpo acelerado, não podem ser usadas para substituir **a** nas equações de movimento.

Foto 12.2 O piloto de um avião de caça experimentará forças normais grandes ao executar uma curva acentuada.

Componentes normal e tangencial. Decompondo as forças e a aceleração da partícula em componentes ao longo da tangente à trajetória (na direção e sentido do movimento) e da normal (apontando para o interior da trajetória) (Fig. 12.7) e substituindo-as na Eq. (12.2), obtemos duas equações escalares

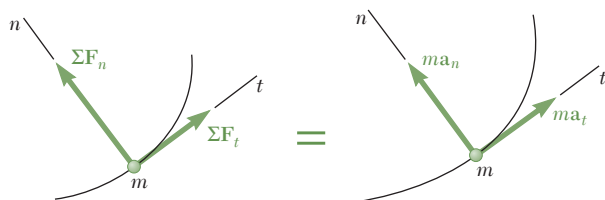



Figura 12.7

$$\Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_n = ma_n \tag{12.8}$$

Substituindo as expressões de a_t e a_n das Eqs. (*11.40*), temos

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.8'}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

12.6 Equilíbrio dinâmico

Retornando à Eq. (12.2) e transpondo o membro do lado direito, escrevemos a segunda lei de Newton na forma alternativa

$$\Sigma \mathbf{F} - m\mathbf{a} = 0 \tag{12.9}$$

a qual expressa que, se adicionarmos o vetor-$m\mathbf{a}$ às forças que atuam sobre a partícula, *obtemos um sistema de vetores equivalente a zero* (Fig. 12.8). O vetor $-m\mathbf{a}$, de intensidade ma e de mesma *direção e sentido oposto* ao da aceleração, é chamado de um *vetor de inércia.* A partícula pode, portanto, ser considerada em equilíbrio sob a ação das forças dadas e do vetor de inércia. Diz-se que a partícula está em *equilíbrio dinâmico*,

Figura 12.8

e o problema em consideração pode ser resolvido pelos métodos desenvolvidos anteriormente em Estática.

No caso de forças coplanares, todos os vetores mostrados na Fig 12.8, *incluindo o vetor de inércia,* podem ser traçados no padrão ponta-a-cauda para formar um polígono de vetores fechado. Ou então as somas dos componentes de todos os vetores da Fig. 12.8, incluindo novamente o vetor de inércia, podem ser igualadas a zero. Usando componentes retangulares, escrevemos, portanto

$$\Sigma F_x = 0 \qquad \Sigma F_y = 0 \quad \textbf{\textit{incluindo vetor de inércia}} \qquad (12.9')$$

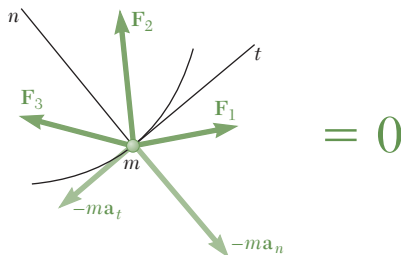
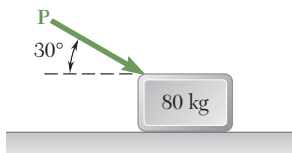



Figura 12.9

Quando os componentes tangencial e normal são utilizados, é mais conveniente representar o vetor de inércia por seus dois componentes $-m\mathbf{a}_t$ e $-m\mathbf{a}_n$, no próprio esboço (Fig. 12.9). O componente tangencial do vetor de inércia fornece uma medida da resistência que a partícula oferece a uma mudança na velocidade escalar, enquanto seu componente normal (também chamado de *força centrífuga*) representa a tendência da partícula de abandonar sua trajetória curvilínea. Devemos notar que qualquer destes dois componentes pode ser zero sob condições especiais: (1) se a partícula parte do repouso, sua velocidade inicial é zero e o componente normal do vetor de inércia é zero em $t = 0$; (2) se a partícula se move com velocidade escalar constante ao longo de sua trajetória, o componente tangencial do vetor de inércia é zero e somente seu componente normal precisa ser considerado.

Como eles medem a resistência que as partículas oferecem quando tentamos colocá-las em movimento ou quando tentamos mudar as condições de seus movimentos, os vetores de inércia são frequentemente chamados *forças de inércia.* As forças de inércia, entretanto, não são forças como aquelas encontradas na Estática, que são forças de contato ou forças gravitacionais (pesos). Muitas pessoas, por essa razão, fazem objeção à utilização da palavra "força" em referência ao vetor $-m\mathbf{a}$, ou mesmo evitam completamente o conceito de equilíbrio dinâmico. Outros chamam a atenção para o fato de que forças de inércia e forças reais, como as forças gravitacionais, afetam nossos sentidos da mesma maneira e não podem ser distinguidas por medidas físicas. Um homem em um elevador que está acelerado para cima terá a sensação de que seu peso aumentou de repente; e nenhuma medida realizada dentro do elevador pode estabelecer se ele está verdadeiramente acelerado ou se a força de atração exercida pela Terra aumentou subitamente.

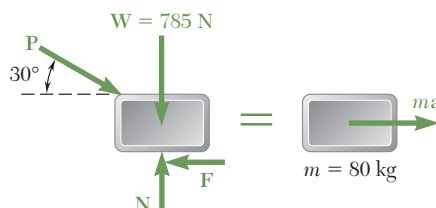
Foto 12.3 O ângulo que cada passageiro tem com relação à horizontal dependerá do peso do passageiro e da velocidade de rotação.

Os problemas resolvidos foram feitos neste texto pela aplicação direta da segunda lei de Newton, como ilustrado nas Figs. 12.6 e 12.7, em vez de pelo método do equilíbrio dinâmico.

PROBLEMA RESOLVIDO 12.1

Um bloco de 80-kg está em repouso sobre um plano horizontal. Encontre a intensidade da força **P** necessária para dar ao bloco uma aceleração de 2,5 m/s^2 para a direita. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_k = 0{,}25$.

SOLUÇÃO

O peso do bloco é

$$W = mg = (80 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 785 \text{ N}$$

Notamos que $F = \mu_k N = 0{,}25N$ e que $a = 2{,}5$ m/s^2. Expressando que as forças que atuam no bloco são equivalentes ao vetor $m\mathbf{a}$, escrevemos

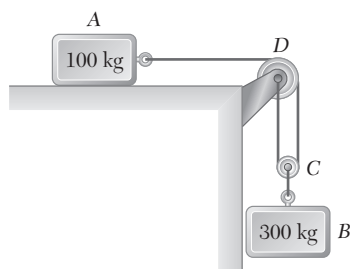
$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = ma$: $\quad P \cos 30° - 0{,}25N = (80 \text{ kg})(2{,}5 \text{ m/s}^2)$

$$P \cos 30° - 0{,}25N = 200 \text{ N} \qquad (1)$$

$+\uparrow\Sigma F_y = 0$: $\quad N - P \text{ sen } 30° - 785 \text{ N} = 0 \qquad (2)$

Resolvendo (2) para N e substituindo o resultado em (1), obtemos

$$N = P \text{ sen } 30 + 785 \text{ N}$$

$$P \cos 30° - 0{,}25(P \text{ sen } 30° + 785 \text{ N}) = 200 \text{ N} \qquad P = 535 \text{ N} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 12.2

Os dois blocos mostrados na figura partem do repouso. Não há atrito no plano horizontal nem na roldana, e a roldana é assumida como tendo massa desprezível. Determine a aceleração de cada bloco e a tração em cada corda.

SOLUÇÃO

Cinemática. Notamos que se o bloco A se move de x_A para a direita, o bloco B se move para baixo por meio de

$$x_B = \tfrac{1}{2}x_A$$

Diferenciando duas vezes em relação a t, temos

$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A \qquad (1)$$

Cinética. Aplicamos a segunda lei de Newton sucessivamente ao bloco A, ao bloco B e à roldana C.

Bloco A. Representando por T_1 a tração na corda ACD, escrevemos

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad T_1 = 100a_A \qquad (2)$$

Bloco B. Observando que o peso do bloco B é

$$W_B = m_B g = (300 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 2.940 \text{ N}$$

e representando por T_2 a tração na corda BC, escrevemos

$$+\downarrow\Sigma F_y = m_B a_B: \qquad 2.940 - T_2 = 300a_B$$

ou, substituindo para a_B de (1),

$$2.940 - T_2 = 300(\tfrac{1}{2}a_A)$$
$$T_2 = 2.940 - 150a_A \qquad (3)$$

Roldana C. Já que m_C é assumida como sendo zero, temos

$$+\downarrow\Sigma F_y = m_C a_C = 0: \qquad T_2 - 2T_1 = 0 \qquad (4)$$

Substituindo os valores de T_1 e T_2 em (2) e (3), respectivamente, em (4) escrevemos

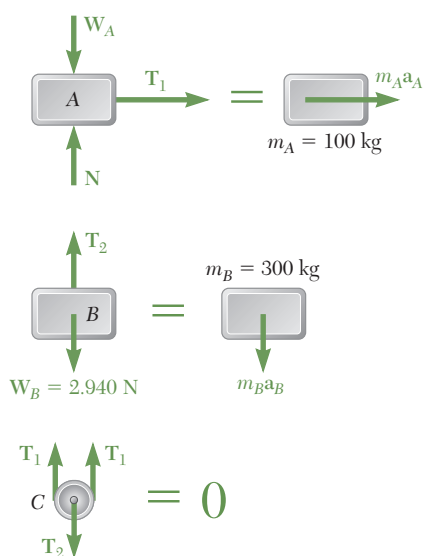
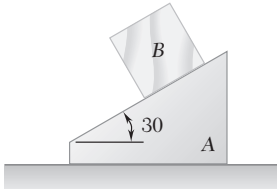
$$2.940 - 150a_A - 2(100a_A) = 0$$
$$2.940 - 350a_A = 0 \qquad a_A = 8{,}40 \text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$

Substituindo o valor obtido para a_A em (1) e (2), temos

$$a_B = \tfrac{1}{2}a_A = \tfrac{1}{2}(8{,}40 \text{ m/s}^2) \qquad a_B = 4{,}20 \text{ m/s}^2 \blacktriangleleft$$
$$T_1 = 100a_A = (100 \text{ kg})(8{,}40 \text{ m/s}^2) \qquad T_1 = 840 \text{ N} \blacktriangleleft$$

Recordando (4), escrevemos

$$T_2 = 2T_1 \qquad T_2 = 2(840 \text{ N}) \qquad T_2 = 1.680 \text{ N} \blacktriangleleft$$

Notamos que o valor obtido para T_2 *não* é igual ao peso do bloco B.

PROBLEMA RESOLVIDO 12.3

Um bloco B de 6-kg parte do repouso e desliza sobre uma cunha A de 15-kg que é suportada por uma superfície horizontal. Desprezando o atrito, determine (*a*) a aceleração da cunha e (*b*) a aceleração do bloco relativa à cunha.

SOLUÇÃO

Cinemática. Primeiramente examinamos a aceleração da cunha e a aceleração do bloco.

Cunha A. Como a cunha está restrita a se mover sobre a superfície horizontal, sua aceleração $\mathbf{a}_A$ é horizontal. Assumiremos que ela está dirigida para a direita.

Bloco B. A aceleração de $\mathbf{a}_B$ do bloco B pode ser expressa como a soma da aceleração de A e da aceleração de B relativa a A. Temos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

onde $\mathbf{a}_{B/A}$ é dirigida ao longo da superfície inclinada da cunha.

Cinética. Desenhamos os diagramas de corpo livre da cunha e do bloco e aplicamos a segunda lei de Newton.

Cunha A. Representamos as forças exercidas pelo bloco e pela superfície horizontal sobre a cunha A por $\mathbf{N}_1$ e $\mathbf{N}_2$, respectivamente.

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m_A a_A: \qquad N_1 \text{ sen } 30° = m_A a_A$$
$$0{,}5 N_1 = m_A a_A \qquad (1)$$

Bloco B. Usando o sistema de eixos coordenados mostrado na figura e decompondo $\mathbf{a}_B$ em seus componentes $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_{B/A}$, escrevemos

$$+\nearrow \Sigma F_x = m_B a_x: \qquad -m_B g \text{ sen } 30° = m_B a_A \cos 30° - m_B a_{B/A}$$
$$-m_B g \text{ sen } 30° = m_B(a_A \cos 30° - a_{B/A})$$
$$a_{B/A} = a_A \cos 30° + g \text{ sen } 30° \qquad (2)$$
$$+\nwarrow \Sigma F_y = m_B a_y: \qquad N_1 - m_B g \cos 30° = -m_B a_A \text{ sen } 30°$$

a. Aceleração da cunha *A*. Substituindo para N_1 da Eq. (1) na Eq. (3), temos

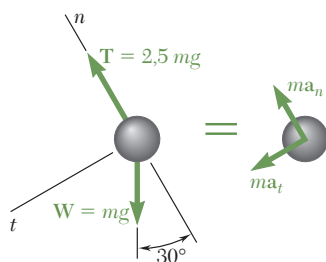
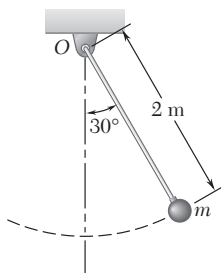
$$2m_A a_A - m_B g \cos 30° = -\, m_B a_A \text{ sen } 30°$$

Resolvendo para a_A e substituindo os dados numéricos, escrevemos0

$$a_A = \frac{m_B g \cos 30°}{2m_A + m_B \text{ sen } 30°}\, g = \frac{(6 \text{ kg})\,(9{,}81 \text{ m/s}^2) \cos 30°}{2(15 \text{ kg}) + (6 \text{ kg}) \text{ sen } 30°}$$

$$a_A = +1{,}545 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_A = 1{,}545 \text{ m/s}^2 \rightarrow \blacktriangleleft$$

b. Aceleração do bloco *B* em relação a *A*. Substituindo o valor obtido para a_A na Eq. (2), temos

$$a_{B/A} = (1{,}545 \text{ m/s}^2) \cos 30° + (9{,}81 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 30°$$
$$a_{B/A} = +6{,}24 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_{B/A} = 6{,}24 \text{ m/s}^2 \measuredangle 30° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 12.4

A extremidade de um pêndulo de 2 m de comprimento descreve um arco de circunferência em um plano vertical. Se a tração na corda é 2,5 vezes o peso do pêndulo para a posição mostrada na figura, encontre a velocidade e a aceleração do pêndulo nessa posição.

SOLUÇÃO

O peso do pêndulo é $W = mg$; a tração na corda é, portanto, 2,5 mg. Recordando que $\mathbf{a}_n$ é dirigido para O e assumindo $\mathbf{a}_t$ como mostrado na figura, aplicamos a segunda lei de Newton e obtemos

$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t$: $\quad mg \text{ sen } 30° = ma_t$

$a_t = g \text{ sen } 30° = +4{,}90 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_t = 4{,}90 \text{ m/s}^2 \swarrow$ ◀

$+\nwarrow \Sigma F_n = ma_n$: $\quad 2{,}5\, mg - mg \cos 30° = ma_n$

$a_n = 1{,}634\, g = +16{,}03 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_n = 16{,}03 \text{ m/s}^2 \nwarrow$ ◀

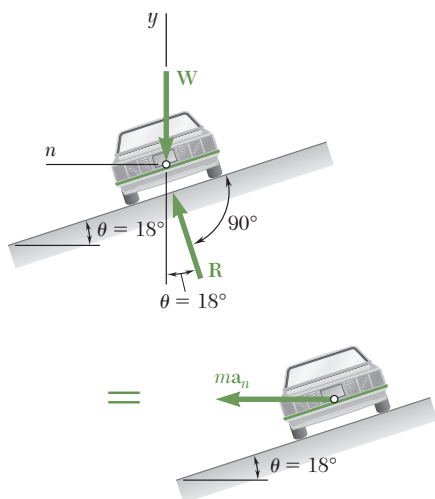
Como $a_n = v^2/\rho$, temos $v^2 = \rho a_n = (2 \text{ m})(16{,}03 \text{ m/s}^2)$.

$v = \pm 5{,}66 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v} = 5{,}66 \text{ m/s} \swarrow\!\!\nearrow$ (para cima ou para baixo) ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 12.5

Determine a velocidade de segurança calculada para uma curva de rodovia de raio $\rho = 120$ m, inclinada a um ângulo $\theta = 18°$. A *velocidade de segurança* calculada de uma curva de uma rodovia com declive é a velocidade escalar na qual um carro deve trafegar sem que nenhuma força de atrito lateral seja exercida em suas rodas.

SOLUÇÃO

O carro percorre uma trajetória circular *horizontal* de raio ρ. O componente normal $\mathbf{a}_n$ da aceleração é dirigido para o centro da trajetória; sua intensidade é $a_n = v^2/\rho$, onde v é a velocidade escalar do carro em m/s. A massa m do carro é W/g, onde W é o peso do carro. Como nenhuma força de atrito lateral deve ser exercida sobre o carro, a reação **R** da estrada é mostrada perpendicularmente à estrada. Aplicando a segunda lei de Newton, escrevemos

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad R \cos \theta - W = 0 \qquad R = \dfrac{W}{\cos \theta}$ (1)

$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = ma_n$: $\quad R \text{ sen } \theta = \dfrac{W}{g} a_n$ (2)

Substituindo para R de (1) em (2), e recordando que $a_n = v^2/\rho$,

$$\frac{W}{\cos \theta} \text{sen } \theta = \frac{W}{g}\frac{v^2}{\rho} \qquad v^2 = g\rho \text{ tg } \theta$$

Substituindo $\rho = 120$ m e $\theta = 18°$ nesta equação, obtemos

$$v^2 = (9{,}81 \text{ m/s}^2)(120 \text{ m}) \text{ tg } 18°$$

$v = 19{,}56 \text{ m/s} \qquad v = 70{,}4 \text{ km/h}$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas desta lição, você vai aplicar a *segunda lei de Newton do movimento*, $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, para relacionar as forças que atuam sobre uma partícula durante seu movimento.

1. Escrevendo as equações de movimento. Quando estiver aplicando a segunda lei de Newton aos tipos de movimento discutidos nesta lição, você vai achar mais conveniente expressar os vetores **F** e **a** em termos de seus componentes retangulares ou de seus componentes tangencial e normal.

a. Ao usar componentes retangulares, e recordando da Seção 11.11 as expressões encontradas para a_x, a_y e a_z, você vai escrever

$$\Sigma F_x = m\ddot{x} \qquad \Sigma F_y = m\ddot{y} \qquad \Sigma F_z = m\ddot{z}$$

b. Ao usar componentes tangencial e normal, e recordando da Seção 11.13 as expressões encontradas para a_t e a_n, você vai escrever

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho}$$

2. Desenhando um diagrama de corpo livre que mostre as forças aplicadas *e um diagrama equivalente* mostrando o vetor $m\mathbf{a}$ ou seus componentes, você obterá uma representação ilustrada da segunda lei de Newton [Problemas Resolvidos de 12.1 a 12.5]. Esses diagramas lhe serão de grande utilidade quando for escrever as equações de movimento. Note que, quando um problema envolve dois ou mais corpos, em geral é melhor considerar cada corpo separadamente.

3. Aplicando a segunda lei de Newton. Como observamos na Seção 12.2, a aceleração usada na equação $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ deve ser sempre a *aceleração absoluta* da partícula (ou seja, ela deve ser medida em relação a um sistema de referência newtoniano). Além disso, *se o sentido da aceleração* **a** *for desconhecido* ou não for facilmente deduzido, assuma um sentido arbitrário para **a** (normalmente a direção positiva de um eixo coordenado) e deixe então a solução lhe fornecer o sentido correto. Finalmente, note como as soluções dos Problemas Resolvidos 12.2 e 12.3 foram divididas em uma parte *cinemática* e uma parte *cinética,* e como no Problema Resolvido 12.3 usamos dois sistemas de eixos coordenados para simplificar as equações de movimento.

4. Quando um problema envolve atrito seco, lembre-se de revisar as seções relevantes de *Estática* [Seções de 8.1 a 8.3] antes de tentar solucioná-lo. Em particular, você deve saber quando cada uma das equações $F = \mu_s N$ e $F = \mu_k N$ podem ser usadas. Você também deve reconhecer que se o movimento de um sistema não está especificado, é primeiramente necessário assumir um movimento possível e então verificar a validade daquela suposição.

5. Resolvendo problemas que envolvem movimento relativo. Quando um corpo B se movimenta em relação a um corpo A, como no Problema Resolvido 12.3, muitas vezes é conveniente expressar a aceleração de B como

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

onde $\mathbf{a}_{B/A}$ é a aceleração de B relativa a A, ou seja, a aceleração de B como observada de um sistema de referência preso a A e em translação. Se B for observado movendo-se em uma linha reta, $\mathbf{a}_{B/A}$ será dirigida ao longo dessa linha. Por outro lado, se B é observado movendo-se ao longo de uma trajetória circular, a aceleração relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ deve ser decomposta em componentes tangencial e normal àquela trajetória.

6. Finalmente, sempre considere as implicações de todas as hipóteses que você fizer. Assim, em um problema envolvendo duas cordas, se você assumir que a tração em uma delas é igual ao seu valor máximo admissível, verifique se todos os requisitos estabelecidos para a outra corda estarão, então, satisfeitos. Por exemplo, a tração T naquela corda vai satisfazer a relação $0 \leq T \leq T_{\text{máx}}$? Ou seja, a corda permanecerá esticada e sua tração será menor que seu valor máximo admissível?

PROBLEMAS

12.1 O valor da aceleração da gravidade g em qualquer latitude ϕ pode ser dado pela fórmula

$$g = 9{,}7087(1 + 0{,}0053 \operatorname{sen}^2\phi) \text{ m/s}^2$$

onde o efeito da rotação da Terra e também o fato de que a Terra não ser esférica foram levados em conta. Determine até quatro casas significativas (*a*) o peso em newtons, (*b*) a massa em quilogramas nas latitudes 0°, 45° e 90° de uma barra de prata, cuja massa foi oficialmente definida como 5 kg.

12.2 A aceleração devida à gravidade na Lua é de 1,62 m/s^2. Determine (*a*) o peso em newtons, (*b*) a massa em quilograma na Lua de uma barra de ouro, cuja massa foi oficialmente definida como 2 kg.

12.3 Um satélite artificial de 200 kg está em órbita circular de 1.500 km sobre a superfície de Vênus. A aceleração devido à atração gravitacional em Vênus nesta altitude é 5,52 m/s^2. Determine a intensidade da quantidade de movimento linear do satélite sabendo que sua velocidade escalar orbital é de $23{,}4 \times 10^3$ km/h.

12.4 Uma balança de mola A e uma balança de alavanca B com braços de alavanca iguais estão presas ao teto de um elevador e pacotes idênticos estão sendo segurados por elas, tal como mostra a figura. Sabendo que quando o elevador desce com uma aceleração de 1,2 m/s^2 a balança de mola indica uma carga de 3 kg, determine (*a*) o peso dos pacotes e (*b*) a carga indicada pela balança de mola e a massa necessária para equilibrar a balança de alavanca quando o elevador se move para cima com uma aceleração de 1,2 m/s^2.

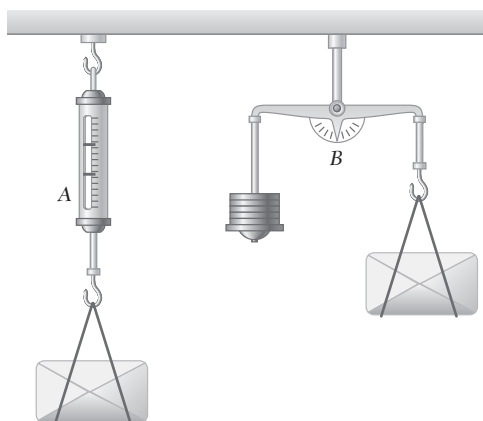



Figura *P12.4*

12.5 Um jogador de *hockey* bate no disco de maneira que este chega ao repouso 9 s depois de ter escorregado 30 m sobre o gelo. Determine (*a*) a velocidade inicial do disco e (*b*) o coeficiente de atrito entre o disco e o gelo.

12.6 Determine a velocidade escalar teórica máxima que um automóvel partindo do repouso pode atingir após ter percorrido 400 m. Assuma que o coeficiente de atrito estático é de 0,80 entre os pneus e o pavimento e que (*a*) o automóvel tem tração nas rodas dianteiras e essas rodas dianteiras suportam 62% do peso do automóvel e (*b*) o automóvel tem tração nas rodas traseiras e essas rodas traseiras suportam 43% do peso do automóvel.

12.7 Em antecipação a um aclive de 7°, um motorista de ônibus acelera a uma taxa constante de 1 m/s^2 enquanto ainda está na seção nivelada da rodovia. Sabendo que a velocidade escalar do ônibus é 90 km/h no inicio da subida e que o motorista não altera a posição do acelerador nem troca de marcha, determine a distância percorrida pelo ônibus na subida até sua velocidade escalar ter decrescido para 80 km/h.

12.8 Se a distância de frenagem de um automóvel a 96 km/h é de 45 m em um piso nivelado, determine a distância de frenagem desse automóvel a 96 km/h quando ele está (*a*) subindo um plano inclinado de 5° e (*b*) descendo um plano com inclinação de 3%. Considere que a força de frenagem é independente da situação.

Figura P12.9

12.9 Um pacote de 20 kg está em repouso sobre um plano inclinado quando uma força **P** é aplicada sobre ele. Determine a intensidade de **P** no caso de serem necessários 10 s para o pacote percorrer 5 m subindo no plano inclinado. Os coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o pacote e o plano inclinado são ambos iguais a 0,30.

12.10 A aceleração de um pacote deslizando no ponto *A* é 3 m/s^2. Considerando que o coeficiente de atrito cinético é o mesmo em cada seção, determine a aceleração do pacote no ponto *B*.

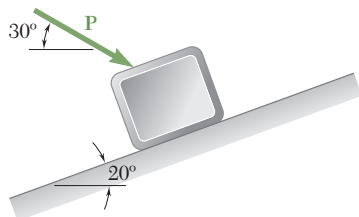
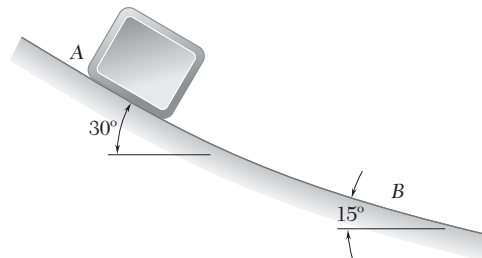



Figura P12.10

12.11 Os dois blocos mostrados na figura estão originalmente em repouso. Desprezando as massas das roldanas e o efeito do atrito nessas roldanas e entre o bloco *A* e a superfície horizontal, determine (*a*) a aceleração de cada bloco, (*b*) a tração no cabo.

12.12 Os dois blocos mostrados na figura estão originalmente em repouso. Desprezando as massas das roldanas e o efeito do atrito nessas roldanas e considerando que os coeficientes de atrito entre ambos o bloco *A* e a superfície horizontal são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$, determine (*a*) a aceleração de cada bloco e (*b*) a tração no cabo.

Figura P12.11 e P12.12

12.13 Os coeficientes de atrito entre a carga e o reboque de piso plano mostrado na figura são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$. Sabendo que velocidade escalar do equipamento é 72 km/h, determine (*a*) a menor distância na qual o equipamento pode ser parado se a carga não pode se movimentar.

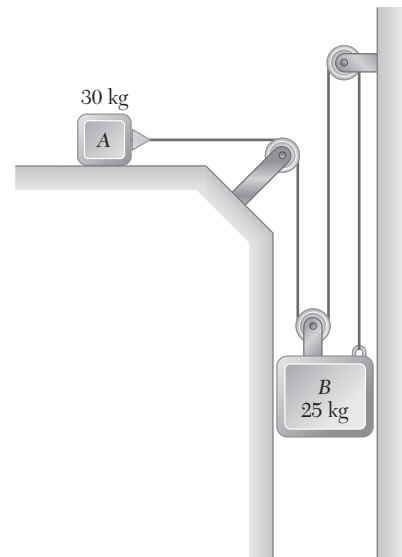
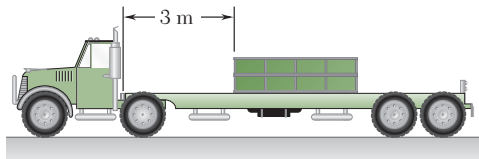



Figura *P12.13*

12.14 Um caminhão-baú está viajando a 96 km/h quando o motorista aciona os freios. Sabendo que as forças de frenagem do caminhão e do baú são de 18 kN e 68 kN, respectivamente, determine (*a*) a distância percorrida pelo caminhão-baú antes de ele chegar ao repouso e (*b*) o componente horizontal da força no acoplamento entre o caminhão e o baú enquanto eles estão diminuindo a velocidade.

Figura *P12.14*

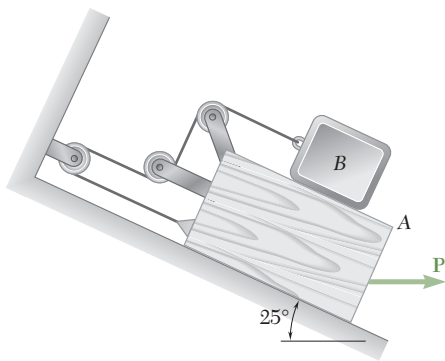



Figura P12.15 e P12.16

12.15 O bloco *A* tem a massa de 40 kg e o bloco *B* tem a massa de 8 kg. Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies de contato são $\mu_s = 0{,}20$ e $\mu_k = 0{,}15$. Se $P = 0$, determine (*a*) a aceleração do bloco *B* e (*b*) a tração na corda.

12.16 O bloco *A* tem a massa de 40 kg e o bloco *B* tem a massa de 8 kg. Os coeficientes de atrito entre todas as superfícies de contato são $\mu_s = 0{,}20$ e $\mu_k = 0{,}15$. Se $P = 40$ N $\rightarrow$, determine (*a*) a aceleração do bloco *B* e (*b*) a tração na corda.

12.17 As caixas *A* e *B* estão em repouso sobre uma esteira transportadora que está inicialmente em repouso. A esteira é ligada de repente num sentido de movimento para cima, de modo que ocorre escorregamento entre a esteira e as caixas. Sabendo que os coeficientes de atrito cinético entre a esteira e as caixas são de $(\mu_k)_A = 0{,}30$ e $(\mu_k)_B = 0{,}32$, determine a aceleração inicial de cada caixa.

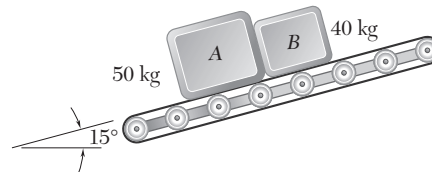



Figura P12.17

12.18 Sabendo que o sistema mostrado na figura está inicialmente em repouso, encontre a velocidade em $t = 1{,}2$ s de (*a*) colar *A*, (*b*) colar *B*. Despreze as massas das roldanas e o efeito do atrito.

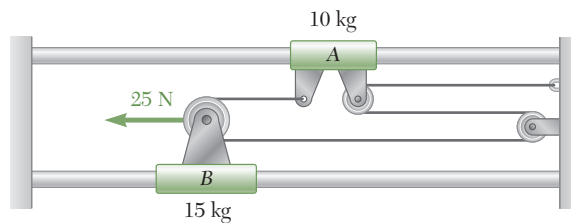



Figura P12.18

12.19 Cada um dos sistemas mostrados na figura a seguir está inicialmente em repouso. Desprezando o atrito nos eixos e as massas das roldanas, determine para cada sistema (*a*) a aceleração do bloco *A*, (*b*) a velocidade do bloco *A* depois de ele ter se movido 3 m, (*c*) o tempo necessário para o bloco *A* atingir uma velocidade de 6 m/s.

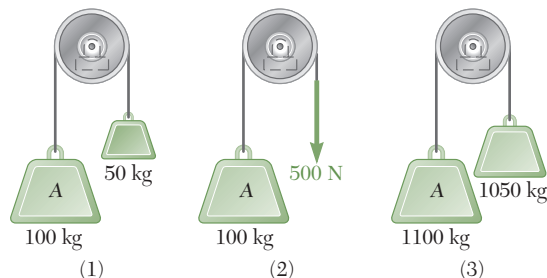



Figura P12.19

12.20 Um homem em pé, em um elevador, que está movendo com aceleração constante mantém um bloco B de 3 kg entre dois outros, de modo que o movimento relativo de B entre A e C é iminente. Sabendo que os coeficientes de atrito entre todas as superfícies são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine (a) a aceleração do elevador se este está se movendo para cima e cada uma das forças exercidas pelo homem nos blocos A e C tem um componente igual ao dobro do peso de B, (b) as componentes horizontais das forças exercidas pelo homem nos blocos A e C se a aceleração do elevador é 2 m/s^2 para baixo.

Figura P12.20

12.21 Um pacote está em repouso numa esteira transportadora que está inicialmente em repouso. A esteira é ligada e se move para a direita por 1,3 s com uma aceleração constante de 2 m/s^2. A esteira então se move com uma desaceleração constante $\mathbf{a}_2$ e chega ao repouso depois de um deslocamento total de 2,2 m. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o pacote e a esteira são $\mu_s = 0{,}35$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine (a) a desaceleração $\mathbf{a}_2$ da esteira, (b) o deslocamento do pacote relativo à esteira quando essa esteira caminha para o repouso.

Figura P12.21

12.22 Para transportar uma série de pacotes de telhas A para um telhado, um empreiteiro usa um elevador movido a motor que consiste de uma plataforma horizontal BC que se desloca sobre trilhos presos aos lados de uma escada. O elevador parte do repouso e se move inicialmente com uma aceleração constante $\mathbf{a}_1$, tal como mostra a figura a seguir. O elevador, então, desacelera a uma taxa constante $\mathbf{a}_2$ e chega ao repouso em D, perto do topo da escada. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o pacote de telhas e a plataforma horizontal é de 0,30, determine a maior aceleração possível $\mathbf{a}_1$ e a maior desaceleração possível $\mathbf{a}_2$ para que o pacote não escorregue sobre a plataforma.

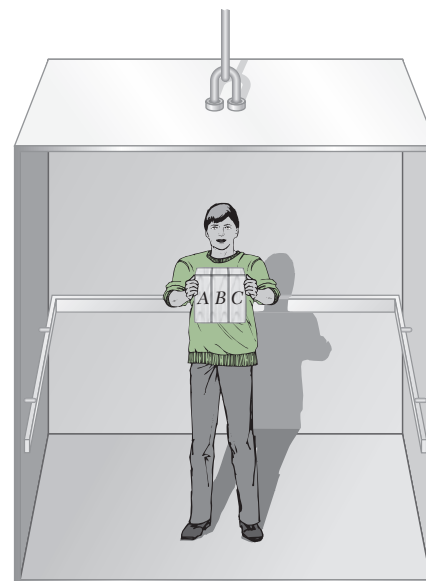
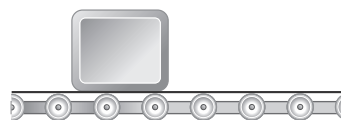
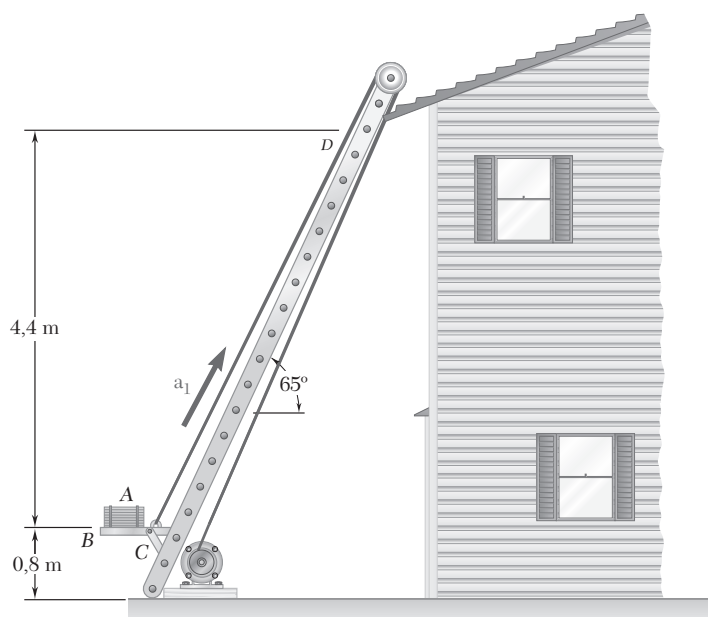



Figura *P12.22*

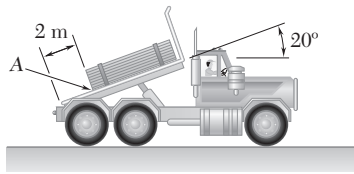



Figura P12.23

12.23 Para descarregar uma pilha amarrada de madeira compensada de um caminhão, o motorista primeiro inclina a caçamba do caminhão e então acelera, a partir do repouso. Sabendo que os coeficientes de atrito entre a camada inferior da madeira compensada e o piso da caçamba são $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}30$, determine (*a*) a menor aceleração do caminhão que fará a pilha de madeira compensada deslizar e (*b*) a aceleração do caminhão que faz o canto *A* da pilha de madeira compensada atingir a extremidade da caçamba em 0,9 s.

12.24 As hélices de um navio de peso *W* podem produzir uma força propulsiva $\mathbf{F}_0$; eles produzem uma força de mesma intensidade, mas de direção oposta, quando os motores são revertidos. Sabendo que o navio estava se movendo para frente na sua velocidade escalar máxima v_0 quando os motores foram revertidos, determine a distância que o navio percorre antes de parar. Considere que a resistência do atrito da água varia diretamente com o quadrado da velocidade.

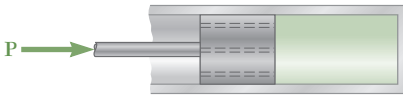



Figura P12.25

12.25 Uma força constante **P** é aplicada a um pistão e a uma haste de massa total *m* para fazê-los se moverem em um cilindro cheio de óleo. À medida que o pistão se move, o óleo é forçado por meio de orifícios no pistão e exerce nesse pistão uma força de intensidade *kv* numa direção oposta a movimento do pistão. Sabendo que o pistão parte do repouso em $t = 0$ e $x = 0$, mostre que a equação que relaciona *x*, *v* e *t*, onde *x* é a distância percorrida pelo pistão e *v* é a velocidade escalar do pistão, é linear em cada uma das variáveis.

12.26 Uma mola *AB* de constante *k* é presa a um suporte *A* e a um colar de massa *m*. O comprimento não deformado da mola é *l*. Sabendo que o colar é liberado do repouso quando $x = x_0$ e desprezando o atrito entre o colar e a haste horizontal, determine a intensidade da velocidade do colar ao passar pelo ponto *C*.

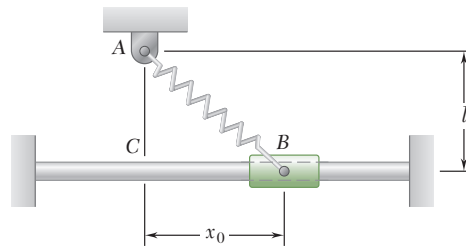



Figura P12.26

12.27 Determine a velocidade escalar teórica máxima que um automóvel de 1200 kg partindo do repouso pode alcançar depois de ter percorrido 400 m se a resistência do ar for considerada. Assuma que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e o pavimento é 0,70, que o automóvel tem tração nas rodas dianteiras, que as rodas dianteiras suportam 62% do peso do automóvel e que o arrasto aerodinâmico **D** tem uma intensidade $D = 0{,}012\ v^2$, onde D e v são expressos em newtons e m/s, respectivamente.

12.28 Os coeficientes de atrito entre os blocos A e C e as superfícies horizontais são $\mu_s = 0{,}24$ e $\mu_k = 0{,}20$. Sabendo que $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg e $m_C = 10$ kg, determine (a) a tração da corda, (b) a aceleração de cada bloco.

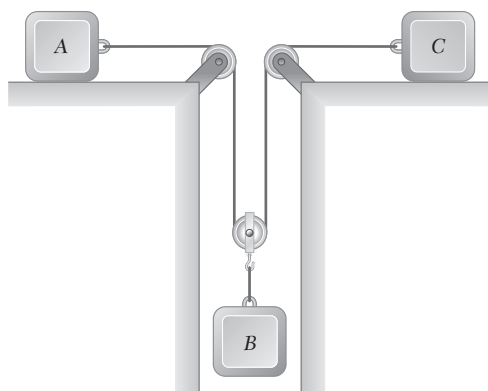



Figura P12.28

12.29 Revolva o Problema 12.28, considerando $m_A = 5$ kg, $m_B = 10$ kg e $m_C = 20$ kg.

12.30 Os blocos A e B têm massa de 20 kg cada, o bloco C de 14 kg e o bloco D de 16 kg. Sabendo a força para baixo de intensidade de 24 kg é aplicado no bloco D, determine (a) a aceleração de cada bloco, (b) a tração na corda ABC. Desprezar o peso das polias e o efeito do atrito.

12.31 Os blocos A e B têm massa de 20 kg cada, o bloco C de 14 kg e o bloco D de 16 kg. Sabendo a força para baixo de intensidade de 10 g é aplicado no bloco B, e que sistema inicia em repouso, determine em $t = 3$ s a velocidade (a) de D em relação a A, (b) de C em relação a D. Desprezar o peso das polias e o efeito do atrito.

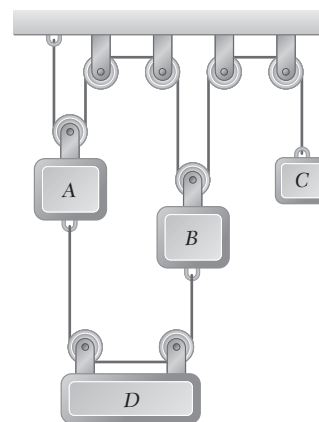



Figura P12.30 e P12.31

12.32 O bloco B de 15 kg é sustentado pelo bloco A de 25 kg e está preso a uma corda à qual é aplicada uma força horizontal de 225 N, tal como mostra a figura. Desprezando o atrito, determine (*a*) a aceleração do bloco A, (*b*) a aceleração do bloco B em relação a A.

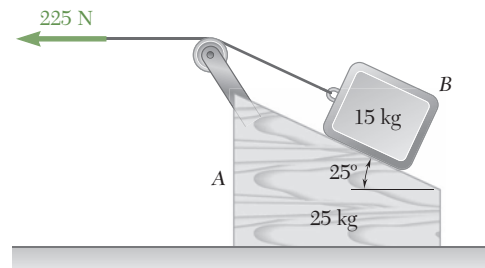



Figura P12.32

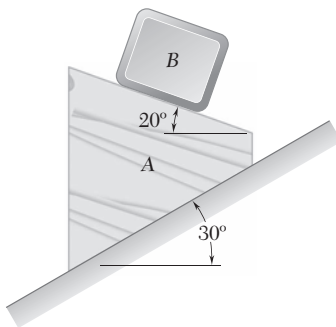



Figura P12.33

12.33 O bloco B de massa 10 kg repousa na superfície superior de uma cunha de 22 kg como mostra na figura. Sabendo que o sistema é liberado do repouso e desprezando o atrito, determine (*a*) a aceleração de B, (*b*) a velocidade de B em relação a A em $t = 0{,}5$ s.

12.34 Um painel deslizante de 40 kg é suportado pelos roletes em B e C. Um contrapeso A de 25 kg é fixado por cabo como mostrado na figura e, nos casos *a* e *c*, estão em contato com a borda vertical do painel. Desprezando o atrito, determine em cada caso mostrado a aceleração do painel e a tração na corda imediatamente depois do sistema sair do repouso.

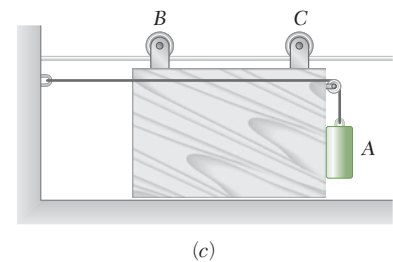
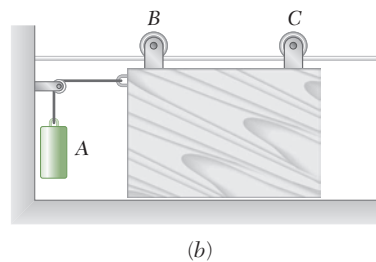
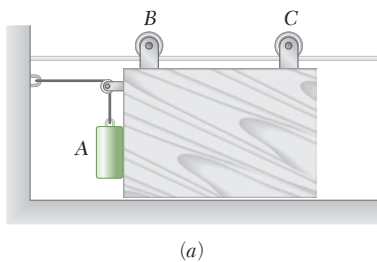



Figura P12.34

12.35 Um caixote B de 500 kg está suspenso por um cabo preso a um carrinho A de 40 kg que corre por uma viga I inclinada, tal como mostra a figura. Sabendo que no instante mostrado o carrinho tem uma aceleração de 1,2 m/s^2 para cima e para direita, determine (a) a aceleração de B relativa a A, (b) a tração no cabo CD.

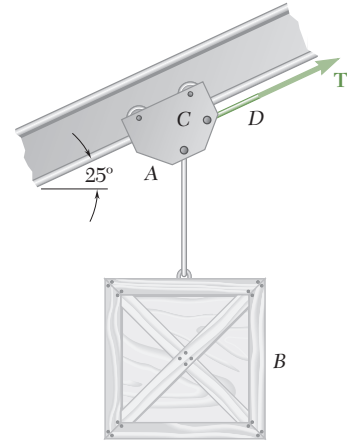



Figura P12.35

12.36 Durante um treinamento de impulso de um lançador de martelo, a cabeça A de 7 kg do martelo roda a uma velocidade escalar constante v em um círculo horizontal, tal como mostra a figura. Se $\rho = 0{,}9$ m e $\theta = 60°$, determine (a) a tração no fio BC e (b) a velocidade escalar da cabeça do martelo.

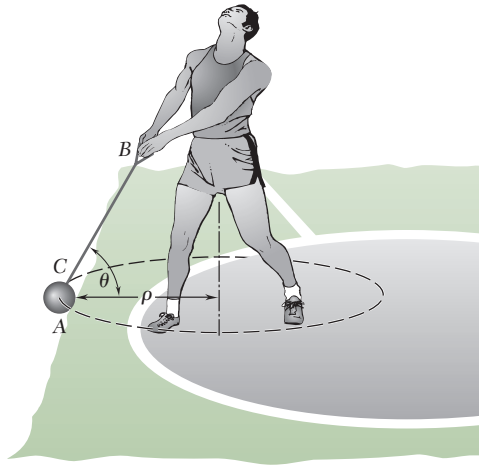



Figura P12.36

12.37 Uma bola presa a uma corda se move ao longo de uma trajetória circular a uma velocidade escalar constante de 4 m/s. Determine (a) o ângulo θ que a corda forma com o poste BC, (b) a tração na corda.

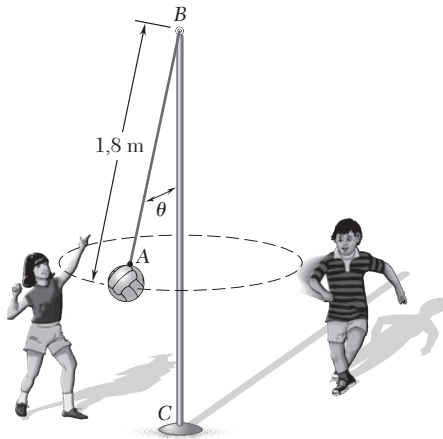



Figura P12.37

12.38 Um fio único *ACB* de 80 cm de comprimento passa por um anel em *C* que está preso a uma esfera que roda com uma velocidade escalar constante v no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 60°$, $\theta_2 = 30°$ e que a tração é a mesma em ambas as partes do fio, determine a velocidade escalar v.

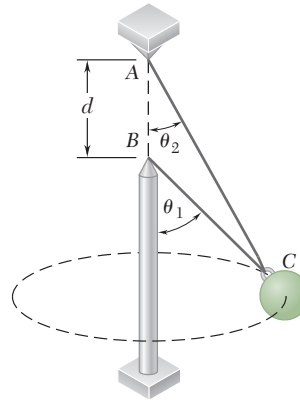



Figura P12.38, *P12.39* e P12.40

12.39 Um fio único *ACB* passa por um anel em *C* que está preso a uma esfera de 1 kg que roda com uma velocidade escalar constante v no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 50°$, $d = 0{,}8$ m e que a tração em ambas as partes do cabo é de 6 N, determine (*a*) o ângulo θ_2 e (*b*) a velocidade escalar v.

12.40 Dois fios *AC* e *BC* estão amarrados a uma esfera de 7 kg que roda com uma velocidade escalar v no círculo horizontal mostrado na figura. Sabendo que $\theta_1 = 55°$ e $\theta_2 = 30°$ e que $d = 1{,}4$ m, determine o intervalo de valores de v para os quais ambos os fios permanecem tracionados.

12.41 Uma esfera *D* de 100 g está em repouso em relação a um tambor que gira a uma taxa constante. Desprezando o atrito, determine o intervalo admissível da velocidade v da esfera se nenhuma das forças exercidas pela esfera na superfície inclinada do tambor deve exceder 1,1 N.

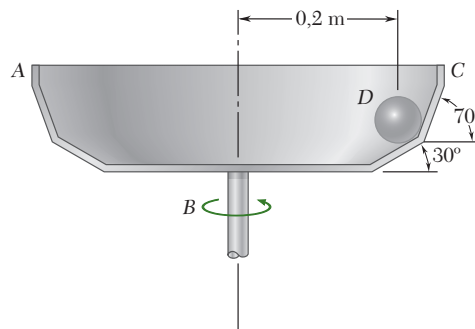



Figura *P12.41*

***12.42** Como parte de uma exposição ao ar livre, um modelo C da Terra de 6 kg está preso aos fios AC e BC e gira a uma velocidade escalar constante v no círculo horizontal mostrado na figura. Determine o intervalo de valores admissíveis de v para que ambos os fios permaneçam esticados e para que a tração em cada um dos dois fios não ultrapasse 120 N.

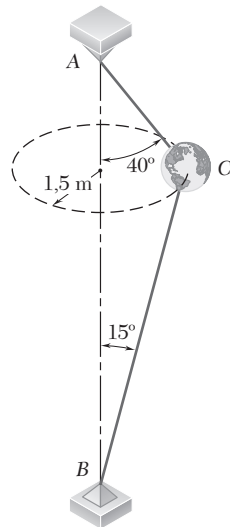



Figura P12.42

***12.43** As esferas de 0,5 kg de um regulador centrífugo giram a uma velocidade escalar constante v no círculo horizontal de 0,15 m de raio, tal como mostra a figura. Desprezando a massa das hastes AB, BC, AD e DE e exigindo que as hastes suportem somente forças de tração, determine o intervalo de valores admissíveis de v de modo que as intensidades das forças nas hastes não ultrapassem 75 N.

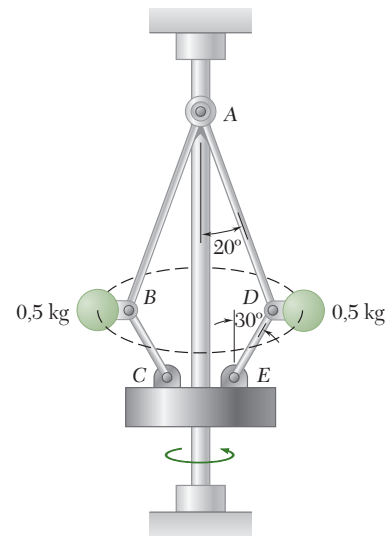



Figura P12.43

12.44 Uma criança de massa 22 kg está sentada em um balanço e sendo mantida na posição mostrada na figura por uma segunda criança. Desprezando o peso do balanço, determine a tração no cabo AB (a) enquanto a segunda criança segura o balanço com seus braços esticados horizontalmente para a frente e (b) imediatamente após o balanço ser solto.

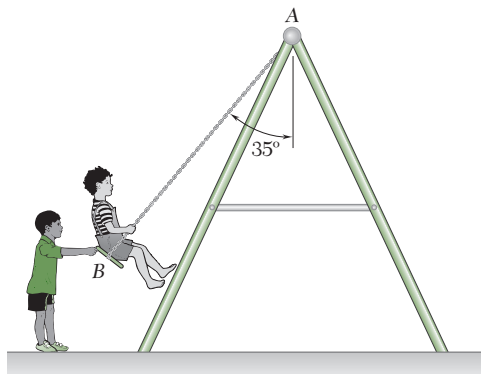



Figura P12.44

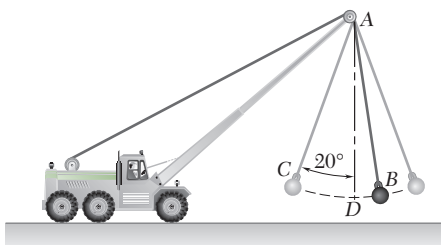



Figura P12.45

12.45 Uma bola de demolição B de 60 kg está presa a um cabo de aço AB de 15 m de comprimento e oscila no arco vertical mostrado na figura. Determine a tração no cabo (a) no ponto mais alto C da oscilação, (b) no ponto mais baixo D da oscilação, onde a velocidade escalar de B é de 4,2 m/s.

12.46 Durante uma corrida de alta velocidade, um carro esportivo de 1200 kg que viaja a uma velocidade escalar de 160 km/h perde, por um instante, o contato com a estrada quando ele atinge o cume A de um morro. (a) Determine o raio de curvatura ρ do perfil vertical da estrada em A. (b) Usando o valor de ρ encontrado no item a, determine a força exercida sobre um motorista de 80 kg pelo assento de seu carro de 1500 kg quando o carro, deslocando-se a uma velocidade escalar constante de 80 km/h, passa por A.

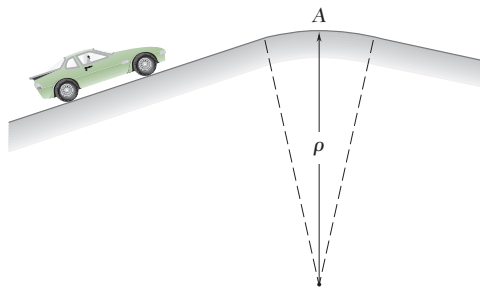



Figura P12.46

12.47 Um trecho de uma pista de tobogã mostrada na figura está contido em um plano vertical. As seções AB e CD têm raios de curvatura com indicado e a seção BC é uma linha reta e forma um ângulo de 20° com a horizontal. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o trenó e a pista é 0,10 e que a velocidade escalar do trenó é 7 m/s em B, determine a componente tangencial da aceleração do trenó (a) exatamente antes dele alcançar B, (b) exatamente depois dele passar por C.

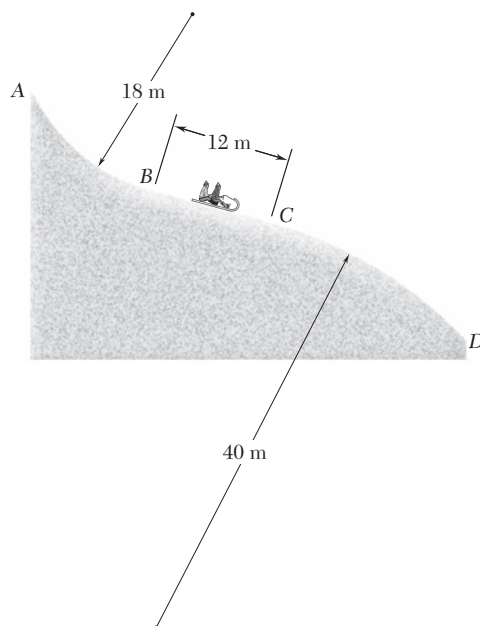



Figura P12.47

12.48 Uma série de pequenos pacotes, cada um com a massa de 0,5 kg, é descarregada de uma correia transportadora como mostrado na figura. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre cada pacote e a correia transportadora é 0,4, determine (*a*) a força exercida pela esteira no pacote exatamente depois que ele tenha passado no ponto *A*, (*b*) o ângulo θ definindo o ponto *B* onde os pacotes têm o primeiro *escorregamento* relativo na correia.

Figura P12.48

12.49 Um piloto de 54 kg pilota um jato de treinamento em um meio "loop" de 1.200 m de raio de modo que a velocidade escalar do jato diminui a uma taxa constante. Sabendo que o peso aparente do piloto no ponto *A* e *C* são 1.680 N e 350 N respectivamente, determine a força exercida no piloto pelo assento do jato quando este jato está no ponto *B*.

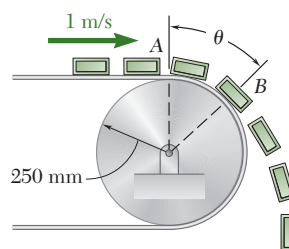
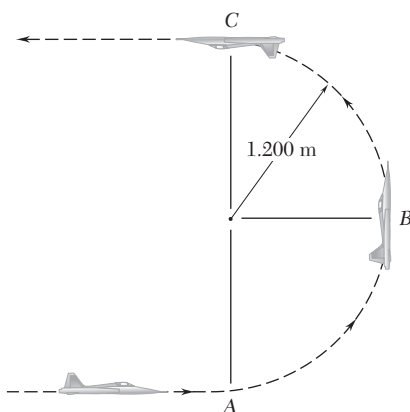



Figura P12.49

12.50 Um bloco *B* de 250 g se encaixa dentro de uma pequena cavidade aberta no braço *OA*, que gira no plano vertical a uma taxa constante tal que $v = 3$ m/s. Sabendo que a mola exerce no bloco *B* uma força de intensidade $P = 1{,}5$ N e desprezando o efeito do atrito, determine a intervalo de valores de θ para os quais o bloco *B* faz contato com a face da cavidade fechada para o eixo de rotação *O*.

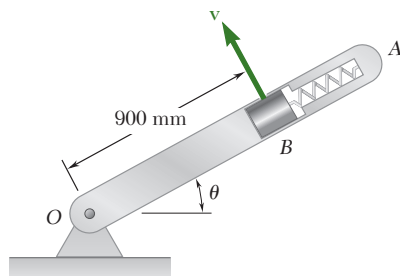



Figura P12.50

12.51 A curva em um circuito de velocidade tem raio de 300 m e velocidade de segurança de 192 km/h. (Ver no Problema Resolvido 12.5 para a definição da velocidade de segurança.) Sabendo que o carro de corrida começa a derrapar na curva quando viaja a uma velocidade de 288 km/h, determine (*a*) o ângulo de inclinação θ, (*b*) o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada sob as condições prevalentes, (*c*) a velocidade escalar mínima para a qual o mesmo carro poderia fazer a curva.

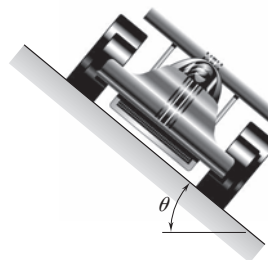



Figura P12.51

12.52 Um carro está viajando em uma estrada com inclinação lateral a uma velocidade constante v. Determine o intervalo de valores de v para os quais o carro não derrapa. Expresse sua resposta em termos do raio r da curva, do ângulo de inclinação θ da estrada e do ângulo de atrito estático ϕ_s entre os pneus e o pavimento.

12.53 Trens pendulares como o *American Flyer*, que viaja entre Washington, Nova York e Boston, são projetados para viajar com segurança a altas velocidades em seções curvas de linhas férreas que foram construídas para trens convencionais, mais lentos. Quando entra em uma curva, cada carro é inclinado por amadores hidráulicos montados em seus vagões. Essa característica de inclinação dos vagões também aumenta o conforto dos passageiros por eliminar ou reduzir muito a força lateral $\mathbf{F}_s$ (paralela ao piso do vagão) à qual os passageiros estão sujeitos. Para um trem que viaja a 160 km/h em uma seção curva de trilho inclinada lateralmente a um ângulo de $\theta = 6°$ e com uma velocidade de segurança de 96 km/h, determine (*a*) a intensidade da força lateral sentida por um passageiro de peso W em um vagão normal sem inclinação ($\phi = 0$), (*b*) o ângulo de inclinação ϕ necessário para que o passageiro não sinta nenhuma força lateral. (Ver Problema Resolvido 12.5 para a definição de velocidade de segurança.)

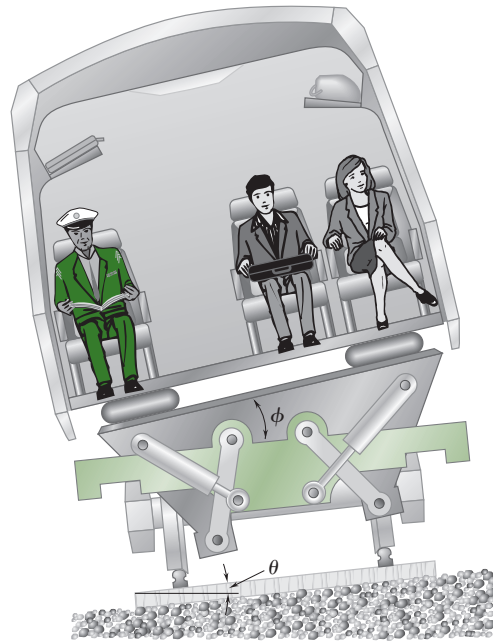



Figura P12.53 e *P12.54*

12.54 Testes feitos com os trens pendulares descritos no Problema 12.53 revelam que os passageiros se sentem desconfortáveis quando veem, pela janela do vagão que o trem está fazendo uma curva em alta velocidade, ainda que eles não sintam nenhuma força lateral. Os projetistas, portanto, preferem reduzir, mas não eliminar, essa força. Para o trem do Problema 12.53, determine o ângulo de inclinação ϕ necessário para os passageiros sentirem forças laterais iguais a 10% de seu peso.

12.55 Um pequeno colar D de 300 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $\alpha = 40°$ e que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante de 5 rad/s, determine o valor r para o qual o colar não deslizará sobre a haste se o efeito do atrito entre a haste e o colar for desprezado.

12.56 Um pequeno colar D de 200 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante e que $\alpha = 30°$ e $r = 600$ mm, determine o intervalo de valores da velocidade v para qual o colar não deslizará sobre a haste se o coeficiente de atrito estático entre a haste e o colar é 0,30.

12.57 Um pequeno colar D de 300 g pode deslizar sobre a parte AB de uma haste que é curvada, tal como mostra a figura. Sabendo que $r = 200$ mm e que a haste gira em torno da vertical AC a uma taxa constante de 10 rad/s, determine o menor valor admissível do coeficiente de atrito estático entre o colar e a haste se o colar não desliza quando (*a*) $\alpha = 15°$, (*b*) $\alpha = 45°$. Indique em cada caso a direção do movimento iminente.

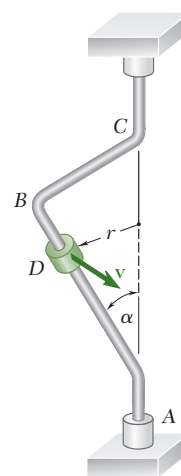



Figura P12.55, P12.56 e P12.57

12.58 Uma ranhura semicircular de 250 mm de raio é cortada em uma placa plana que gira sobre o eixo vertical AD a uma taxa constante de 14 rad/s. Um pequeno bloco E com 0,4 kg é projetado para deslizar na ranhura conforme a placa gira. Sabendo que os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}35$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine se o bloco irá deslizar na ranhura se for liberado na posição correspondente de (*a*) $\theta = 80°$, (*b*) $\theta = 40°$. Determine também a intensidade e a direção da força de atrito exercida no bloco imediatamente depois dele ser liberado.

Figura P12.58

12.59 Três segundos depois que um polidor é colocado em funcionamento a partir do repouso, pequenos tufos de lã ao longo da circunferência do disco de polimento de 225 mm de diâmetro são vistos voando livremente para fora deste disco. Se o polidor é ligado de modo que a lã ao longo da circunferência seja submetida a uma aceleração tangencial constante de 4 m/s^2, determine (*a*) a velocidade escalar v de um rufo à medida que ele deixa o disco, (*b*) a intensidade da força necessária para liberar o tufo se o peso médio de um tufo é 1,6 mg.

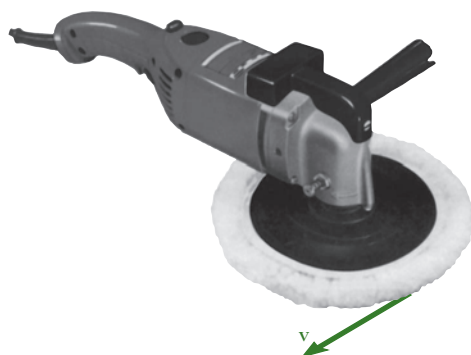
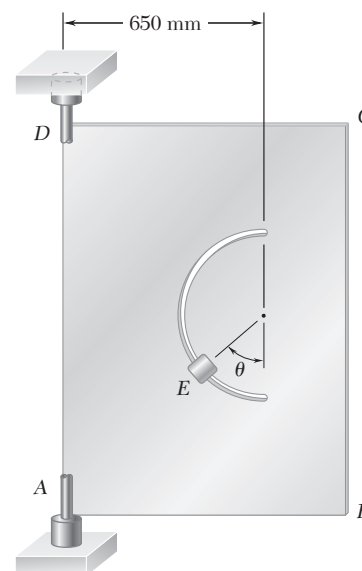



Figura *P12.59*

12.60 Uma mesa rotativa A é construída em um palco para uso em uma produção teatral. Observa-se, durante um ensaio, que um baú B começa a deslizar sobre a mesa 10 s depois que ela começa a girar. Sabendo que o baú é submetido a uma aceleração tangencial constante de 0,24 m/s^2, determine o coeficiente de atrito estático entre o baú e a mesa rotativa.

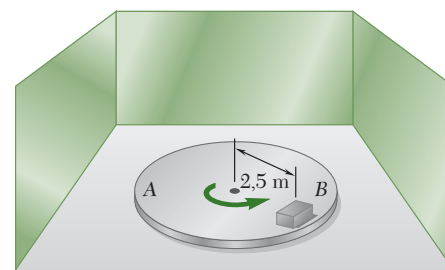



Figura *P12.60*

12.61 O mecanismo *ABCD* de hastes paralelas é usado para transportar um componente *I* entre processos de produção nas estações *E*, *F* e *G*, pegando-o em uma estação quando $\theta = 0$ e depositando-o na estação seguinte quando $\theta = 180°$. Sabendo que o elemento *BC* permanece horizontal ao longo de seu movimento e que as hastes *AB* e *CD* giram a uma taxa constante em um plano vertical de tal modo que $v_B = 0{,}66$ m/s, determine (*a*) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático entre o componente e *BC* se o componente não deve deslizar sobre *BC* enquanto está sendo transferido, (*b*) os valores de θ para os quais a ocorrência do escorregamento é iminente.

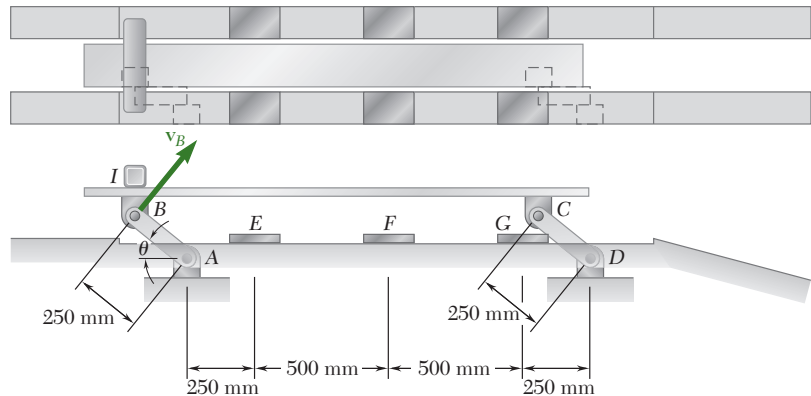



Figura P12.61

12.62 Sabendo que os coeficientes de atrito entre o componente *I* e o elemento *BC* do mecanismo do Problema 12.61 são $\mu_s = 0{,}35$ e $\mu_k = 0{,}25$, determine (*a*) a máxima velocidade escalar admissível v_B se o componente não deve deslizar sobre *BC* enquanto está sendo transferido, (*b*) os valores de θ para os quais a ocorrência do escorregamento é iminente.

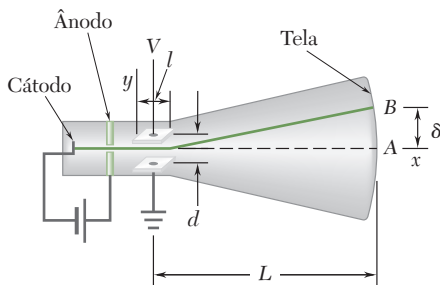



Figura P12.63

12.63 No tubo de raios catódicos mostrado na figura, os elétrons emitidos pelo cátodo e atraídos pelo ânodo passam por meio de um pequeno fino no ânodo e, então, se movem em linha reta com uma velocidade escalar v_0 até atingirem a tela em *A*. Entretanto, se uma diferença de potencial *V* é estabelecida entre as duas placas paralelas, os elétrons ficarão sujeitos a uma força **F** perpendicular às placas enquanto se movem entre essas placas e vão atingir a tela no ponto *B*, que está a uma distância δ de *A*. A intensidade da força **F** é $F = eV/d$, onde $-e$ é a carga de um elétron e *d* é a distância entre as placas. Desprezando os efeitos da gravidade, deduza uma expressão para a deflexão *d* em termos de *V*, v_0, a carga $-e$ e a massa *m* de um elétron, e as dimensões *d*, *l* e *L*.

12.64 No Problema 12.63, determine o menor valor admissível da razão d/l em termos de *e*, *m*, v_0 e *V* se em $x = l$ a distância mínima admissível entre a trajetória dos elétrons e a placa positiva for de $0{,}05d$.

12.65 O modelo atual de tubo de raio catódico pode ser modificado tal que o comprimento do tubo e o espaço entre as placas são reduzidas em 40% e 20%, respectivamente. Se o tamanho da tela permanece a mesma, determine o novo comprimento l' das placas considerando que todas outras características do tubo permanecem inalteradas. (*Ver* Problema 12.63 para descrição do tubo de raios catódicos.)

12.7 Quantidade de movimento angular de uma partícula. Taxa de variação da quantidade de movimento angular

Considere uma partícula P de massa m que se move em relação a um sistema de referência newtoniano $Oxyz$. Como vimos na Seção 12.3, a quantidade de movimento linear da partícula em um dado instante é definida como o vetor $m\mathbf{v}$ obtido multiplicando-se a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula por sua massa m. O momento em relação a O do vetor $m\mathbf{v}$ é chamado de *momento da quantidade de movimento*, ou *quantidade de movimento angular*, da partícula em relação a O naquele instante, representado por $\mathbf{H}_O$. Recordando a definição de momento de um vetor (Seção 3.6) e representando por $\mathbf{r}$ o vetor de posição de P, escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{12.12}$$

Figura 12.12

e notamos que $\mathbf{H}_O$ é um vetor perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ e de intensidade

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi \tag{12.13}$$

onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ (Fig. 12.10). O sentido de $\mathbf{H}_O$ pode ser determinado a partir do sentido de $m\mathbf{v}$, aplicando-se a regra da mão direita. A unidade da quantidade de movimento angular é obtida pela multiplicação das unidades de comprimento e de quantidade de movimento linear (Seção 12.4). Com unidades do sistema SI, temos

$$(\text{m})(\text{kg} \cdot \text{m/s}) = \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

Decompondo os vetores $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ em componentes e aplicando a fórmula (*3.10*), escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{12.14}$$

Os componentes de $\mathbf{H}_O$, que também representam os momentos da quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}$ em relação aos eixos coordenados, podem ser obtidos expandindo o determinante em (12.13). Temos

$$\begin{aligned} H_x &= m(yv_z - zv_y) \\ H_y &= m(zv_x - xv_z) \\ H_z &= m(xv_y - yv_x) \end{aligned} \tag{12.15}$$

No caso de uma partícula que se move no plano xy, temos $z = v_z = 0$ e os componentes H_x e H_y se reduzem a zero. A quantidade de movimento angular é então perpendicular ao plano xy; ele é, assim, completamente definido pelo escalar

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \tag{12.16}$$

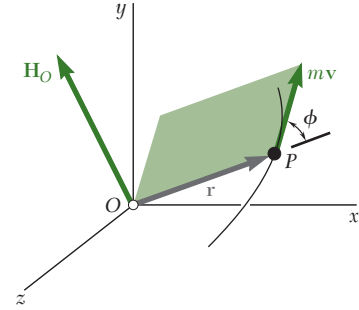
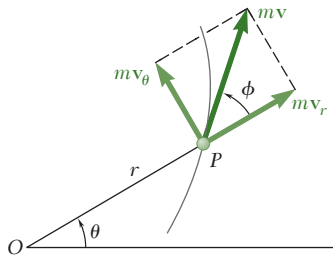



Figura 12.13

que vai ser positivo ou negativo de acordo com o sentido em que a partícula se mover em relação a O. Se forem usadas coordenadas polares, decompomos a quantidade de movimento linear da partícula em componentes radial e transversal (Fig 12.13) e escrevemos

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi = rmv_\theta \tag{12.17}$$

ou, recordando de (11.45) que $v_\theta = r\dot{\theta}$,

$$H_O = mr^2\dot{\theta} \tag{12.18}$$

Vamos agora calcular a derivada em relação a t da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ de uma partícula P que se move no espaço. Diferenciando ambos os membros da Eq. (12.12) e recordando a regra para a diferenciação de um produto vetorial (Seção 11.10), escrevemos

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\mathbf{a}$$

Como os vetores $\mathbf{v}$ e $m\mathbf{v}$ são colineares, o primeiro termo da expressão obtida é zero; e, pela segunda lei de Newton, $m\mathbf{a}$ é igual à soma $\Sigma\mathbf{F}$ das forças que atuam sobre P. Observando que $\mathbf{r} \times \Sigma\mathbf{F}$ representa a soma $\Sigma\mathbf{M}_O$ dos momentos em relação a O dessas forças, escrevemos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{12.19}$$

A Eq. (12.19), que resulta diretamente da segunda lei de Newton, afirma que *a soma dos momentos em relação a O das forças que atuam sobre a partícula é igual à taxa de variação do momento da quantidade de movimento, ou quantidade de movimento angular, da partícula em relação a O.*

12.8 Equações do movimento em termos de componentes radial e transversal

Considere uma partícula P, de coordenadas polares r e θ, que se move em um plano sob a ação de várias forças. Decompondo as forças e a aceleração da partícula em componentes radial e transversal (Fig. 12.14) e substituindo-as na Eq. (12.2), obtemos as duas equações escalares

$$\Sigma F_r = ma_r \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta \tag{12.20}$$

Substituindo para a_r e a_θ das Eqs. (11.46), temos

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

As equações obtidas podem ser resolvidas para duas incógnitas.

Foto 12.4 As forças aplicadas nas amostras da centrífuga de alta velocidade podem ser descritas em termos de componentes radial e transversal.

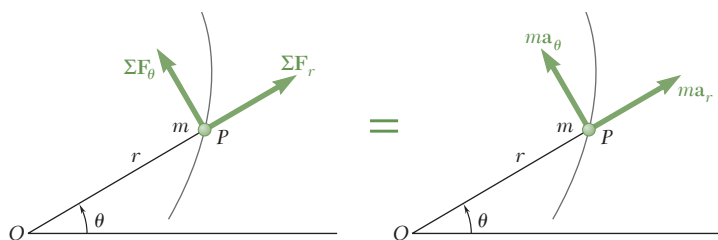



Figura 12.12

A Eq. (12.22) poderia ter sido obtida da Eq. (12.19). Recordando (12. 18) e notando que $\Sigma M_O = r\Sigma F_\theta$, a Eq. (12.19) fornece

$$r\Sigma F_\theta = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta})$$
$$= m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta})$$

após dividir ambos os membros por r

$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

12.9 Movimento sujeito a uma força central. Conservação da quantidade de movimento angular

Quando a única força que atua sobre uma partícula P é uma força $\mathbf{F}$ dirigida para, ou afastando-se de, um ponto fixo O, diz-se que essa partícula se move sob a *ação de uma força central* e o ponto O é chamado de *centro de força* (Fig. 12.15). Como a linha de ação de $\mathbf{F}$ passa por O, devemos ter $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$ em qualquer instante dado. Substituindo na Eq. (12.19), obtemos, portanto

$$\dot{\mathbf{H}}_O = 0$$

para todos os valores de t e integrando em t

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Figura 12.15

Concluímos, então, que *a quantidade de movimento angular de uma partícula que se move sob a ação de uma força central é constante, tanto em intensidade como em direção e sentido.*

Recordando a definição de quantidade de movimento angular de uma partícula (Seção 12.7), escrevemos

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.24}$$

da qual segue-se que o vetor de posição $\mathbf{r}$ da partícula P deve ser perpendicular ao vetor constante $\mathbf{H}_O$. Portanto, uma partícula sob a ação de uma

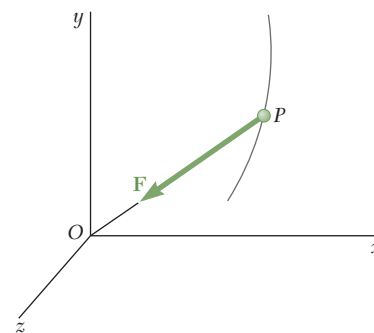
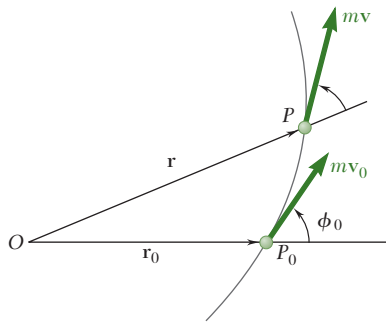



Figura 12.16

força central se move em um plano fixo perpendicular a $\mathbf{H}_O$. O vetor $\mathbf{H}_O$ e o plano fixo são definidos pelo vetor de posição inicial $\mathbf{r}_0$ e pela velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ da partícula. Por conveniência, vamos assumir que o plano da figura coincide com o plano fixo do movimento (Fig. 12.16).

Como a intensidade $\mathbf{H}_O$ da quantidade de movimento angular da partícula P é constante, o membro do lado direito da Eq. (12.13) deve ser constante. Escrevemos, assim,

$$rmv \text{ sen } \phi = r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 \tag{12.25}$$

Esta relação se aplica ao movimento de qualquer partícula sob a ação de uma força central. Como a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta é uma força central dirigida para o centro do Sol, a Eq. (12.25) é fundamental para o estudo do movimento planetário. Por uma razão similar, ela é também fundamental para o estudo do movimento de veículos espaciais em órbita ao redor da Terra.

Alternativamente, recordando a Eq. (12.18), podemos expressar o fato de que a intensidade H_O da quantidade de movimento angular da partícula P é constante escrevendo

$$mr^2\dot{\theta} = H_O = \text{constante} \tag{12.26}$$

ou, dividindo por m e representando por h a quantidade de movimento angular por unidade de massa H_O/m

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{12.27}$$

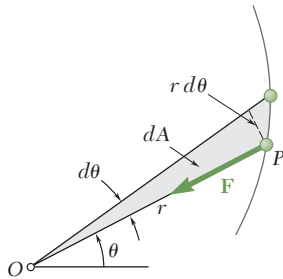



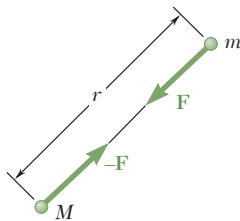
Figura 12.17

Uma interpretação geométrica interessante pode ser dada à Eq. (12.27). Observando a partir da Fig. 12.17 que o raio vetor OP varre uma área infinitesimal $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, quando ele gira de um ângulo $d\theta$, e definindo a *velocidade areolar* da partícula como o quociente dA/dt, constatamos que o membro do lado esquerdo da Eq. (12.27) representa o dobro da velocidade areolar da partícula. Concluímos, então, que *quando uma partícula se move sob a ação de uma força central, sua velocidade areolar é constante*.

12.10 Lei de Newton da gravitação

Como vimos na seção anterior, a força gravitacional exercida pelo Sol sobre um planeta, ou pela Terra sobre um satélite em órbita, é um exemplo importante de uma força central. Nesta seção você vai aprender como determinar a intensidade de uma força gravitacional.

Figura 12.18

Em sua *lei de gravitação universal*, Newton estabeleceu que duas partículas de massas M e m a uma distância r uma da outra se atraem com forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ dirigidas ao longo da linha que as une (Fig. 12.18). A intensidade comum F das duas forças é

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.28}$$

onde G é uma constante universal, chamada *constante de gravitação.* Experimentos mostram que o valor de G é $(66{,}73 \pm 0{,}03) \times 10^{-12}\ \mathrm{m^3/kg \cdot s^2}$ em unidades SI. As forças gravitacionais existem entre qualquer par de corpos, mas seus efeitos são apreciáveis somente quando um dos corpos tem uma massa muito grande. O efeito das forças gravitacionais é evidente nos casos de movimento de um planeta ao redor do Sol, de satélites em órbita ao redor da Terra, ou de corpos que caem sobre a superfície da Terra.

Como a força exercida pela Terra sobre um corpo de massa m localizado sobre – ou próximo – a sua superfície é definida como o peso $\mathbf{W}$ do corpo, podemos substituir F pela intensidade $W = mg$ do peso e r pelo raio R da Terra na Eq. (12.28). Obtemos

$$W = mg = \frac{GM}{R^2}m \qquad \text{ou} \qquad g = \frac{GM}{R^2} \tag{12.29}$$

onde M é a massa da Terra. Como a Terra não é realmente esférica, a distância R do centro da Terra depende do ponto escolhido na sua superfície e os valores de W e g irão, dessa maneira, variar conforme a altitude e latitude do ponto considerado. Outra razão para a variação de W e g com a latitude é que um sistema de eixos fixo à Terra não constitui um sistema de referência newtoniano (ver Seção 12.2). Uma definição mais precisa do peso de um corpo deve, portanto, incluir um componente que represente a força centrífuga devida à rotação da Terra. Os valores de g ao nível do mar variam de $9{,}781\ \mathrm{m/s^2}$ no Equador a $9{,}833\ \mathrm{m/s^2}$ nos polos.*

A força exercida pela Terra sobre um corpo de massa m localizado no espaço a uma distância r do centro da Terra pode ser encontrada a partir da Eq. (12.28). Os cálculos serão um pouco simplificados se notarmos que, de acordo com a Eq. (12.29), o produto da constante de gravitação G e da massa M da Terra pode ser expresso como

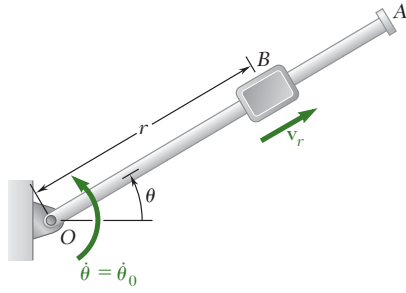
$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

onde g e o raio R da Terra são substituídos por seus valores médios $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$ e $R = 6{,}37 \times 10^6$ m em unidades do SI.**

A descoberta da lei da gravitação universal tem sido frequentemente atribuída à crença de que, após observar uma maçã caindo de uma árvore, Newton refletiu que a Terra deveria atrair uma maçã e a Lua da mesma forma. Embora seja duvidoso que esse incidente realmente tenha ocorrido, pode-se dizer que Newton não teria formulado sua lei se ele não tivesse primeiro percebido que a aceleração de um corpo em queda deve ter a mesma causa que a aceleração que mantém a Lua em sua órbita. Esse conceito básico de continuidade da atração gravitacional é bem mais facilmente entendido hoje, quando o espaço entre a maçã e a Lua está sendo preenchido com satélites artificiais da Terra.

---

* Uma fórmula que expressa g em termos da latitude ϕ foi dada no Problema 12.1.

** O valor de R é facilmente encontrado se recordarmos que a circunferência da Terra é $2\pi R = 40 \times 10^6$ m.

PROBLEMA RESOLVIDO 12.6

Um bloco B de massa m pode deslizar livremente sobre um braço OA sem atrito que gira em um plano horizontal com uma taxa constante $\dot\theta_0$. Sabendo que B é liberado a uma distância r_0 de O, expresse, como uma função de r, (a) o componente v_r da velocidade de B ao longo de OA e (b) a intensidade da força horizontal $\mathbf{F}$ exercida sobre B pelo braço OA.

SOLUÇÃO

Como todas as outras forças são perpendiculares ao plano da figura, a única força mostrada na figura atuando sobre B é a força $\mathbf{F}$ perpendicular a OA.

Equações de movimento. Usando componentes radial e transversal.

$$+\nearrow \Sigma F_r = ma_r: \qquad 0 = m(\ddot r - r\dot\theta^2) \qquad (1)$$
$$+\nwarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad F = m(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta) \qquad (2)$$

a. Componente vr da velocidade. Como $v_r = \dot r$, temos

$$\ddot r = \dot v_r = \frac{dv_r}{dt} = \frac{dv_r}{dr}\frac{dr}{dt} = v_r\frac{dv_r}{dr}$$

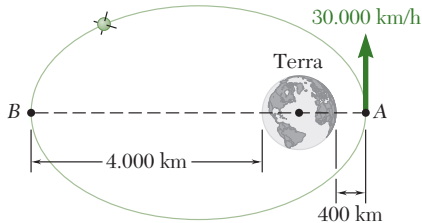
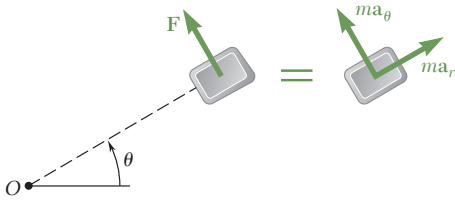
Substituindo para $\ddot r$ em (1), recordando que $\dot\theta = \dot\theta_0$ e separando as variáveis e

$$v_r\,dv_r = \dot\theta_0^2 r\,dr$$

Multiplicando por 2, e integrando de 0 a v_r e de r_0 a r,

$$v_r^2 = \dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2) \qquad v_r = \dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad ◀$$

b. Força horizontal F. Fazendo $\dot\theta = \dot\theta_0$, $\ddot\theta = 0$, $\dot r = v_r$ na Eq. (2), e substituindo para v_r a expressão obtida na parte a,

$$F = 2m\dot\theta_0(r^2 - r_0^2)^{1/2}\dot\theta_0 \qquad F = 2m\dot\theta_0^2(r^2 - r_0^2)^{1/2} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 12.7

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 30.000 km/h de uma altitude de 400 km. Determine a velocidade do satélite quando atinge sua altitude máxima de 4.000 km. Recorde-se de que o raio da Terra é de 6.370 km.

SOLUÇÃO

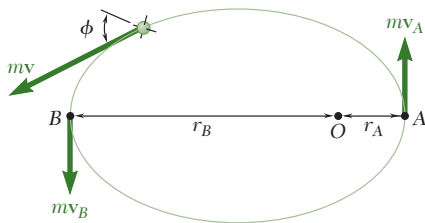
Como o satélite está se movendo sob a ação de uma força central dirigida para o centro O da Terra, seu momento angular $\mathbf{H}_O$ é constante. Da Eq. (12.13), temos

$$rmv \text{ sen } \phi = H_O = \text{constante}$$

que mostra que v é mínima em B, onde r e sen ϕ são máximos. Expressando a conservação da quantidade de movimento angular entre A e B.

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

$$v_B = v_A\frac{r_A}{r_B} = (30.000\text{ km/h})\frac{6.370\text{ km} + 400\text{ km}}{6.370\text{ km} + 4.000\text{ km}}$$

$$v_B = 19.590\text{ km/h} \quad ◀$$

Nota: Observe que r é a distância do centro da Terra e é expressa como $r = R_{terra}$ + altitude.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição continuamos nosso estudo da segunda lei de Newton expressando a força e a aceleração em termos de seus *componentes radial e transversal,* onde as correspondentes equações de movimento são:

$$\Sigma F_r = ma_r: \qquad \Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$
$$\Sigma F_\theta = ma_\theta: \qquad \Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$$

Introduzimos o *momento da quantidade de movimento,* ou a *quantidade de movimento angular,* $\mathbf{H}_O$ de uma partícula em relação a O

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (12.12)$$

e encontramos que $\mathbf{H}_O$ é constante quando a partícula se move sob a ação de uma *força central* com seu centro localizado em O.

1. Usando componentes radial e transversal. Os componentes radial e transversal foram introduzidos na última lição do Cap. 11 [Seção 11.14]; você deve revisar aquele material antes de tentar resolver os problemas a seguir. Além disso, nossos comentários na lição anterior em relação à aplicação da segunda lei de Newton (desenhar um diagrama de corpo livre e um diagrama ma, etc.) ainda se aplicam [Problema Resolvido 12.6]. Finalmente, observe que a solução desse problema resolvido depende da aplicação de técnicas desenvolvidas no Cap. 11 – você vai precisar empregar técnicas semelhantes para resolver alguns dos problemas desta lição.

2. Resolvendo problemas que envolvem o movimento de uma partícula sujeita a uma força central. Em problemas deste tipo, a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ da partícula em relação ao centro de força O se mantém. Você vai achar conveniente introduzir a constante $h = H_O/m$ que representa a quantidade de movimento angular por unidade de massa. A conservação da quantidade de movimento angular da partícula P em relação a O pode então ser expressa por uma das equações seguintes

$$rv \operatorname{sen} \phi = h \qquad \text{ou} \qquad r^2\dot{\theta} = h$$

onde r e θ são as coordenadas polares de P e ϕ é o ângulo que a velocidade $\mathbf{v}$ da partícula faz com a linha OP (Fig. 12.16). A constante h pode ser determinada a partir das condições iniciais, e qualquer uma das equações anteriores pode ser resolvida para uma incógnita.

(*continua*)

3. Em problemas de mecânica espacial que envolvem o movimento orbital de um planeta em torno do Sol, ou de um satélite em torno da Terra, da Lua ou de algum outro planeta, a força central **F** é a força de atração gravitacional; ela é dirigida *para* o centro de força O e tem a intensidade

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.28}$$

Observe que no caso particular da força gravitacional exercida pela Terra, o produto GM pode ser substituído por gR^2, onde R é o raio da Terra [Eq. 12.30].

Os dois casos de movimento orbital a seguir são encontrados frequentemente:

a. Para um satélite em uma órbita circular, a força **F** é normal à órbita e pode ser escrita como $F = ma_n$; substituindo o valor de F da Eq. (12.28) e observando que $a_n = v^2/\rho = v^2/r$, você obterá

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad \text{ou} \qquad v^2 = \frac{GM}{r}$$

b. Para um satélite em uma órbita elíptica, o raio vetor **r** e a velocidade **v** do satélite são perpendiculares entre si nos pontos A e B que são, respectivamente, o mais afastado e o mais próximo do centro de força O [Problema Resolvido 12.7]. Portanto, a conservação da quantidade de movimento angular do satélite entre esses dois pontos pode ser expressa como

$$r_A m v_A = r_B m v_B$$

PROBLEMAS

12.66 A haste OA gira em torno de O em um plano horizontal. O movimento do colar B de 300 g é definido pelas relações $r = 300 + 100 \cos (0{,}5\pi t)$ e $\theta = \pi(t^2 - 3t)$, onde r é expresso em milímetros, t em segundos e θ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando (*a*) $t = 0$ e (*b*) $t = 0{,}5$ s.

Figura P12.66 e P12.68

12.67 Para o movimento definido no Problema 12.66, determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando $t = 1{,}5$ s.

12.68 A haste OA oscila em torno de O em um plano horizontal. O movimento do colar B de 2 kg é definido pelas relações $r = 3/(t + 4)$ e $\theta = (2/\pi)$ sen πt, onde r é expresso em metros, t em segundos e θ em radianos. Determine as componentes radial e transversal da força exercida sobre o colar quando (*a*) $t = 1$ s, (*b*) $t = 6$ s.

12.69 O colar B de massa m desliza sobre o braço sem atrito AA'. O braço é preso ao tambor D e roda em torno de O em um plano horizontal a uma taxa $\dot{\theta} = ct$, onde c é uma constante. À medida que o conjunto braço-tambor gira, um mecanismo dentro do tambor solta a corda de modo que o colar se move para fora a partir de O com uma velocidade escalar constante k. Sabendo que em $t = 0$, $r = r_0$, expresse em função de m, c, k, r_0 e t (*a*) a tração T na corda, (*b*) a intensidade da força horizontal $\mathbf{Q}$ exercida sobre B pelo braço AA'.

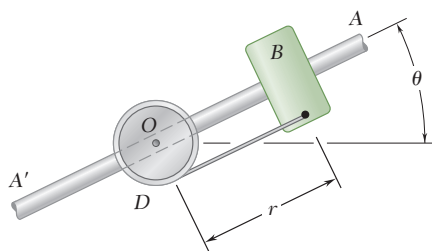



Figura P12.69 e P12.70

12.70 O colar B de 3 kg desliza sobre o braço sem atrito AA'. O braço é preso ao tambor D e roda em torno de O em um plano horizontal a uma taxa $\dot{\theta} = 0{,}75t$, onde $\dot{\theta}$ e t são expressos em rad/s e segundos, respectivamente. À medida que o conjunto braço-tambor gira, um mecanismo dentro do tambor solta a corda de modo que o colar se move para fora a partir de O com uma velocidade escalar constante de 0,5 m/s. Sabendo que em $t = 0$, $r = 0$, determine o instante em que a tração na corda é igual à intensidade da força horizontal exercida sobre B pelo braço AA'.

12.71 O pino B de 100 g desliza ao longo da fenda no braço giratório OC e ao longo da fenda DE que foi aberta em um plano horizontal fixo. Desprezando o atrito e sabendo que o braço OC gira a uma taxa constante $\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s, determine para qualquer valor dado de θ (*a*) os componentes radial e transversal da força resultante $\mathbf{F}$ exercida sobre o pino B, (*b*) as forças $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Q}$ exercidas sobre o pino B pelo braço OC e pela parede da fenda DE, respectivamente.

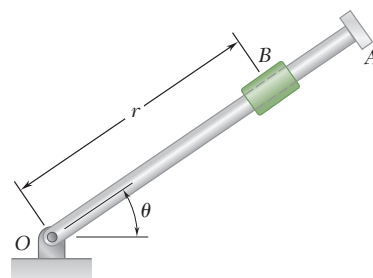
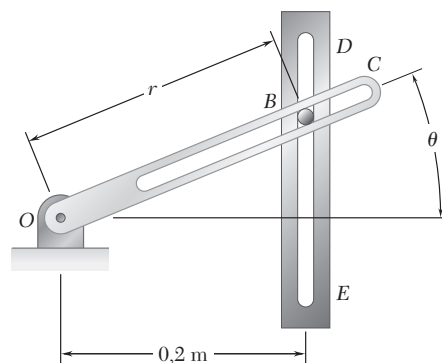
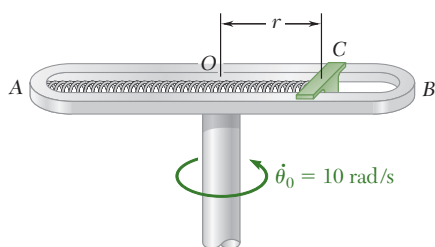



Figura P12.71

Figura *P12.72*

***12.72** O cursor C pesa 230 g e pode mover-se na fenda aberta no braço AB, que gira a uma taxa constante $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s no plano horizontal. O cursor é preso a uma mola de constante $k = 36$ N/m, que não está deformada quando $r = 0$. Sabendo que o cursor é liberado em repouso com velocidade radial nula na posição $r = 450$ mm, e desprezando o atrito, determine para a posição $r = 300$ mm (a) as componentes radial e transversal da velocidade do cursor, (b) as componentes radial e transversal de sua aceleração, (c) a força horizontal exercida no cursor pelo braço AB.

***12.73** Resolver o Problema 12.72, considerando que a mola não está deformada quando o cursor C é posicionado a 50 mm para a esquerda do ponto médio O no braço AB ($r = -50$ mm).

12.74 Uma partícula de massa m é lançada do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular à linha OA e se movimenta sob a ação de uma força central $\mathbf{F}$ ao longo de uma trajetória semicircular de diâmetro OA. Observando que $r = r_0 \cos \theta$ e usando a Eq. (12.27), mostre que a velocidade escalar da partícula é $v = v_0 / \cos^2 \theta$.

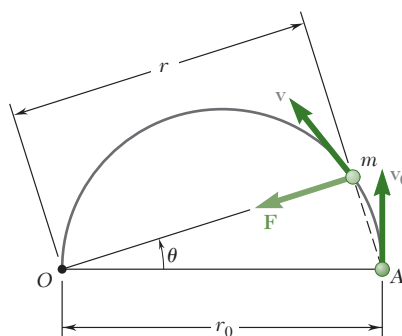



Figura P12.74

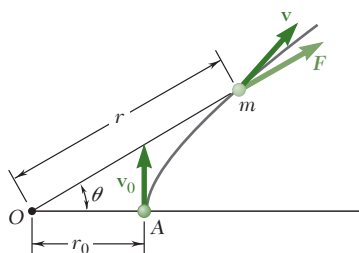



Figura P12.76

12.75 Para a partícula do Problema 12.74, determine a componente tangencial F_t da força central $\mathbf{F}$ ao longo da tangente da trajetória da partícula para (a) $\theta = 0$, (b) $\theta = 45°$.

12.76 Uma partícula de massa m é lançada do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular à linha OA e se move sob a ação da força central $\mathbf{F}$ dirigida para fora do centro de força O. Sabendo que a partícula segue uma trajetória definida pela equação $r = r_0\sqrt{\cos 2\theta}$ e usando a Eq. (12.27), expresse os componentes radiais e transversais da velocidade $\mathbf{v}$ da partícula em função de θ.

12.77 Para a partícula do Problema 12.76, mostre (a) que a velocidade da partícula e a força central $\mathbf{F}$ são proporcionais à distância r da partícula ao centro de força O, (b) que o raio de curvatura da trajetória é proporcional a r^3.

12.78 O raio da órbita da lua de um dado planeta é três vezes o tamanho do raio deste planeta. Representando por ρ a densidade média do planeta, mostre que o tempo necessário para a lua fazer uma volta completa em torno dele é $(24\pi/G\rho)^{1/2}$, onde G é a constante de gravitação.

12.79 Mostre que o raio r da órbita da lua de um dado planeta pode ser determinado a partir do raio R deste planeta, da aceleração da gravidade na superfície do planeta e do tempo τ necessário para a lua fazer uma volta completa em torno do planeta. Determine a aceleração da gravidade na superfície do planeta Júpiter sabendo que $R = 71.492$ km, $\tau = 3{,}551$ dias e $r = 670{,}9 \times 10^3$ km para sua lua, Europa.

12.80 Satélites de comunicação são colocados em uma órbita geossíncrona, isto é, em uma órbita circular tal que eles realizam uma volta completa em torno da Terra em um dia sideral (23,934 horas) e, então, aparentam estar estacionários em relação ao solo. Determine (*a*) a altitude desses satélites acima da superfície da Terra, (*b*) a velocidade com que eles descrevem suas órbitas.

12.81 Determine a massa da Terra sabendo que o raio médio da órbita da Lua em torno da Terra é de 382.250 km e que a Lua precisa de 27,32 dias para completar uma volta inteira em torno da Terra.

12.82 Uma espaçonave é colocada em uma órbita polar sobre o planeta Marte a uma altitude de 380 km. Sabendo que a massa específica média de Marte é de 3,94 Mg/m^3 e que o raio de Marte é de 3.397 km, determine (*a*) o tempo τ necessário para a espaçonave realizar uma volta completa em torno de Marte, (*b*) a velocidade com que a espaçonave descreve sua órbita.

12.83 Um satélite é colocado em uma órbita circular em torno do planeta Saturno a uma altitude de 3360 km. O satélite descreve sua órbita com velocidade de $87{,}5 \times 10^3$ km/h. Sabendo que o raio da órbita sobre Saturno e o período de Atlas, uma das luas de Saturno, são $136{,}9 \times 10^3$ km e 0,6017 dias, respectivamente, determine (*a*) o raio de Saturno, (*b*) a massa de Saturno. (O *período* de um satélite é o tempo requerido para ele concluir uma volta completa em torno do planeta.)

12.84 Os períodos (ver Problema 12.83) das luas do planeta Urano, Julieta e Titânia, foram observados como sendo de 0,4931 dias e 8,706 dias, respectivamente. Sabendo que o raio da órbita de Julieta é 64.360 km, determine (*a*) a massa de Urano, (*b*) o raio da órbita de Titânia.

12.85 Uma espaçonave de 600 kg é colocada primeiramente em uma órbita circular em torno da Terra a uma altitude de 4.500 km e, então, transferida para uma órbita circular em torno da Lua. Sabendo que a massa da Lua é 0,01230 vezes a massa da Terra e que o raio da Lua é de 1.700 km, determine (*a*) a força gravitacional exercida sobre a espaçonave enquanto ela orbitava a Terra, (*b*) o raio necessário da órbita da espaçonave em torno da Lua (ver Prob. 12.83) para que os períodos das duas órbitas sejam iguais, (*c*) a aceleração da gravidade na superfície da Lua.

12.86 Para colocar um satélite de comunicações em uma órbita geossíncrona (ver Problema 12.80) a uma altitude de 35.580 km acima da superfície da Terra, o satélite primeiro é liberado do ônibus espacial, cuja órbita circular está na altitude de 296 km, e então é propelido, por um estágio superior de foguete auxiliar, para sua altitude final. Quando

o satélite passa por A, o motor do foguete é acionado para inserir o satélite em uma órbita elíptica de transferência. O foguete auxiliar é novamente acionado em B para inserir o satélite em uma órbita geossíncrona. Sabendo que o segundo impulso aumenta a velocidade escalar do satélite em 1.400 m/s, determine (*a*) a velocidade escalar do satélite quando ele se aproxima de B na órbita de transferência elíptica, (*b*) o aumento em velocidade escalar resultante da primeira propulsão em A.

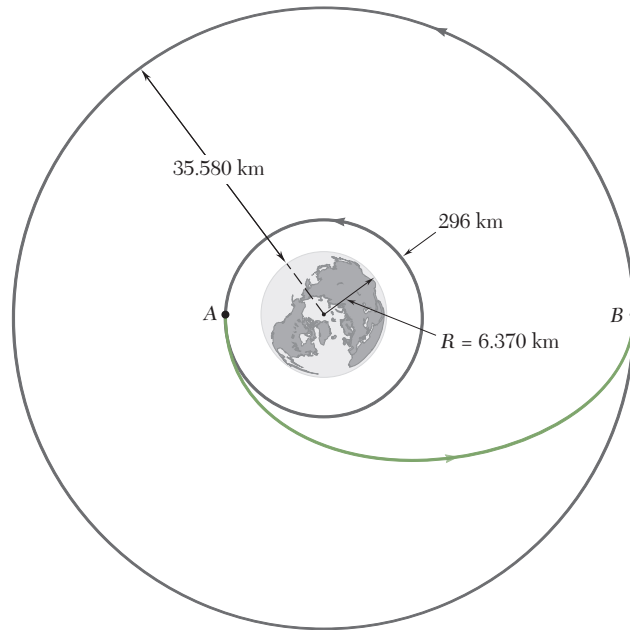



Figura P12.86

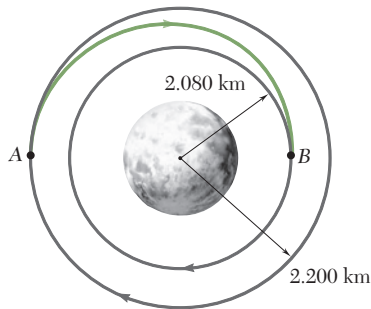



Figura P12.87

12.87 Um veículo espacial está em uma órbita circular de 2.200 km de raio ao redor da Lua. Para ser transferido para uma órbita menor, de 2.080 km de raio, o veículo é posto primeiro em uma trajetória elíptica AB, reduzindo-se sua velocidade escalar em 26,3 m/s ao passar por A. Sabendo que a massa da Lua é de $73{,}49 \times 10^{21}$ kg, determine (*a*) a velocidade escalar do veículo quando ele se aproxima de B pela trajetória elíptica, (*b*) em quanto sua velocidade deve ser reduzida quando ele se aproxima de B para que ele seja inserido na órbita circular menor.

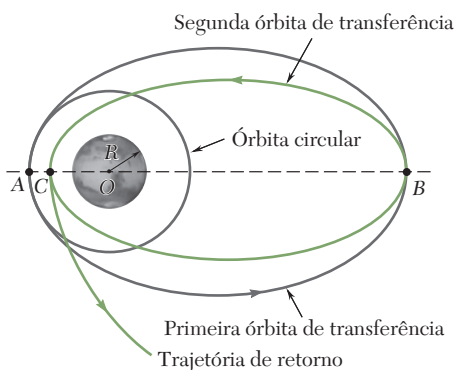



Figura P12.88

12.88 Planos para a missão de um pouso não tripulado ao planeta Marte indica que o veículo de retorno à Terra primeiro descreve uma órbita circular a uma altitude d_A = 2.200 km acima da superfície do planeta com a velocidade 2.771 m/s. Ao passar pelo ponto A, o veículo foi posto em uma órbita de transferência elíptica pela ação de seus foguetes, aumentando sua velocidade escalar de Δv_A = 1.046 m/s. Ao passar por meio do ponto B, na altitude d_B = 100.000 km, foi posto em uma segunda órbita de transferência localizada em um plano ligeiramente diferente, mudando a direção de sua velocidade e reduzindo sua velocidade escalar de $\Delta v_B = -22{,}0$ m/s. Finalmente, ao passar por meio do ponto C, a uma altitude d_C = 1.000 km, sua velocidade escalar foi incrementada de Δv_C = 660 m/s para inseri-lo na trajetória de retorno. Sabendo que o raio do planeta Marte é R = 3.400 km, determine a velocidade do veículo depois de completar a última manobra.

12.89 Um ônibus espacial S e um satélite A estão nas órbitas circulares mostradas na figura. Para poder recuperar o satélite, o ônibus espacial é primeiro colocado em uma trajetória elíptica BC, aumentando-se sua velocidade escalar em $\Delta v_B = 84$ m/s quando ele passa por B. Quando o ônibus se aproxima de C, sua velocidade escalar é aumentada em $\Delta v_C = 78$ m/s para inseri-lo em uma segunda órbita de transferência elíptica CD. Sabendo que a distância de O a C é de 6.860 km, determine o valor em que a velocidade escalar do ônibus deve ser aumentada quando ele se aproxima de D para que seja inserido na órbita circular do satélite.

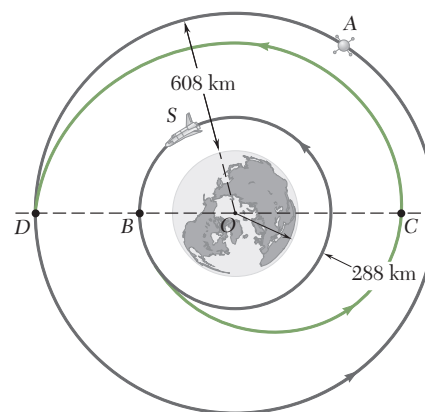



Figura P12.89

12.90 Um colar de 1,5 kg pode deslizar em uma haste horizontal que é livre para girar sobre um eixo vertical. O colar é inicialmente mantido preso ao eixo em A por uma corda. A mola de constante 35 N/m é fixada ao colar e ao eixo e não está deformada quando o colar está em A. No momento em que a haste gira a uma taxa $\dot{\theta} = 16$ rad/s, a corda é cortada e o colar move-se ao longo da haste. Desprezando o atrito e a massa da haste, determine (*a*) as componentes radial e transversal da aceleração do colar em A, (*b*) a componente transversal da velocidade do colar em B.

12.91 Para o colar do Problema 12.90, considerando que a haste inicialmente gira a uma taxa de $\dot{\theta} = 12$ rad/s, determine para a posição B do colar (*a*) a componente transversal da velocidade do colar, (*b*) as componentes radial e transversal de sua aceleração, (*c*) a aceleração do colar relativa à haste.

Figura P12.90

12.92 Uma bola A de 200 g e uma bola B de 400 g são montadas em uma barra horizontal que gira livremente sobre um eixo vertical. As bolas são mantidas nas posições mostradas na figura por pinos. O pino que segura B é repentinamente removido e a bola se move para a posição C enquanto a barra gira. Desprezando o atrito e a massa da barra e sabendo que a velocidade escalar inicial de A é $v_A = 2{,}5$ m/s, determine (*a*) os componentes radial e transversal da aceleração da bola B imediatamente após o pino ser retirado, (*b*) a aceleração da bola B relativa à barra nesse instante, (*c*) a velocidade escalar da bola A depois da bola B ter atingido o batente em C.

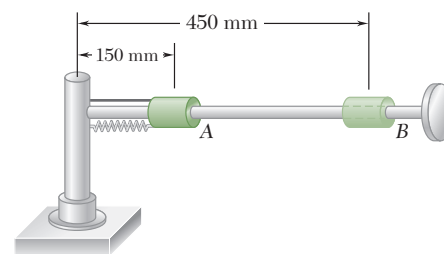
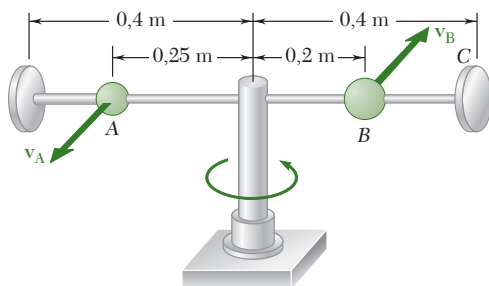



Figura *P12.92*

12.93 Uma pequena bola balança em um círculo horizontal na extremidade de uma corda de comprimento l_1, que forma um ângulo θ_1 com a vertical. A corda é então puxada lentamente pelo suporte em O até que o comprimento da ponta livre seja de l_2. (*a*) Deduza uma relação entre, l_1, l_2, θ_1 e θ_2. (*b*) Se a bola é posta em movimento de modo que inicialmente $l_1 = 0{,}8$ m e $\theta_1 = 35°$, determine o ângulo θ_2 quando $l_2 = 0{,}6$ m.

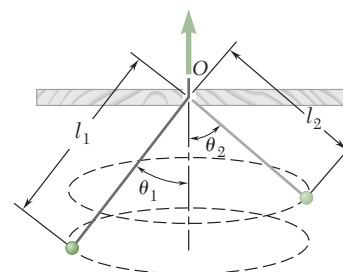



Figura *P12.93*

*12.11 Trajetória de uma partícula sob uma força central

Considere uma partícula P que se move sob a ação de uma força central $\mathbf{F}$. Nossa proposta é obter a equação diferencial que defina sua trajetória.

Considerando que a força $\mathbf{F}$ é dirigida para o centro de força O, notamos que ΣF_r e ΣF_θ se reduzem, respectivamente, a $-F$ e zero nas Eqs. (12.21) e (12.22). Escrevemos, portanto

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -F \tag{12.31}$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \tag{12.32}$$

Essas equações definem o movimento de P. Vamos, entretanto, substituir a Eq. (12.32) pela Eq. (12.27), que é equivalente à Eq. (12.32), como se pode facilmente verificar diferenciando-a em relação a t, mas que é de utilização mais conveniente. Escrevemos

$$r^2\dot{\theta} = h \qquad \text{ou} \qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = h \tag{12.33}$$

A Eq. (12.33) pode ser usada para eliminar a variável independente t da Eq. (12.31). Resolvendo a Eq. (12.33) para $\dot{\theta}$ ou $d\theta/dt$, temos

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2} \tag{12.34}$$

da qual se segue que

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.35}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{d\dot{r}}{d\theta}$$

ou, substituindo para $\dot{r}$ da (12.35)

$$\ddot{r} = \frac{h}{r^2}\frac{d}{d\theta}\left[-h\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)\right]$$

$$\ddot{r} = -\frac{h^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) \tag{12.36}$$

Substituindo para $\dot{\theta}$ e $\ddot{r}$ de (12.34) e (12.36), respectivamente, na Eq. (12.31) e introduzindo a função $u = 1/r$, obtemos, após simplificações

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \tag{12.37}$$

Na dedução da Eq. (12.37), a força $\mathbf{F}$ foi considerada como estando dirigida para O. A intensidade F deve ser, portanto, positiva se $\mathbf{F}$ estiver realmente dirigida para O (força de atração) e negativa se $\mathbf{F}$ estiver se afastando de O (força repulsiva). Se F é uma função conhecida de r e, portanto, de u, a Eq. (12.37) é uma equação diferencial em u e θ. Essa equação diferencial define a trajetória seguida pela partícula sob a ação da força central $\mathbf{F}$. A equação da trajetória pode ser obtida resolvendo-se a equação diferencial (12.37) para u como uma função de θ e determinando as constantes de integração a partir das condições iniciais.

*12.12 Aplicação à mecânica espacial

Após os últimos estágios de seus foguetes lançadores terem queimado seus combustíveis, os satélites da Terra e outros veículos espaciais estão sujeitos apenas à atração gravitacional da Terra. Seu movimento pode, portanto, ser determinado a partir das Eqs. (12.33) e (12.37), que governam o movimento de uma partícula sob a ação de uma força central, depois que F tiver sido substituído pela expressão obtida para a força de atração gravitacional.* Fazendo isso na Eq. (12.37)

$$F = \frac{GMm}{r^2} = GMmu^2$$

onde M = massa da Terra
m = massa do veículo espacial
r = distância do centro da Terra ao veículo
$u = 1/r$

obtemos a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \tag{12.38}$$

onde se observa que o membro do lado direito da equação é uma constante.

A solução da equação diferencial (12.38) é obtida somando-se a solução particular $u = GM/h^2$ à solução geral $u = C\cos(\theta - \theta_0)$ da equação homogênea correspondente (isto é, a equação obtida tomando o membro do lado direito igual a zero). Escolhendo o eixo polar de modo que $\theta_0 = 0$, escrevemos

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \tag{12.39}$$

A Eq. (12.39) é a equação de uma *seção cônica* (elipse, parábola ou hipérbole) nas coordenadas polares r e θ. A origem O das coordenadas, que está localizada no centro da Terra, é um *foco* dessa seção cônica, e o eixo polar é um de seus eixos de simetria (Fig. 12.19).

A razão entre as constantes C e GM/h^2 define a *excentricidade* ε da seção cônica; fazendo

$$\varepsilon = \frac{C}{GM/h^2} = \frac{Ch^2}{GM} \tag{12.40}$$

podemos escrever a Eq. (12.39) sob a forma

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \tag{12.39'}$$

Essa equação representa três trajetórias possíveis.

1. $\varepsilon > 1$ ou $C > GM/h^2$: existem dois valores θ_1 e $-\theta_1$ do ângulo polar, definido por $\cos\theta_1 = -GM/Ch^2$, para os quais o membro do lado di-

Foto12.5 O telescópio Hubble foi colocado em órbita pelo ônibus espacial em 1990 (primeiro geoestacionário da NASA).

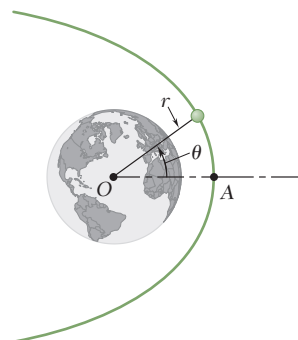



Figura 12.19

* Considere-se que os veículos espaciais aqui estudados são atraídos unicamente pela Terra e que suas massas são desprezíveis comparadas com a massa da Terra. Se um veículo se desloca para muito longe da Terra, sua trajetória pode ser afetada pela atração do Sol, da Lua ou de outro planeta.

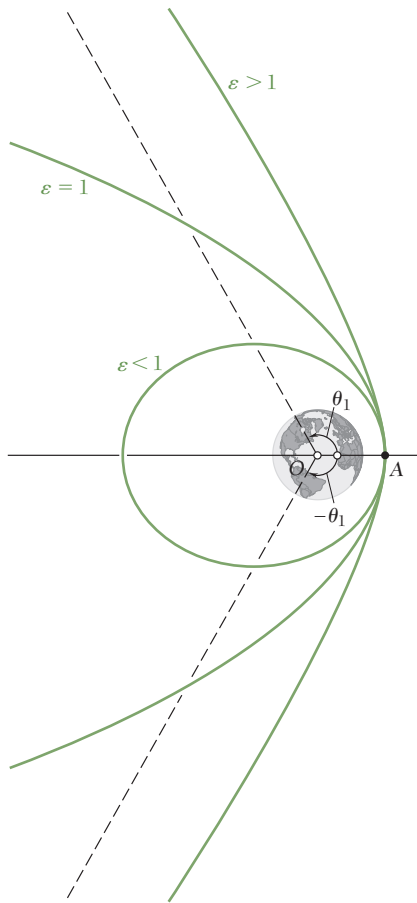



Figura 12.20

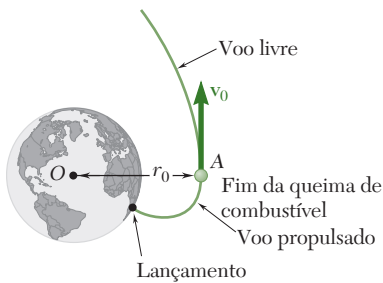



Figura 12.21

reito da Eq. (12.39) se toma zero. Para ambos os valores, o raio vetor r se torna infinito; a seção cônica é uma *hipérbole* (Fig 12.20).

2. $\varepsilon = 1$ ou $C = GM/h^2$: o raio vetor se torna infinito para $\theta = 180°$; a seção cônica é uma *parábola.*
3. $\varepsilon < 1$ ou $C < GM/h^2$: o raio vetor permanece finito para todo valor de θ; a seção cônica é uma *elipse.* No caso particular, quando $\varepsilon = C = 0$, o comprimento do raio vetor é constante; a seção cônica é um círculo.

Vejamos agora como as constantes C e GM/h^2, que caracterizam a trajetória de um veículo espacial, podem ser determinadas a partir da posição e velocidade do veículo no início de seu voo livre. Consideremos que, como é geralmente o caso, a fase propulsada de seu voo tenha sido programada de tal modo que quando o último estágio do foguete de lançamento se extinguir, o veículo terá uma velocidade paralela à superfície da Terra (Fig. 12.21). Em outras palavras, vamos considerar que o veículo espacial inicie seu voo livre no vértice A de sua trajetória.*

Representando o raio vetor e a velocidade escalar do veículo no início de seu voo livre por r_0 e v_0, respectivamente, observamos que a velocidade se reduz a seu componente transversal e, portanto, que $v_0 = r_0\dot{\theta}_0$. Recordando a Eq. (12.27), expressamos a quantidade de movimento angular por unidade de massa h como

$$h = r_0^2\dot{\theta}_0 = r_0 v_0 \tag{12.41}$$

O valor obtido para h pode ser usado para determinar a constante GM/h^2. Observamos também que o cálculo dessa constante será simplificado se usarmos a relação obtida na Seção 12.10

$$GM = gR^2 \tag{12.30}$$

onde R é o raio da Terra ($R = 6{,}37 \times 10^6$ m) e g é a aceleração da gravidade na superfície da Terra.

A constante C é obtida fazendo $\theta = 0$, $r = r_0$ em (12.39):

$$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2} \tag{12.42}$$

Substituindo para h de (12.41), podemos facilmente expressar C em termos de r_0 e v_0.

Vamos agora determinar as condições iniciais correspondentes a cada uma das três trajetórias fundamentais indicadas anteriormente. Considerando em primeiro lugar a trajetória parabólica, colocamos C igual a GM/h^2 na Eq. (12.42) e eliminamos h nas Eqs. (12.41) e (12.42). Resolvendo para v_0, obtemos

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}$$

Podemos facilmente verificar que um valor maior da velocidade inicial corresponde a uma trajetória hiperbólica e um valor menor corresponde a uma órbita elíptica. Como o valor de v_0 obtido para a trajetória parabólica é o menor valor para o qual o veículo espacial não retorna ao seu

* Problemas envolvendo lançamentos oblíquos serão considerados na Seção 13.9.

ponto de partida, ele é denominado *velocidade de escape*. Escrevemos, portanto

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad \text{ou} \qquad v_{esc} = \sqrt{\frac{2gR^2}{r_0}} \tag{12.43}$$

se fizermos uso da Eq. (12.30). Observamos que a trajetória será (1) hiperbólica, se $v_0 > v_{esc}$, (2) parabólica, se $v_0 = v_{esc}$ e (3) elíptica, se $v_0 < v_{esc}$.

Entre as várias órbitas elípticas possíveis, aquela obtida quando $C = 0$, a *órbita circular* é de especial interesse. O valor da velocidade inicial correspondente a uma órbita circular é facilmente encontrado como sendo

$$v_{circ} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \qquad \text{ou} \qquad v_{circ} = \sqrt{\frac{gR^2}{r_0}} \tag{12.44}$$

se a Eq. (12.30) for levada em conta. Verificamos a partir da Fig 12.22 que para valores de v_0 maiores que v_0, mas menores que v_{esc}, o ponto A onde o voo livre se inicia é o ponto da órbita mais próximo da Terra; esse ponto é denominado *perigeu*, enquanto o ponto A', que está mais afastado da Terra, é conhecido como *apogeu*. Para valores de v_0 menores que v_{circ}, o ponto A é o apogeu, enquanto o ponto A", no outro lado da órbita, é o perigeu. Para valores de v_0 muito menores que v_{circ}, a trajetória do veículo espacial intercepta a superfície da Terra; em tal caso, o veículo não entra em órbita.

Figura 12.22

Mísseis balísticos, que são projetados para atingir a superfície da Terra, também se deslocam ao longo de trajetórias elípticas. De fato, devemos agora compreender que qualquer objeto lançado no vácuo com uma velocidade inicial v_0 menor que v_{esc} vai se deslocar ao longo de uma trajetória elíptica. Somente quando as distâncias envolvidas são pequenas é que o campo gravitacional da Terra pode ser considerado uniforme e a trajetória elíptica pode, nesse caso, ser aproximada por uma trajetória parabólica, como foi feito anteriormente (Seção 11.11) no caso de projéteis convencionais.

Período. Uma característica importante do movimento de um satélite da Terra é o tempo requerido pelo satélite para descrever sua órbita. Esse tempo, conhecido como o *período* do satélite, é representado por τ. Observamos em primeiro lugar, tendo em vista a definição de velocidade areolar (Seção 12.9), que τ pode ser obtido dividindo-se a área interior da órbita pela velocidade areolar. Considerando que a área de uma elipse é igual a πab, onde a e b representam os semieixos maior e menor, respectivamente, e que a velocidade areolar é igual a $h/2$, escrevemos

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \tag{12.45}$$

Enquanto h pode ser facilmente determinado a partir de r_0 e v_0 no caso de um satélite lançado em uma direção paralela à superfície da Terra, os semieixos a e b não estão diretamente relacionados às condições iniciais. Como, por outro lado, os valores r_0 e r_1 de r correspondentes ao perigeu e apogeu da órbita podem ser facilmente determinados a partir da Eq. (12.39), vamos expressar os semieixos a e b em termos de r_0 e r_1.

Considere a órbita elíptica mostrada na Fig. 12.23. O centro da Terra está localizado em O e coincide com um dos dois focos da elipse, enquan-

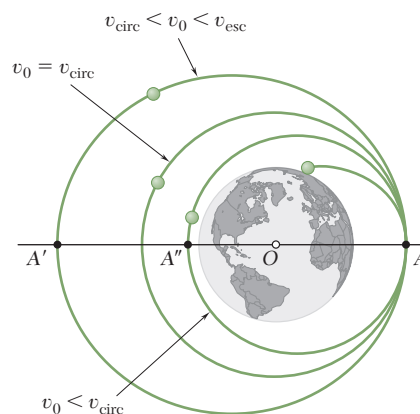
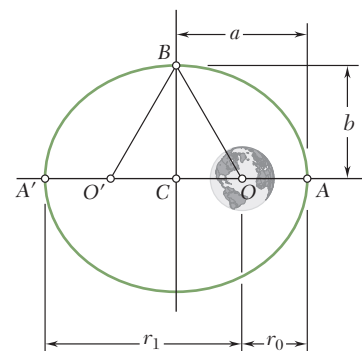



Figura 12.23

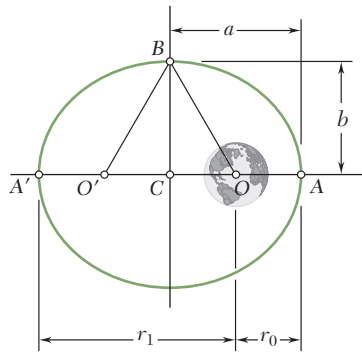



Figura 12.23 (repetida)

to os pontos A e A' representam, respectivamente, o perigeu e o apogeu da órbita. Podemos facilmente verificar que

$$r_0 + r_1 = 2a$$

e, portanto,

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) \tag{12.46}$$

Recordando que a soma das distâncias de cada um dos focos a qualquer ponto da elipse é constante, escrevemos

$$O'B + BO = O'A + OA = 2a \qquad \text{ou} \qquad BO = a$$

Por outro lado, temos que $CO = a - r_0$. Podemos, portanto, escrever

$$b^2 = (BC)^2 = (BO)^2 - (CO)^2 = a^2 - (a - r_0)^2$$
$$b^2 = r_0(2a - r_0) = r_0 r_1$$

e, portanto,

$$b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{12.47}$$

As fórmulas (12.46) e (12.467) indicam que os semieixos maior e menor da órbita são iguais, respectivamente, às médias aritmética e geométrica dos valores máximo e mínimo do raio vetor. Uma vez que r_0 e r_1 tenham sido determinados, os comprimentos dos semieixos podem ser facilmente calculados e substituídos para a e b na fórmula (12.45).

*12.13 Leis de Kepler do movimento planetário

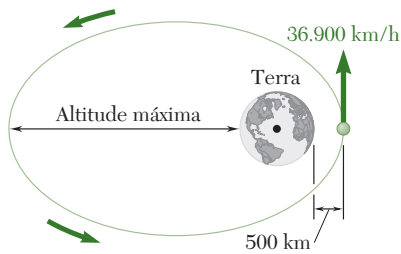
As equações que governam o movimento de um satélite da Terra podem ser usadas para descrever o movimento da Lua ao redor da Terra. Nesse caso, entretanto, a massa da Lua não é desprezível quando comparada à massa da Terra, e os resultados obtidos não são totalmente exatos.

A teoria desenvolvida nas seções precedentes também pode ser aplicada ao estudo do movimento dos planetas ao redor do Sol. Apesar de outro erro ser introduzido ao se desprezar as forças exercidas pelos planetas uns sobre os outros, a aproximação obtida é excelente. De fato, mesmo antes de Newton ter formulado sua teoria fundamental, as propriedades expressas pela Eq. (12.39), onde m agora representa a massa do Sol, e pela Eq. (12.33) foram descobertas pelo astrônomo alemão Johann Kepler (1571-1630) a partir de observações astronômicas do movimento dos planetas.

As três *leis do movimento planetário* de Kepler podem ser enunciadas como se segue:

1. Cada planeta descreve uma elipse, com o Sol localizado em um de seus focos.
2. O raio vetor traçado do Sol a um planeta varre áreas iguais em tempos iguais.
3. Os quadrados dos períodos dos planetas são proporcionais aos cubos dos semieixos maiores de suas órbitas.

A primeira lei enuncia um caso particular do resultado estabelecido na Seção 12.12 e a segunda expressa que a velocidade areolar de cada planeta é constante (ver Seção 12.9). A terceira lei de Kepler também pode ser deduzida dos resultados obtidos na Seção 12.12.*

* Ver Problema 12.121.

PROBLEMA RESOLVIDO 12.8

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com velocidade de 36.900 km/h de uma altitude de 500 km. Determine (*a*) a máxima altitude alcançada pelo satélite e (*b*) o período do satélite.

SOLUÇÃO

a. Altitude máxima. Após o satélite ter sido lançado, ele está sujeito somente à atração gravitacional da Terra; seu movimento é, portanto, governado pela Eq. (12.38),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad (1)$$

Como o componente radial da velocidade é zero no ponto de lançamento A, temos $h = r_0 v_0$. Recordando que para a Terra $R = 6.370$ km, calculamos

$$r_0 = 6.370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6.870 \text{ km} = 6{,}87 \times 10^6 \text{ m}$$
$$v_0 = 36.900 \text{ km/h} = \frac{36{,}9 \times 10^6 \text{ m}}{3{,}6 \times 10^3 \text{ s}} = 10{,}25 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$h = r_0 v_0 = (6{,}87 \times 10^6 \text{ m})(10{,}25 \times 10^3 \text{ m/s}) = 70{,}4 \times 10^9 \text{ m}^2\text{/s}$$
$$h^2 = 4{,}96 \times 10^{21} \text{ m}^4\text{/s}^2$$

Como $GM = gR^2$, onde R é o raio da Terra, temos

$$GM = gR^2 = (9{,}81 \text{ m/s}^2)(6{,}37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3\text{/s}^2$$
$$\frac{GM}{h^2} = \frac{398 \times 10^{12} \text{ m}^3\text{/s}^2}{4{,}96 \times 10^{21} \text{ m}^4\text{/s}^2} = 80{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

Substituindo esse valor em (1), obtemos:

$$\frac{1}{r} = 80{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C\cos\theta \qquad (2)$$

Considerando que no ponto A temos $\theta = 0$ e $r = r_0 = 6{,}87 \times 10^6$ m, calculamos a constante C:

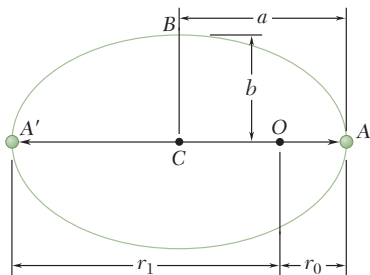
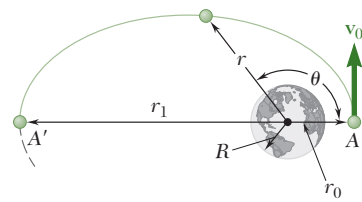
$$\frac{1}{6{,}87 \times 10^6 \text{ m}} = 80{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + C\cos 0° \qquad C = 65{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1}$$

Em A', o ponto da órbita mais afastado da Terra, temos $\theta = 180°$. Utilizando (2), calculamos a distância correspondente r_1:

$$\frac{1}{r_1} = 80{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1} + (65{,}3 \times 10^{-9} \text{ m}^{-1})\cos 180°$$
$$r_1 = 66{,}7 \times 10^6 \text{ m} = 66.700 \text{ km}$$

Altitude máxima = 66.700 km − 6.370 km = 60.300 km ◀

b. Período. Como A e A' são respectivamente o perigeu e o apogeu da órbita elíptica, usamos as Eqs. (12.46) e (12.47) e calculamos os semieixos maior e menor da órbita:

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) = \tfrac{1}{2}(6{,}87 + 66{,}7)(10^6) \text{ m} = 36{,}8 \times 10^6 \text{ m}$$
$$b = \sqrt{r_0 r_1} = \sqrt{(6{,}87)(66{,}7)} \times 10^6 \text{m} = 21{,}4 \times 10^6 \text{m}$$
$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} = \frac{2\pi(36{,}8 \times 10^6 \text{m})(21{,}4 \times 10^6 \text{m})}{70{,}4 \times 10^9 \text{ m}^2\text{/s}}$$
$$\tau = 70{,}3 \times 10^3 \text{ s} = 1.171 \text{min} = 19\text{h}31\text{min}$$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição, continuamos nosso estudo do movimento de uma partícula sob a ação de uma força central e aplicamos os resultados a problemas de mecânica espacial. Verificamos que a trajetória de uma partícula sob a ação de uma força central é definida pela equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (12.37)$$

onde u é o inverso da distância r da partícula até o centro de força ($u = 1/r$), F é a intensidade da força central $\mathbf{F}$ e h é uma constante igual à quantidade de movimento angular por unidade de massa da partícula. Em problemas de mecânica espacial, $\mathbf{F}$ é a força da atração gravitacional exercida sobre o satélite ou nave espacial pelo Sol, a Terra, ou outro planeta em torno do qual ele viaja. Substituindo $F = GMm/r^2 = GMmu^2$ na Eq. (12.37), obtemos para esse caso

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \qquad (12.38)$$

onde o membro do lado direito é uma constante.

1. Analisando o movimento de satélites e espaçonaves. A solução da equação diferencial (12.38) define a trajetória de um satélite ou espaçonave. Ela foi obtida na Seção 12.12 e foi dada nas formas alternativas:

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta) \qquad (12{,}39,\ 12{,}39')$$

Lembre-se de que, ao aplicarem essas equações, $\theta = 0$ corresponde sempre ao perigeu (o ponto de aproximação mais próximo) da trajetória (Fig. 12.19) e que h é uma constante para uma dada trajetória. Dependendo do valor da excentricidade ε, a trajetória será uma hipérbole, uma parábola ou uma elipse.

a. $\varepsilon > 1$: A trajetória é uma hipérbole, de modo que, para este caso, a espaçonave nunca retorna ao seu ponto de partida.

b. $\varepsilon = 1$: A trajetória é uma parábola. Este é o caso limite entre trajetórias abertas (hiperbólicas) e fechadas (elípticas). Tínhamos observado para este caso que a velocidade v_0 no perigeu é igual à velocidade de escape v_{esc},

$$v_0 = v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad (12.43)$$

Observe que a velocidade de escape é a menor velocidade para a qual a espaçonave não retoma ao seu ponto de partida.

c. $\varepsilon < 1$: A trajetória é uma órbita elíptica. Para problemas que envolvem órbitas elípticas, você pode achar que a relação deduzida no Problema 12.102

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

vai ser útil para a solução de problemas subsequentes. Quando aplicar esta equação, lembre-se de que r_0 e r_1 são as distâncias do centro de força ao perigeu ($\theta = 0$) e ao apogeu ($\theta = 180°$), respectivamente, que $h = r_0v_0 = r_1v_1$ e que, para um satélite orbitando a Terra, $GM_{\text{Terra}} = gR^2$, onde R é o raio da Terra. Recorde também que a trajetória é um círculo quanto $\varepsilon = 0$.

2. Determinando o ponto de impacto de uma espaçonave em descida. Para problemas deste tipo, você pode considerar que a trajetória é elíptica e que o ponto inicial da trajetória de descida é o apogeu do percurso (Fig. 12.22). Observe que no ponto de impacto, a distância r nas Eqs. (12.39) e (12.39′) é igual ao raio R do corpo no qual a espaçonave pousa ou colide. Além disso, temos $h = Rv_I \operatorname{sen} \phi_I$, onde v_I é a velocidade escalar da espaçonave no impacto e ϕ_I é o ângulo que sua trajetória forma com a vertical no ponto de impacto.

3. Calculando o tempo para viajar entre dois pontos de uma trajetória. Para um movimento sob a ação de força central, o tempo t necessário para partícula percorrer uma parte de sua trajetória pode ser determinado recordando, da Seção 12.9, que a taxa na qual área é varrida por unidade de tempo pelo vetor de posição **r** é igual à metade da quantidade de movimento angular por unidade de massa h da partícula: $dA/dt = h/2$. Como h é uma constante para uma dada trajetória, segue-se que

$$t = \frac{2A}{h}$$

onde A é a área total varrida no tempo t.

a. No caso de uma trajetória elíptica, o tempo necessário para completar uma órbita é chamado de *período* e é expresso como

$$\tau = \frac{2(\pi ab)}{h} \tag{12.45}$$

onde a e b são os semieixos maior e menor, respectivamente, da elipse e estão relacionados às distâncias r_0 e r_1 por

$$a = \tfrac{1}{2}(r_0 + r_1) \qquad \text{e} \qquad b = \sqrt{r_0 r_1} \tag{12.46, 12.47}$$

b. A terceira lei de Kepler fornece uma relação conveniente entre os períodos de dois satélites que descrevem órbitas elípticas em torno do mesmo corpo [Seção 12.13]. Representando os semieixos maiores por a_1 e a_2, respectivamente, e os correspondentes períodos por τ_1 e τ_2, temos

$$\frac{\tau_1^2}{\tau_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

c. No caso de uma trajetória parabólica, você poderá usar a expressão dada na parte interna da capa frontal do livro para uma área parabólica ou semiparabólica para calcular o tempo necessário para viajar entre dois pontos da trajetória.

PROBLEMAS

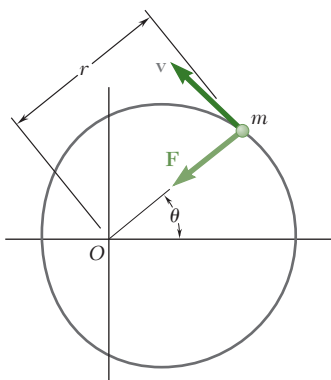
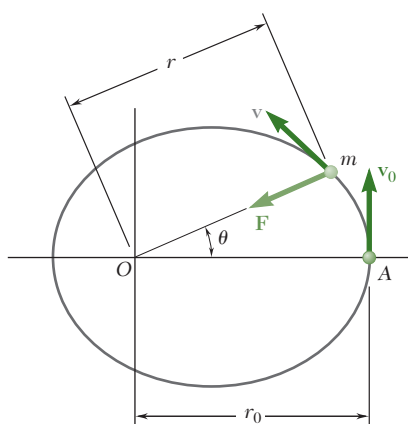
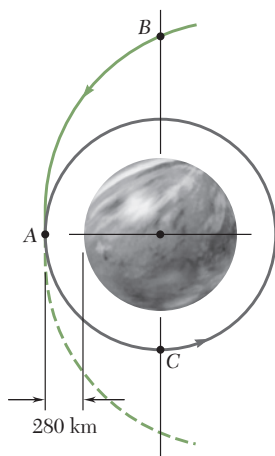



Figura P12.94

12.94 Uma partícula de massa m descreve uma cardioide $r = r_0(1 + \cos \theta/2)$ sob uma força central **F** voltada para o centro de força O. Usando a Eq. (12.37), mostre que **F** é inversamente proporcional ao quadrado da distância r da partícula ao centro de força O.

12.95 Uma partícula de massa m é lançada do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a OA e se move sob a ação de uma força central **F** ao longo de uma trajetória elíptica definida pela equação $r = r_0/(2 - \cos \theta)$. Usando a Eq. (12.37), mostre que **F** é inversamente proporcional ao quadrado da distância r da partícula ao centro de força O.

Figura P12.95

12.96 Uma partícula de massa m descreve uma trajetória definida pela equação $r = r_0 \operatorname{sen} \theta$ sob uma força central **F** voltada para o centro de força O. Usando a Eq. (12.37), mostre que **F** é inversamente proporcional à quinta potência da distância r da partícula ao centro de força O.

12.97 Para o Problema 12.76 e usando a Eq. (12.37), mostre que **F** é proporcional à distância r da partícula ao centro de força O.

12.98 Foi observado que durante o primeiro sobrevoo da Terra feito pela espaçonave Galileu, sua altitude mínima foi de 960 km acima da superfície da Terra. Considerando que a trajetória da espaçonave era parabólica, determine a velocidade máxima da Galileu durante esse seu primeiro sobrevoo da Terra.

12.99 Quando uma sonda espacial, que se aproxima do planeta Vênus em uma trajetória parabólica, atinge o ponto A mais próximo do planeta, sua velocidade é diminuída para que ela seja inserida em uma órbita circular. Sabendo que a massa e o raio de Vênus são $4{,}87 \times 10^{24}$ kg e 6.052 km, respectivamente, determine (a) a velocidade da sonda quando ela se aproxima de A, (b) a diminuição da velocidade necessária para inseri-la em uma órbita circular.

Figura P12.99

12.100 Foi observado que durante o seu segundo sobrevoo da Terra, a espaçonave Galileu tinha uma velocidade de 14×10^3 m/s quando atingiu sua altitude mínima de 300 km acima da superfície da Terra. Determine a excentricidade da trajetória da espaçonave durante essa parte de seu voo.

12.101 Foi observado que quando a espaçonave Galileu atingiu o ponto de sua trajetória mais próximo de Io, uma lua do planeta Júpiter, ela estava a uma distância de 2.800 km do centro de Io e tinha uma velocidade de 15×10^3 m/s. Sabendo que a massa de Io é 0,01496 vezes a massa da Terra, determine a excentricidade da trajetória da espaçonave quando ela se aproximou de Io.

12.102 Um satélite descreve uma trajetória elíptica em torno de um planeta de massa M. Representando por r_0 e r_1, respectivamente, os valores mínimo e máximo da distância r do satélite ao centro do planeta, deduza a relação

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

onde h é a quantidade de movimento angular por unidade de massa do satélite.

Figura P12.102

12.103 No momento do corte do motor principal em seu décimo terceiro voo, o ônibus espacial Discovery estava em uma órbita elíptica de altitude mínima de 64 km e altitude máxima de 538 km acima da superfície da Terra. Sabendo que no ponto A o ônibus tinha uma velocidade $\mathbf{v}_0$ paralela à superfície da Terra e que foi transferido para uma órbita circular quando passou pelo ponto B, determine (*a*) a velocidade escalar v_0 do ônibus em A, (*b*) o aumento em velocidade escalar necessária em B para inserir o ônibus na órbita circular.

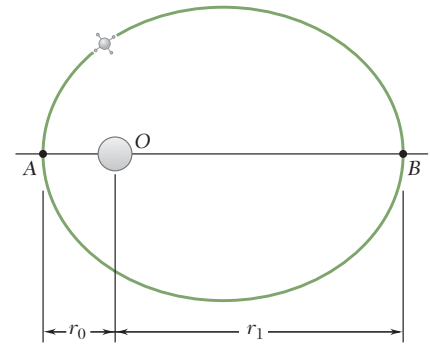
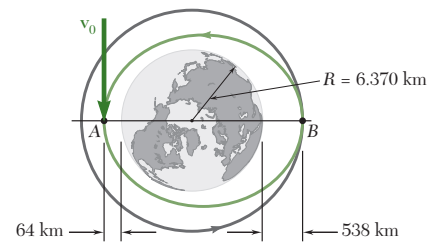



Figura P12.103

12.104 Uma sonda espacial descreve uma órbita circular em torno de uma planeta de raio R. A altitude da sonda acima da superfície do planeta é αR e sua velocidade escalar é v_0. Para inserir a sonda em uma órbita elíptica que a trará mais próximo do planeta, sua velocidade escalar foi reduzida v_0 para βv_0, onde $\beta < 1$, disparando seus motores por um curto intervalo de tempo. Determine o menor valor admissível de β se a sonda não se choca com a superfície do planeta.

12.105 À medida que descreve uma órbita elíptica ao redor do Sol, uma espaçonave alcança uma distância máxima de 323×10^6 km do centro do Sol no ponto A (chamado de *afélio*) e uma distância mínima de 147×10^6 km no ponto B (chamado de *periélio*). Para inserir a espaçonave em uma órbita elíptica menor, com afélio A' e periélio B', onde A' e B' estão localizados a 263×10^6 km e 137×10^6 km, respectivamente, do centro do Sol, a velocidade escalar da espaçonave é, em primeiro lugar, reduzida quando ela passa por A e, a seguir, reduzida ainda mais quando ela passa por B'. Sabendo que a massa do Sol é $332{,}8 \times 10^3$ vezes a massa da Terra, determine (*a*) a velocidade escalar da espaçonave em A, (*b*) as quantidades em que a velocidade escalar da espaçonave deve ser reduzida em A e B' para que ela seja inserida na órbita elíptica desejada.

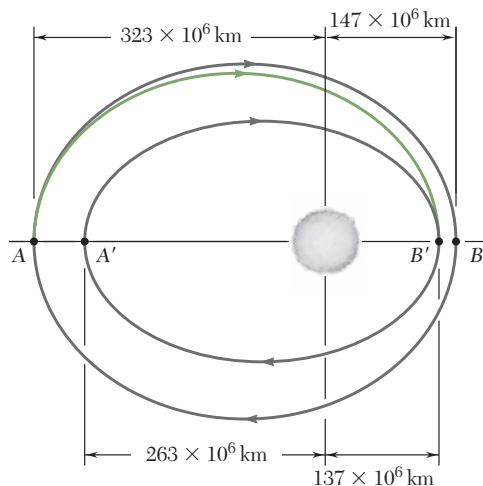



Figura P12.105

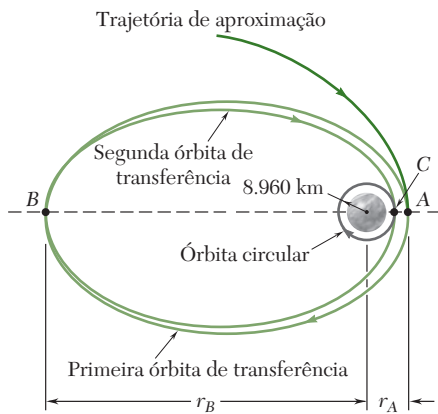
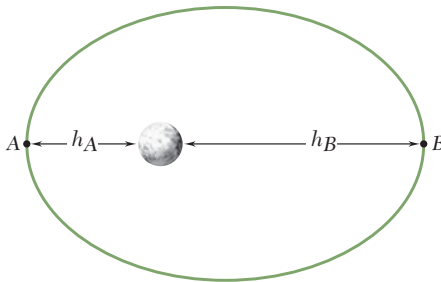
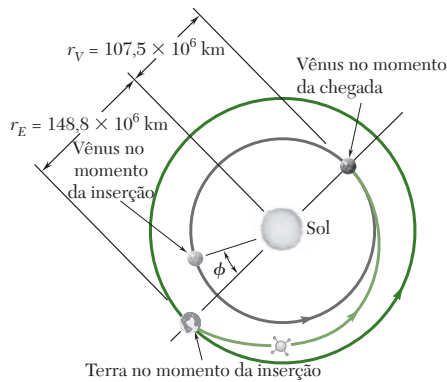



Figura P12.106

12.106 Uma sonda espacial está em uma órbita circular de 8.960 km de raio ao redor do planeta Vênus em um plano especificado. Quando a sonda alcança A, o ponto de sua trajetória inicial mais próximo de Vênus, ela é inserida em uma primeira órbita elíptica de transferência, reduzindo sua velocidade escalar em Δv_A. Essa órbita leva a sonda ao ponto B com uma velocidade muito reduzida. Ali, a sonda é inserida em uma segunda órbita de transferência localizada no plano especificado, mudando a direção de sua velocidade e reduzindo ainda mais sua velocidade escalar em Δv_B. Finalmente, quando a sonda atinge o ponto C, ela é inserida na órbita circular desejada reduzindo-se sua velocidade escalar em Δv_C. Sabendo que a massa de Vênus é 0,82 vezes a massa da Terra, que $r_A = 14{,}9 \times 10^3$ km e $r_B = 304 \times 10^3$ km, e que a sonda se aproxima de A em uma trajetória parabólica, determine em quanto a velocidade escalar da sonda deve ser reduzida (a) em A, (b) em B, (c) em C.

12.107 Para a sonda do Problema 12.106, sabe-se que $r_A = 14{,}9 \times 10^3$ km e que sua velocidade escalar é reduzida em 6.000 m/s quando ela passa por A. Determine (a) a distância do centro de Vênus ao ponto B e (b) as quantidades em que a velocidade escalar da sonda deve ser reduzida em B e C, respectivamente.

Figura P12.109

12.108 Determine o tempo necessário para a sonda espacial do Problema 12.106 viajar de A para B em sua primeira órbita de transferência.

12.109 A espaçonave Clementine descreveu uma órbita elíptica de altitude mínima $h_A = 400$ km e de altitude máxima de $h_B = 2.940$ km acima da superfície da Lua. Sabendo que o raio da Lua é de 1.737 km e que sua massa é 0,01230 vezes a massa da Terra, determine o período da espaçonave.

Figura P12.110

12.110 Uma sonda espacial em uma órbita baixa na Terra é inserida numa órbita de transferência elíptica para o planeta Vênus. Sabendo que a massa do sol é $332{,}8 \times 10^3$ vezes a massa da Terra e considerando que a sonda é submetida apenas a atração gravitacional do Sol, determine o valor de ϕ que define a posição relativa de Vênus com relação à Terra no momento que a sonda é inserida na órbita de transferência.

12.111 Com base em observações feitas durante a aparição de 1996 do cometa Hyakutake, concluiu-se que a trajetória desse cometa é uma elipse muito alongada para a qual a excentricidade é de aproximadamente $\varepsilon = 0{,}999887$. Sabendo que para essa aparição de 1996 a distância mínima entre o cometa e o Sol era de $0{,}230R_E$, onde R_E é a distância média do Sol à Terra, determine o período do cometa.

12.112 O cometa Halley viaja em uma órbita elíptica alongada cuja distância mínima do Sol é aproximadamente $\frac{1}{2}r_E$, onde $r_E = 150 \times 10^6$ km é a distância média do Sol à Terra. Sabendo que o período do cometa Halley é cerca de 76 anos, determine a máxima distância do Sol alcançada pelo cometa.

12.113 Determine o tempo necessário para uma sonda espacial do Problema 12.99 viajar de B para C.

12.114 Uma sonda espacial está descrevendo uma órbita circular de raio nR com uma velocidade escalar v_0 ao redor de um planeta de raio R e

centro O. Quando ela passa pelo ponto A, sua velocidade escalar é reduzida de v_0 para βv_0, onde $\beta < 1$, para ser inserida em uma trajetória de impacto. Expresse em termos de n e β o ângulo AOB, onde B representa o ponto de impacto da sonda sobre o planeta.

Figura P12.115

12.115 Antes das missões Apollo para a Lua, várias espaçonaves "Lunar Orbiter" foram utilizadas para fotografar a superfície lunar a fim de obter informações a respeito de possíveis locais para pouso. Na conclusão de cada missão, a trajetória da espaçonave era ajustada de modo que a espaçonave colidisse com a Lua para estudar ainda mais as características da superfície lunar. A órbita elíptica do "Lunar Orbiter 2" é mostrada na figura. Sabendo que a massa da Lua é 0,01230 vezes a massa da Terra, determine em quanto a velocidade escalar dessa espaçonave deve ser reduzida no ponto B de modo que ela colida na superfície lunar no ponto C. (*Dica:* O ponto B é o apogeu da trajetória elíptica de impacto.)

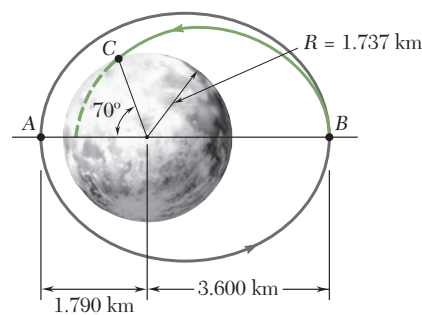
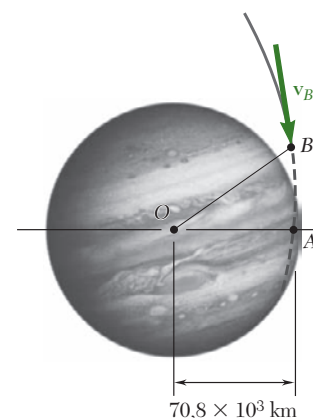



Figura P12.116

12.116 Ao aproximar-se do planeta Júpiter, uma nave espacial libera uma sonda que entra na atmosfera do planeta no ponto B a uma altitude de 450 km acima da superfície do planeta. A trajetória da sonda é uma hipérbole de excentricidade $\varepsilon = 1{,}031$. Sabendo que o raio e a massa de Júpiter são $71{,}492 \times 10^3$ km e $1{,}9 \times 10^{27}$ kg, respectivamente, e que a velocidade $\mathbf{v}_B$ da sonda em B forma um ângulo de 82,9° com a direção AO, determine (*a*) o ângulo AOB, (*b*) a velocidade escalar v_B da sonda em B.

12.117 Um ônibus espacial está descrevendo uma órbita circular a uma altitude de 560 km acima da superfície da Terra. Quando passa pelo ponto A, ele aciona seu motor por um curto intervalo de tempo para reduzir em 150 m/s sua velocidade escalar e começa sua descida para a Terra. Determine o ângulo AOB de modo que a altitude do ônibus espacial no ponto B seja de 120 km. (*Dica:* O ponto A é o apogeu da órbita elíptica de descida.)

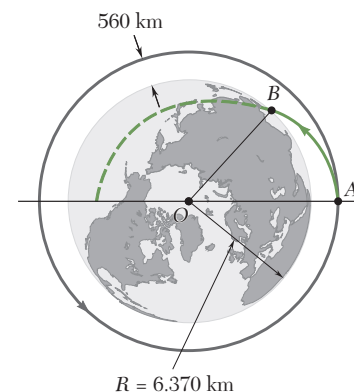



Figura P12.117

12.118 Um satélite descreve uma órbita elíptica em torno de um planeta. Representando por r_0 e r_1 as distâncias correspondentes, respectivamente, ao perigeu e ao apogeu da órbita, mostre que a curvatura da órbita em cada um desses pontos pode ser expressa como

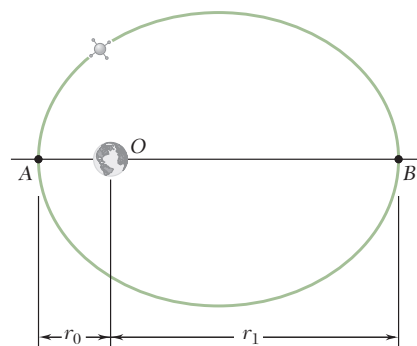
$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1}\right)$$

12.119 (*a*) Expresse a excentricidade ε da órbita elíptica descrita por um satélite em torno de um planeta em termos das distâncias r_0 e r_1 correspondentes, respectivamente, ao perigeu e ao apogeu da órbita. (*b*) Use o resultado obtido na parte *a* e os dados fornecidos no Problema 12.111, onde $R_E = 149{,}6 \times 10^6$ km, para determinar a distância máxima aproximada do Sol atingida pelo cometa Hyakutake.

Figura P12.118 e *P12.119*

12.120 Mostre que o momento angular por unidade de massa h de um satélite que descreve uma órbita elíptica de semieixo maior a e excentricidade ε, em torno de um planeta de massa M, pode ser expresso como

$$h = \sqrt{GMa(1 - \varepsilon^2)}$$

12.121 Deduza a terceira lei do movimento planetário de Kepler das Eqs. (12.39) e (12.45).

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado à segunda lei de Newton e a sua aplicação na análise do movimento de partículas.

Segunda lei de Newton

Representando por m a massa de uma partícula, por $\Sigma\mathbf{F}$ a soma, ou resultante, das forças que atuam sobre a partícula, e por $\mathbf{a}$ a aceleração da partícula relativa a um *sistema de referência newtoniano* [Seção 12.2], escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{12.2}$$

Quantidade de movimento linear

Introduzindo a *quantidade de movimento linear* de uma partícula, $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ [Seção 12.3], vimos que a segunda lei de Newton também pode ser escrita sob a forma

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{12.5}$$

que expressa que *a resultante das forças que atuam sobre uma partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento linear dessa partícula.*

Sistema consistente de unidades

A Eq. (12.2) é válida somente se um sistema consistente de unidades é usado. Com unidades do SI, as forças devem ser expressas em newtons, as massas em quilogramas e as acelerações em m/s^2 [Seção 12.4].

Equações do movimento para uma partícula

Para resolver um problema envolvendo o movimento de uma partícula, a Eq. (12.2) pode ser substituída por equações que contenham quantidades escalares [Seção 12.5]. Usando *componentes retangulares* de $\mathbf{F}$ e $\mathbf{a}$, escrevemos

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_z = ma_z \tag{12.8}$$

Usando *componentes tangencial e normal*, temos

$$\Sigma F_t = m\frac{dv}{dt} \qquad \Sigma F_n = m\frac{v^2}{\rho} \tag{12.9$'$}$$

Equilíbrio dinâmico

Verificamos também [Seção 12.6] que as equações de movimento de uma partícula podem ser substituídas por equações semelhantes às equações de equilíbrio usadas na estática, se um vetor $-m\mathbf{a}$, de intensidade ma mas de sentido oposto ao da aceleração for adicionado às forças aplicadas à partícula; diz-se, então, que a partícula está em *equilíbrio dinâmico.* Para manter a uniformidade, entretanto, todos os Problemas Resolvidos foram solucionados usando as equações de movimento, em primeiro lugar com componentes retangulares [Problemas Resolvidos 12.1 a 12.3], e em seguida com componentes tangencial e normal [Problemas Resolvidos 12.4 e 12.5].

Na segunda parte do capítulo, definimos a *quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_O$ de uma partícula em relação a um ponto O como o momento em relação a O da quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}$ dessa partícula [Seção 12.7]. Escrevemos

Quantidade de movimento angular

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \tag{12.12}$$

e verificamos que $\mathbf{H}_o$ é um vetor perpendicular ao plano que contém $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ (Fig. 12.22) e de intensidade

$$H_O = rmv \operatorname{sen} \phi \tag{12.13}$$

Figura 12.24

Decompondo os vetores $\mathbf{r}$ e $m\mathbf{v}$ em componentes retangulares, expressamos a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ sob a forma de um determinante

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \tag{12.14}$$

No caso de uma partícula movendo-se no plano xy, temos $z = v_z = 0$. A quantidade de movimento angular é perpendicular ao plano xy e é inteiramente definida por sua intensidade. Escrevemos

$$H_O = H_z = m(xv_y - yv_x) \tag{12.16}$$

Taxa de variação da quantidade de movimento angular

Calculando a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_O$ da quantidade de movimento linear $\mathbf{H}_O$ e aplicando a segunda lei de Newton, escrevemos a equação

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{12.19}$$

que estabelece que *a soma dos momentos em relação a O das forças que atuam sobre uma partícula é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular dessa partícula em relação a O.*

Componentes radial e transversal

Em muitos problemas que envolvem o movimento plano de uma partícula, verifica-se que é conveniente empregar os *componentes radial e transversal* [Seção 12.8 e Problema Resolvido 12.7] e escrever as equações

$$\Sigma F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \tag{12.21}$$
$$\Sigma F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \tag{12.22}$$

Movimento sujeito a uma força central

Quando a única força que atua sobre uma partícula P é uma força $\mathbf{F}$ dirigida para, ou afastando-se de, um ponto fixo O, diz-se que a partícula está se movendo *sob a ação de uma força central* [Seção 12.9]. Como $\Sigma\mathbf{M}_O = 0$ em qualquer instante dado, segue-se da Eq. (12.19) que $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$ para todos os valores de t e, portanto, que

$$\mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{12.23}$$

Concluímos que *a quantidade de movimento angular de uma partícula que se mova sob a ação de uma força central é constante, tanto em intensidade como em direção e sentido,* e que a partícula se move em um plano perpendicular ao vetor $\mathbf{H}_O$.

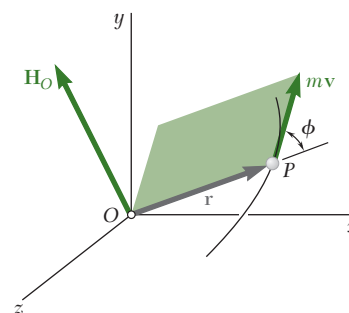
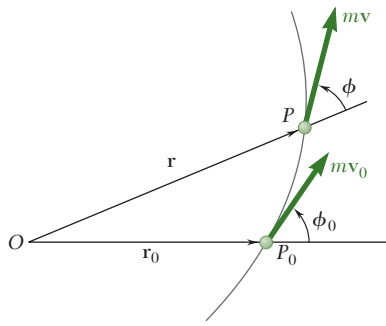



Figura 12.25

Recordando a Eq. (12.13), escrevemos a relação

$$rmv \text{ sen } \phi = r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 \tag{12.25}$$

para o movimento de qualquer partícula sob a ação de uma força central (Fig. 12.25). Usando coordenadas polares e recordando a Eq. (12.18), obtivemos também

$$r^2\dot{\theta} = h \tag{12.27}$$

onde h é uma constante que representa a quantidade de movimento angular por unidade de massa, H_O/m, da partícula. Observamos (Fig. 12.26) que a área infinitesimal dA varrida pelo raio vetor OP, quando este gira em $d\theta$, é igual a $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ e, portanto, que o membro do lado esquerdo da Eq. (12.27) representa o dobro da *velocidade areolar* dA/dt da partícula. Portanto, *a velocidade areolar de uma partícula que se move sob a ação de uma força central é constante.*

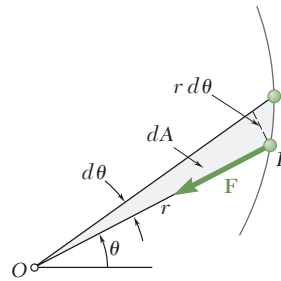



Figura 12.26

Lei de Newton da gravitação universal

Uma aplicação importante do movimento sob a ação de uma força central é dada pelo movimento orbital de corpos sob a ação da atração gravitacional [Seção 12.10]. De acordo com a *lei de Newton da gravitação universal*, duas partículas a uma distância r uma da outra e de massas M e m, respectivamente, atraem-se mutuamente com forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ dirigidas ao longo da linha que une essas partículas (Fig. 12.27). A intensidade comum F das duas forças é

$$F = G\frac{Mm}{r^2} \tag{12.27}$$

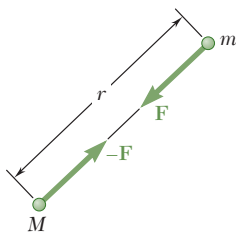
Figura 12.27

onde G é a *constante de gravitação.* No caso de um corpo de massa m sujeito à atração gravitacional da Terra, o produto GM, onde M é a massa da Terra, pode ser expresso como

$$GM = gR^2 \tag{12.29}$$

onde $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$ e R é o raio da Terra.

Movimento orbital

Foi mostrado na Seção 12.11 que uma partícula que se move sob a ação de uma força central descreve uma trajetória definida pela equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{F}{mh^2u^2} \qquad (12.37)$$

onde $F > 0$ corresponde a uma força de atração e $u = 1/r$. No caso de uma partícula movendo-se sob a ação de uma força de atração gravitacional [Seção 12.12], substituímos F pela expressão dada na Eq. (12.28). Medindo θ a partir do eixo OA que liga o ponto focal O ao ponto A da trajetória mais próximo de O (Fig. 12.28), encontramos que a solução da Eq. (12.37) é

Figura 12.28

$$\frac{1}{r} = u = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta \qquad (12.39)$$

Esta é a equação de uma cônica de excentricidade $\varepsilon = Ch^2/GM$. A cônica é uma *elipse* se $\varepsilon < 1$, uma *parábola* se $\varepsilon = 1$ e uma *hipérbole* se $\varepsilon > 1$. As constantes C e h podem ser determinadas a partir das condições iniciais; se a partícula for lançada do ponto A ($\theta = 0$, $r = r_0$) com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular a OA, temos $h = r_0v_0$ [Problema Resolvido 12.8].

Velocidade de escape

Também foi mostrado que os valores da velocidade inicial que correspondem, respectivamente, a uma trajetória parabólica e a uma trajetória circular são

$$v_{\text{esc}} = \sqrt{\frac{2GM}{r_0}} \qquad (12.43)$$

$$v_{\text{circ}} = \sqrt{\frac{GM}{r_0}} \qquad (12.44)$$

e que o primeiro desses valores, chamado de *velocidade de escape,* é o menor valor de v_0 para o qual a partícula não vai retornar ao seu ponto de partida.

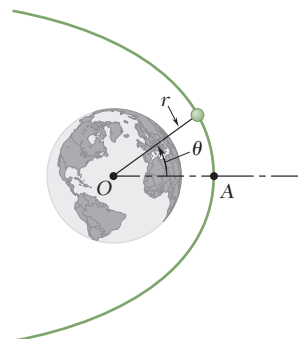
Período

O *período* τ de um planeta ou satélite foi definido como o tempo necessário para o corpo descrever sua órbita. Foi mostrado que

$$\tau = \frac{2\pi ab}{h} \qquad (12.45)$$

onde $h = r_0v_0$ e onde a e b representam os semieixos maior e menor da órbita. Foi mostrado, além disso, que esses semieixos são, respectivamente, iguais às médias aritmética e geométrica dos valores mínimo e máximo do raio vetor r.

Leis de Kepler

A última seção do capítulo [Seção 12.13] apresentou as *leis de Kepler de movimento planetário* e mostrou que essas leis empíricas, obtidas por antigas observações astronômicas, confirmam as leis de Newton do movimento, assim como sua lei da gravitação.

PROBLEMAS DE REVISÃO

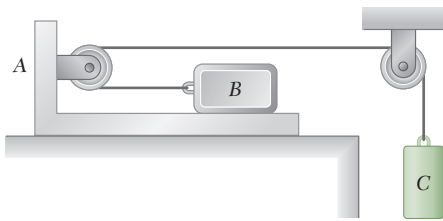
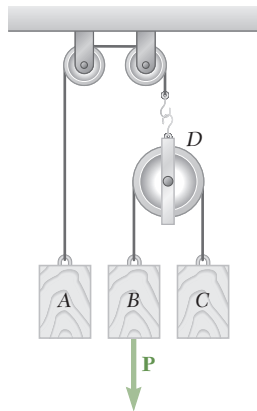
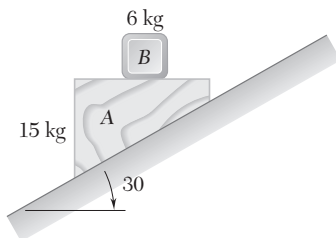



Figura *P12.123*

12.122 Um automóvel de 1.500 kg está descendo a uma inclinação de 5° com velocidade de 80 km/h quando os freios são aplicados, gerando uma força total de frenagem de 6 kN a ser aplicado no automóvel. Determine a distância percorrida pelo automóvel até ele parar.

12.123 Um bloco *B* de 6 kg descansa em um suporte *A*, como mostrado na figura. Os coeficientes de atrito são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}25$ entre o bloco *B* e o suporte *A* e não há atrito na roldana ou entre o suporte e a superfície horizontal. (*a*) Determine a maior massa do bloco *C* se o bloco *B* não desliza sobre o suporte *A*. (*b*) Se a massa do bloco *C* é 10% maior que a resposta encontrada em *a*, determine a aceleração de *A*, *B* e *C*.

Figura P12.124

12.124 O bloco *A* tem massa de 10 kg e os blocos *B* e *C* de 5 kg cada. Sabendo que os blocos estão inicialmente em repouso e que *B* percorre uma distância de 2,4 m em 2 s, determine (*a*) a intensidade da força **P**, (*b*) a tração na corda *AD*. Despreze as massas das roldanas e o atrito no eixo.

12.125 Um bloco *B* de 6 kg repousa, tal como mostra a figura, sobre a superfície superior de uma cunha *A* de 15 kg. Desprezando o atrito, determine, imediatamente depois que o sistema é solto a partir do repouso, (*a*) a aceleração de *A* e (*b*) a aceleração de *B* relativa a *A*.

12.126 A pista de montanha-russa mostrada na figura está contida em um plano vertical. A parte da pista entre *A* e *B* é reta e horizontal, enquanto as partes à esquerda de *A* e à direita de *B* têm raios de curvatura como indicado na figura. O carro *A* está se movendo a uma velocidade escalar de 72 km/h quando os freios são repentinamente acionados, fazendo com que as rodas do carro deslizem sobre a pista ($\mu_k = 0{,}25$). Determine a desaceleração inicial do carro se os freios são acionados quando ele (*a*) está quase chegando em *A*, (*b*) está se movendo entre *A* e *B*, (*c*) acabou de passar por *B*.

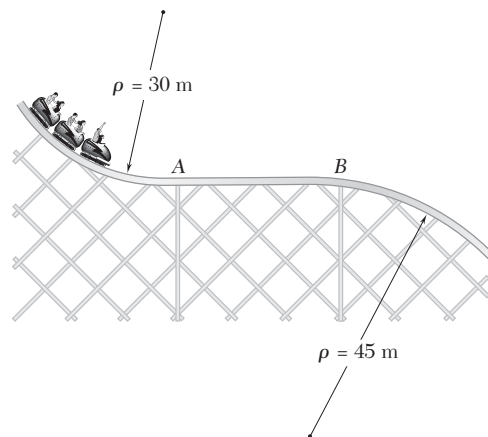



Figura P12.125

Figura *P12.126*

12.127 Um pequeno colar C de 200 g desliza em uma haste semicircular que é colocada para girar sobre a vertical AB a uma taxa constante de 6 rad/s. Determine o valor mínimo requerido do coeficiente de atrito estático entre o colar e a haste se o colar não desliza quando (*a*) $\theta = 90°$, (*b*) $\theta = 75°$, (*c*) $\theta = 45°$. Indique em cada caso a direção do movimento iminente.

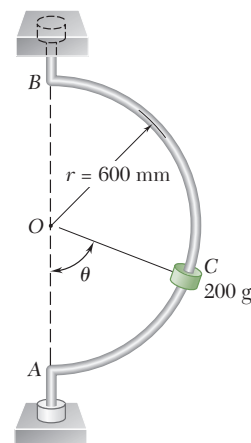



Figura P12.127

12.128 O pino B de 110 g desliza ao longo da fenda no braço giratório OC e ao longo da fenda DE de raio $b = 500$ mm que foi aberta em um plano horizontal fixo. Desprezando o atrito e considerando $\dot{\theta} = 15$ rad/s e $\ddot{\theta} = 250$ rad/s^2 para a posição $\theta = 20°$, determine para esta posição (*a*) os componentes radial e transversal da força resultante exercida sobre o pino B, (*b*) as forças **P** e **Q** exercidas sobre o pino B respectivamente pelo braço OC e pela parede da fenda DE.

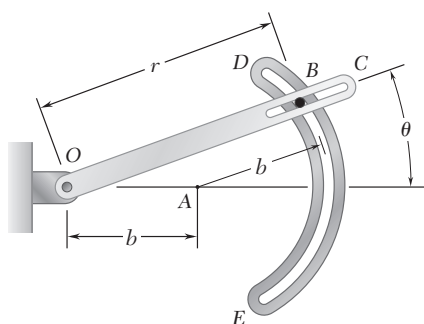



Figura P12.128

12.129 Uma partícula de massa m é lançada do ponto A com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ perpendicular à linha OA e se move sob a ação da força central **F** dirigida para fora do centro de força O. Sabendo que a partícula segue uma trajetória definida pela equação $r = r_0/\cos 2\theta$ e usando a Eq. (12.27), expresse os componentes radiais e transversais da velocidade **v** da partícula em função do ângulo θ.

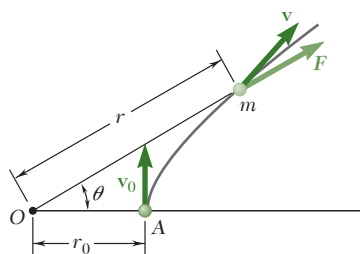



Figura P12.129

12.130 Mostre que o raio r da órbita da Lua pode ser determinado pelo raio R da Terra, a aceleração da gravidade g na superfície da Terra e o tempo τ necessário para lua completar um volta em torno da Terra. Calcule r sabendo que $\tau = 27{,}3$ dias, dando a resposta no sistema internacional SI.

***12.131** O disco A gira em um plano horizontal em torno de um eixo vertical a uma taxa constante $\dot{\theta} = 12$ rad/s. O cursor B tem uma massa de 230 g e se movimenta em uma fenda sem atrito aberta no disco. O cursor é preso a uma mola de constante k, que não está deformada quando $r = 0$. Sabendo que o cursor é liberado sem velocidade radial na posição $r = 380$ mm, determine a posição do cursor e da força horizontal exercida sobre ele pelo disco em $t = 0{,}1$ s para (*a*) $k = 33$ N/m, (*b*) $k = 48$ N/m.

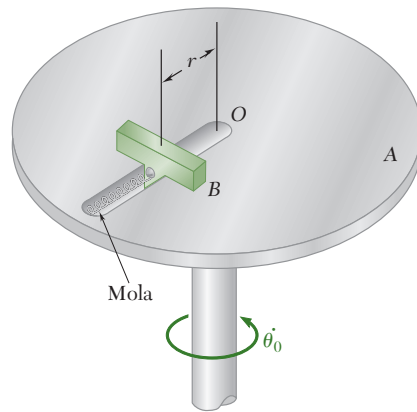



Figura P12.131

12.132 Foi observado que quando a nave espacial Voyager I alcança o ponto mais próximo do planeta Saturno, sua distância do centro do planeta foi de 185×10^3 km e que tinha uma velocidade de 21 km/s. Sabendo que Tethys, uma das luas de Saturno, descreve uma órbita circular de raio 295×10^3 km a uma velocidade escalar de 11,35 km/s, determine a excentricidade da trajetória da Voyager I em sua aproximação de Saturno.

12.133 No momento do corte do motor principal, o ônibus tinha alcançado o ponto A numa altitude de 64 km acima da superfície da Terra e tinha uma velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$. Sabendo que sua primeira órbita foi elíptica e que o ônibus foi transferido para uma órbita circular quando passou pelo ponto B numa altitude de 270 km, determine (*a*) o tempo necessário para o ônibus viajar de A para B em sua órbita elíptica original, (*b*) o período do ônibus em sua órbita circular final.

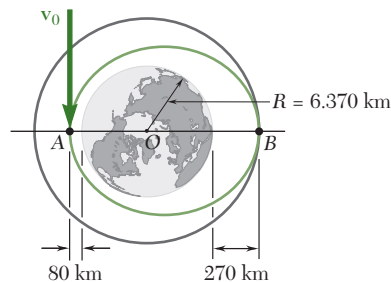



Figura P12.133

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

12.C1 O bloco B de massa 10 kg está inicialmente em repouso, tal como mostra a figura, sobre a superfície superior de uma cunha A de 20 kg que está apoiada sobre uma superfície horizontal. Um bloco C de 2 kg está preso ao bloco B por uma corda, que passa por uma roldana de massa desprezível. Usando um programa de computador e representando por μ o coeficiente de atrito em todas as superfícies, calcule a aceleração inicial da cunha e a aceleração inicial do bloco B relativa à cunha paia valores de $\mu \geq 0$. Use incrementos de 0,01 para μ até que a cunha não se mova mais e, então, use incrementos de 0,1 até que nenhum movimento ocorra.

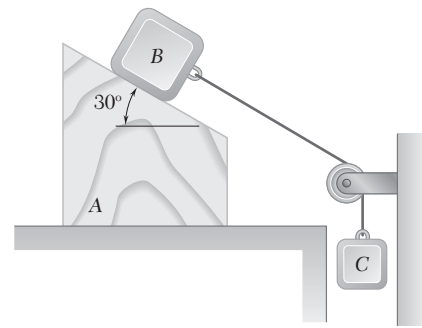



Figura P12.C1

12.C2 Um pequeno bloco de 500 g. está em repouso no ponto mais alto de uma superfície cilíndrica. É dada ao bloco uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de intensidade de 3 m/s que faz com que ele escorregue sobre a superfície cilíndrica. Usando um programa de computador, calcule e trace um gráfico dos valores de θ para os quais o bloco deixa a superfície em função de valores de μ_k, coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície de 0 a 0,4.

Figura P12.C2

12.C3 Um bloco de massa m é preso a uma mola de constante k. O bloco é solto a partir do repouso quando a mola está em uma posição horizontal e não deformada. Use um programa de computador para determinar, por vários valores selecionados de k/m e r_0. (*a*) o comprimento da mola e a intensidade, direção e sentido da velocidade do bloco quando ele passa diretamente sob o ponto por onde a mola está suspensa, (*b*) o valor de k/m quando $r_0 = 1$ m para o qual essa velocidade é horizontal.

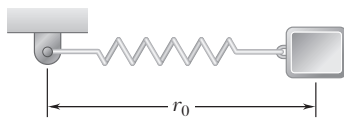
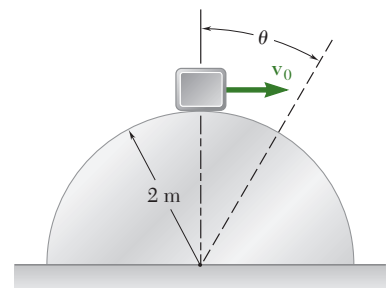



Figura P12.C3

12.C4 Use um programa de computador para determinar os intervalos dos valores de θ para os quais o bloco E do Problema 12.58 não deslize na fenda semicircular da placa plana. Considerando um coeficiente de atrito de 0,35, determine os intervalos dos valores quando a taxa de rotação constante da placa é (*a*) 14 rad/s, (*b*) 2 rad/s.

12.C5 Use um programa de computador para determinar o tempo requerido por uma nave espacial para viajar entre dois pontos em sua trajetória, tanto para o apogeu quanto para o perigeu da trajetória e a velocidade escalar da nave espacial nesse ponto. Use esse programa para determinar (*a*) o tempo necessário para o "Lunar Orbiter 2" no Problema 12.115 para viajar entre os pontos B e C em sua trajetória de impacto, sabendo que a velocidade escalar do orbitador é 869,4 m/s quando inicia sua descida em B, (*b*) o tempo necessário para o ônibus espacial no Problema 12.117 viajar entre os pontos B e C na sua trajetória de pouso, sabendo que a velocidade escalar do ônibus é 7.310 m/s quando inicia sua descida em A.

Uma bola de golfe irá se deformar com o impacto como mostrado por esta fotografia de alta velocidade. A máxima deformação ocorrerá quando a velocidade da cabeça do taco e a velocidade da bola forem as mesmas. Neste capítulo, os impactos serão analisados usando o coeficiente de restituição e conservação da quantidade de movimento linear. A cinética de partículas usando os métodos de energia e quantidade de movimento é o assunto deste capítulo.

CAPÍTULO 13

Cinética de partículas: métodos de energia e quantidade de movimento

13 Cinética de partículas: métodos de energia e quantidade de movimento

13.1 Introdução

No capítulo anterior, a maioria dos problemas que tratavam do movimento de partículas foi resolvida com o uso da equação fundamental do movimento $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Dada uma partícula submetida à ação de uma força $\mathbf{F}$, pudemos resolver essa equação para a aceleração $\mathbf{a}$; então, aplicando os princípios da Cinemática, pudemos determinar, a partir de $\mathbf{a}$, a velocidade e a posição da partícula em qualquer instante.

O emprego da equação $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ em conjunto com os princípios da cinemática permite-nos obter dois métodos adicionais de análise: o *método de trabalho e energia* e o *método de impulso e quantidade de movimento*, A vantagem desses métodos reside no fato de que eles tornam desnecessária a determinação da aceleração. De fato, o método de trabalho e energia relaciona diretamente força, massa, velocidade e deslocamento, ao passo que o método de impulso e quantidade de movimento relaciona força, massa, velocidade e tempo.

O método de trabalho e energia será considerado em primeiro lugar. Nas Seções de 13.2 a 13.4, o *trabalho de uma força* e a *energia cinética de uma partícula* são discutidos, e o princípio de trabalho e energia é aplicado à solução de problemas de engenharia. Os conceitos de *potência* e *eficiência* de uma máquina são introduzidos na Seção 13.5.

As Seções de 13.6 a 13.8 são dedicadas ao conceito de *energia potencial* de uma força conservativa e à aplicação do princípio de conservação da energia a diversos problemas de interesse prático. Na Seção 13.9, os princípios de conservação da energia e de conservação da quantidade de movimento angular são usados em conjunto para resolver problemas de mecânica espacial.

A segunda parte do capítulo é dedicada ao *princípio de impulso e quantidade de movimento* e suas aplicações ao estudo do movimento de uma partícula. Como você verá na Seção 13.11, o princípio é particularmente eficaz no estudo do *movimento impulsivo* de uma partícula, onde grandes forças são aplicadas durante um intervalo de tempo muito curto.

Nas Seções de 13.12 a 13.14, o *impacto central* de dois corpos será considerado. Mostrar-se-á que existe uma certa relação entre as velocidades relativas dos dois corpos em colisão antes e depois do impacto. Essa relação, juntamente com o fato de que a quantidade de movimento total dos dois corpos se conserva, pode ser usada para resolver vários problemas de interesse prático.

Finalmente, na Seção 13.15, você aprenderá a selecionar dentre os três métodos essenciais apresentados nos Caps. 12 e 13 o mais adequado à solução de um dado problema. Você também verá como o princípio de conservação da energia e o método de impulso e quantidade de movimento podem ser combinados para a solução de problemas que envolvem apenas forças conservativas, exceto por uma fase de impacto curta em que as forças impulsivas também precisam ser levadas em consideração.

13.2 Trabalho de uma força

Definiremos em primeiro lugar os termos *deslocamento* e *trabalho* da maneira como são usados em Mecânica.* Considere uma partícula que

* A definição de trabalho foi dada na *Seção 10.2*, e as propriedades básicas do trabalho de uma força foram delineadas nas *Seções 10.2 e 10.6*. Por conveniência, repetimos aqui as partes daquele material relacionadas à cinética de partículas.

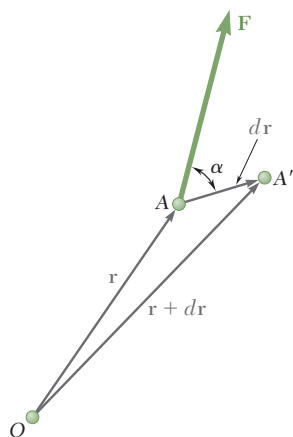



Figura 13.1

se move de um ponto A em direção a um ponto vizinho A' (Fig. 13.1). Se $\mathbf{r}$ representa o vetor posição correspondente ao ponto A, o pequeno vetor que liga A e A' pode ser representado pela diferencial $d\mathbf{r}$; o vetor $d\mathbf{r}$ é denominado *deslocamento* da partícula. Vamos agora admitir que uma força $\mathbf{F}$ esteja atuando sobre a partícula. O *trabalho da força* $\mathbf{F}$ *correspondente ao deslocamento* $d\mathbf{r}$ é definido pela grandeza

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

obtida efetuando-se o produto escalar entre a força $\mathbf{F}$ e o deslocamento $d\mathbf{r}$. Representando por F e ds, respectivamente, os módulos da força e do deslocamento, e por α o ângulo formado por $\mathbf{F}$ e $d\mathbf{r}$, e relembrando a definição do produto escalar de dois vetores (Seção 3.9), escrevemos

$$dU = F\,ds\,\cos\alpha \tag{13.1$'$}$$

Usando a Eq. (*3.30*), podemos também expressar o trabalho dU em termos dos componentes retangulares da força e do deslocamento:

$$dU = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz \tag{13.1$''$}$$

Por ser uma *grandeza escalar*, o trabalho tem uma intensidade e um sinal, mas não uma direção. Notemos também que ele pode ser expresso em unidades obtidas do produto das unidades de comprimento pelas unidades de força. No SI, o trabalho deve ser expresso em N · m. A unidade de trabalho N · m é chamada de *joule* (J).*
Resulta de (13.1′) que o trabalho dU é positivo se o ângulo α for agudo e negativo se α for obtuso. Três casos particulares são de especial interesse. Se a força $\mathbf{F}$ possui o mesmo sentido que $d\mathbf{r}$, o trabalho dU reduz-se a $F\,ds$. Se $\mathbf{F}$ tem um sentido oposto ao de $d\mathbf{r}$, o trabalho é $dU = -F\,ds$. Finalmente, se $\mathbf{F}$ é perpendicular a $d\mathbf{r}$, o trabalho dU é nulo.

O trabalho de $\mathbf{F}$ durante um deslocamento *finito* da partícula de A_1 até A_2 (Fig. 13.2*a*) é obtido por integração da Eq. (13.1) ao longo da trajetória descrita pela partícula. Esse trabalho, representado por $U_{1\rightarrow 2}$ é:

---

* O joule (J) é a unidade de *energia* do SI, seja na forma mecânica (trabalho, energia potencial, energia cinética), ou nas formas química, elétrica ou térmica. Devemos notar que, embora N · m = J, o momento de uma força deve ser expresso em N · m, e não em joules, pois o momento de uma força não é uma forma de energia.

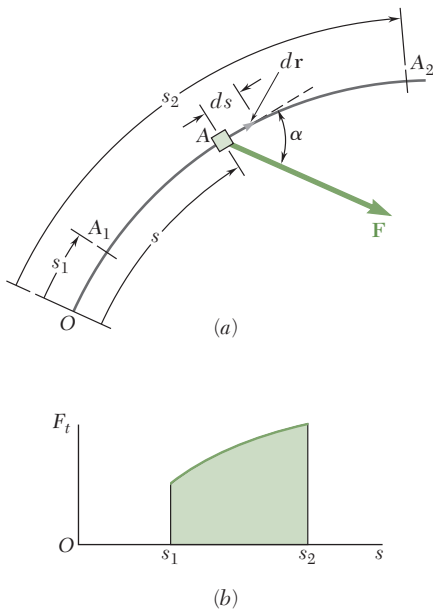



Figura 13.2

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$

Usando a equação alternativa (13.1′) para o trabalho elementar dU, e observando que $F \cos \alpha$ representa o componente tangencial F_t da força, podemos também expressar o trabalho $U_{1\to 2}$ como

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds = \int_{s_1}^{s_2} F_t\, ds \tag{13.2′}$$

onde a variável de integração s mede a distância percorrida pela partícula ao longo da trajetória. O trabalho $U_{1\to 2}$ é representado pela área sob a curva obtida plotando $F_t = F \cos \alpha$ em função de s (Fig. 13.2*b*).

Quando a força $\mathbf{F}$ é definida pelos seus componentes retangulares, a Eq. (13.1″) pode ser usada para o trabalho elementar. Escrevemos então

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) \tag{13.2″}$$

sendo a integração efetuada ao longo da trajetória descrita pela partícula.

Trabalho de uma força constante em movimento retilíneo. Quando uma partícula movendo-se em linha reta é submetida à ação por uma força $\mathbf{F}$ de intensidade e direção constantes (Fig. 13.3), a Eq. (13.2′) fornece

Figura 13.3

$$U_{1\to 2} = (F \cos \alpha)\, \Delta x \tag{13.3}$$

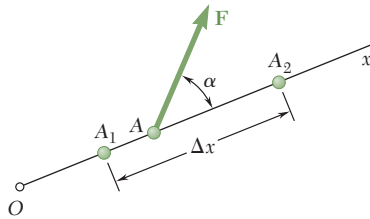
onde: α = ângulo entre a força e a direção do movimento
Δx = deslocamento de A_1 até A_2

Trabalho da força da gravidade. O trabalho do peso $\mathbf{W}$ de um corpo, isto é, da força da gravidade exercida sobre aquele corpo, é obtido substituindo-se os componentes de $\mathbf{W}$ em (13.1″) e (13.2″). Escolhendo o eixo y vertical para cima (Fig. 13.4), temos $F_x = 0$, $F_y = -W$ e $F_z = 0$, e podemos escrever

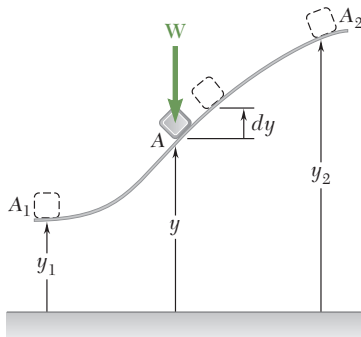
Figura 13.4

$$dU = -W\, dy$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

ou

$$U_{1\to 2} = -W(y_2 - y_1) = -W\, \Delta y \tag{13.4′}$$

onde Δy é o deslocamento vertical de A_1 até A_2. Logo, o trabalho do peso $\mathbf{W}$ é igual ao *produto de W e do deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo.* O trabalho é *positivo* quando $\Delta y < 0$, isto é, *quando o corpo move-se para baixo.*

Trabalho da força exercida por uma mola. Considere um corpo A conectado a um ponto fixo B por meio de uma mola; admite-se que a mola não esteja deformada quando o corpo está em A_0 (Fig. 13.5*a*). Evidências experimentais mostram que a magnitude da força **F** exercida pela mola sobre o corpo A é proporcional à deflexão x da mola medida em relação à posição A_0. Temos

$$F = kx \tag{13.5}$$

onde k é a *constante de mola,* expressa em N/m ou kN/m em unidades do SI*.

O trabalho da força **F** exercida pela mola durante um deslocamento finito do corpo de A_1 ($x = x_1$) até A_2 ($x = x_2$) é obtido escrevendo-se

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\to 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$

Deve-se ter cuidado ao expressar k e x em unidades consistentes. Observemos que o trabalho da força **F** exercida pela mola sobre o corpo é *positivo* quando $x_2 < x_1$, isto é, *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

Como a Eq. (13.5) é a equação de uma linha reta de coeficiente angular k passando pela origem, o trabalho $U_{1\to2}$ da força **F** durante o deslocamento de A_1 até A_2 pode ser obtido pelo cálculo da área do trapézio mostrado na Fig. 13.5*b*. Isso é feito calculando-se F_1 e F_2 e multiplicando a base Δx do trapézio pela sua altura média $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Já que o trabalho da força **F** exercida pela mola é positivo para um valor negativo de Δx, escrevemos

$$U_{1\to 2} = -\tfrac{1}{2}(F_1 + F_2)\,\Delta x \tag{13.6'}$$

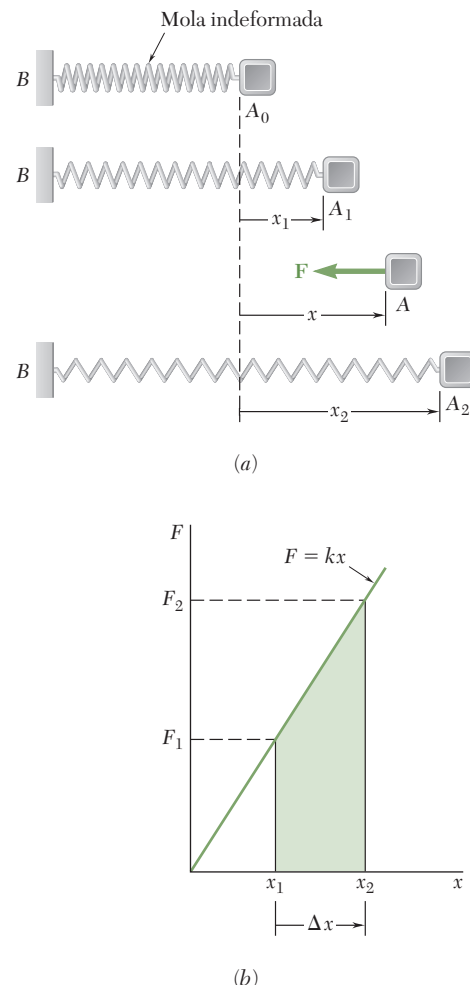
Em geral, a Eq. (13.6′) é de uso mais conveniente que a (13.6) e propicia menor chance de confusão das unidades envolvidas.

(*a*)

(*b*)

Figura 13.5

Trabalho de uma força gravitacional. Vimos, na Seção 12.10, que duas partículas de massas M e m a uma distância r entre ambas atraem-se mutuamente com forças iguais e opostas **F** e −**F**, direcionadas ao longo da linha que as une cuja intensidade é

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

* A relação $F = kx$ é correta apenas sob condições estáticas. Sob condições dinâmicas, a fórmula (13.5) deve ser modificada para levar em consideração a inércia da mola. Todavia, o erro introduzido ao usar-se a relação $F = kx$ para a solução de problemas cinéticos é pequeno se a massa da mola for pequena em comparação com as outras massas em movimento.

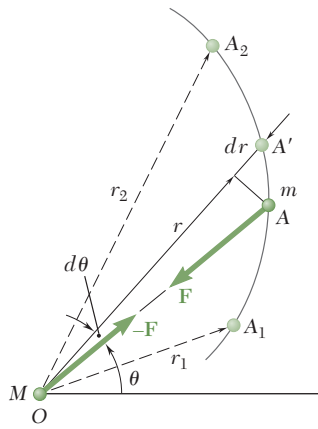



Figura 13.6

Consideremos que a partícula M ocupe uma posição O fixa enquanto a partícula m se move ao longo da trajetória mostrada na Fig. 13.6. O trabalho da força **F** exercida sobre a partícula m durante um deslocamento infinitesimal da partícula de A até A' pode ser obtido multiplicando-se a intensidade F da força pelo componente radial dr do deslocamento. Como **F** é orientada para O, o trabalho é negativo e escrevemos

$$dU = -F\,dr = -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

O trabalho da força gravitacional **F** durante um deslocamento finito desde A_1 ($r = r_1$) até A_2 ($r = r_2$) é, portanto,

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \tag{13.7}$$

onde M é a massa da Terra. Essa equação pode ser usada para determinar o trabalho da força exercida pela Terra sobre um corpo de massa m a uma distância r do centro da Terra, quando r é maior que o raio R da Terra. Retomando a primeira das relações (12.29), podemos substituir o produto GMm da Eq. (13.7) por WR^2, onde R é o raio da Terra ($R = 6{,}37 \times 10^6$ m) e W é o peso do corpo na superfície da Terra.

Diversas forças frequentemente encontradas em problemas de Cinética *não realizam trabalho*. São forças aplicadas a pontos fixos ($ds = 0$) ou que agem em uma direção perpendicular ao deslocamento ($\cos\alpha = 0$). Entre as forças que não realizam trabalho estão as seguintes: a reação em um pino sem atrito quando o corpo apoiado gira em torno dele; a reação de uma superfície sem atrito quando o corpo em contato move-se ao longo da superfície; a reação de um rolamento que se move ao longo de sua pista; e o peso de um corpo quando seu centro de gravidade se move horizontalmente.

13.3 Energia cinética de uma partícula. Princípio de trabalho e energia

Considere uma partícula de massa m submetida à ação de uma força **F** e que se move ao longo de uma trajetória que tanto pode ser retilínea como curva (Fig. 13.7). Expressando a segunda lei de Newton em termos dos componentes tangenciais da força e da aceleração (ver Seção 12.5), escrevemos

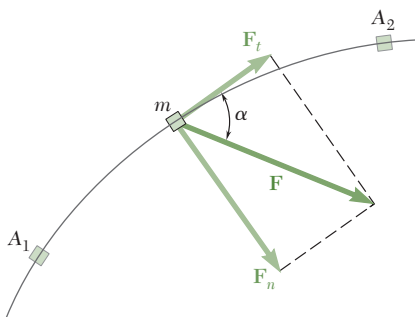
Figura 13.7

$$F_t = ma_t \qquad \text{ou} \qquad F_t = m\frac{dv}{dt}$$

onde v é a velocidade da partícula. Relembrando da Seção 11.9, que $v = ds/dt$, obtemos

$$F_t = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$
$$F_t\,ds = mv\,dv$$

Integrando desde A_1, onde $s = s_1$ e $v = v_1$, até A_2, onde $s = s_2$ e $v = v_2$, escrevemos

$$\int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = m\int_{v_1}^{v_2} v\,dv = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \tag{13.8}$$

O primeiro membro do lado esquerdo da Eq. (13.8) representa o trabalho $U_{1\to2}$ da força **F** exercida sobre a partícula durante o seu deslocamento de A_1 até A_2; conforme indicado na Seção 13.2, o trabalho $U_{1\to2}$ é uma grandeza escalar. A expressão $\frac{1}{2}mv^2$ também é uma grandeza escalar; ela é definida como a energia cinética da partícula, sendo representada por T. Escrevemos

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

Substituindo em (13.8), temos

$$U_{1\to2} = T_2 - T_1 \tag{13.10}$$

que expressa o seguinte: quando uma partícula move-se de A_1 até A_2 sob a ação de uma força **F**, o *trabalho da força* **F** *é igual à variação da energia cinética da partícula.* Isso é conhecido como o *princípio de trabalho e energia.* Reordenando os termos em (13.10), escrevemos

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2 \tag{13.11}$$

Logo, a *energia cinética da partícula em* A_2 *pode ser obtida adicionando-se à sua energia cinética em* A_1 *o trabalho realizado durante o deslocamento de* A_1 *até* A_2 *pela força* **F** *exercida sobre a partícula.* Assim como a segunda lei de Newton da qual foi deduzido, o princípio de trabalho e energia aplica-se somente em relação a um referencial newtoniano (Seção 12.2). A velocidade v usada para determinar a energia cinética T deve, portanto, ser medida em relação a um referencial newtoniano.

Uma vez que tanto o trabalho como a energia cinética são grandezas escalares, sua soma pode ser calculada como uma soma algébrica usual, com o trabalho $U_{1\to2}$ sendo considerado positivo ou negativo de acordo com o sentido de **F**. Quando diversas forças agem sobre a partícula, a expressão $U_{1\to2}$ representa o trabalho total das forças que agem sobre a partícula; ele é obtido adicionando-se algebricamente o trabalho das várias forças.

Conforme observado anteriormente, a energia cinética de uma partícula é uma grandeza escalar. Além disso, da definição $T = \frac{1}{2}mv^2$ resulta que a energia cinética é sempre positiva, não importando o sentido do movimento da partícula. Considerando o caso particular em que $v_1 = 0$ e $v_2 = v$, e fazendo $T_1 = 0$ e $T_2 = T$ na Eq. (13.10), observamos que o trabalho realizado pelas forças que agem sobre a partícula é igual a T. Logo, a energia cinética de uma partícula que se move com velocidade v representa o trabalho que deve ser realizado para levar a partícula do repouso até a velocidade v. Fazendo $T_1 = T$ e $T_2 = 0$ na Eq. (13.10), notamos também que, quando uma partícula que se move com velocidade v é levada ao repouso, o trabalho realizado pelas forças que agem sobre a partícula é $-T$. Admitindo que nenhuma energia seja dissipada em calor, concluímos que o trabalho realizado pelas forças exercidas *pela partícula* sobre os corpos que a levam ao repouso é igual a T. Logo, a energia cinética de uma partícula também representa *a capacidade de realizar trabalho associada à velocidade da partícula.*

A energia cinética é medida nas mesmas unidades que o trabalho, isto é, em joules, no SI. No SI, verificamos que

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 = \text{kg}(\text{m/s})^2 = (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\text{m} = \text{N}\cdot\text{m} = \text{J}$$

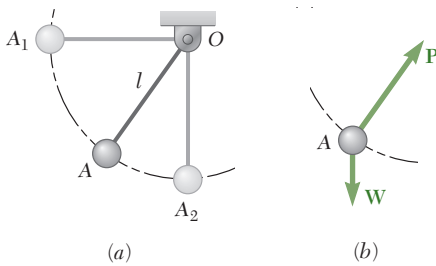



Figura 13.8

13.4 A aplicação do princípio de trabalho e energia

A aplicação do princípio de trabalho e energia simplifica bastante a solução de muitos problemas que envolvem forças, deslocamentos e velocidades. Considere, por exemplo, o pêndulo OA, que consiste em um corpo A de peso W preso à corda de comprimento l (Fig. 13.8*a*). O pêndulo é liberado do repouso em uma posição horizontal OA_1 e posto para oscilar em um plano vertical. Queremos determinar a velocidade escalar do corpo quando ele passar por A_2, exatamente abaixo de O.

Em primeiro lugar, determinamos o trabalho realizado durante o deslocamento de A_1 até A_2 pelas forças que agem sobre o corpo do pêndulo. Desenhamos um diagrama de objeto livre do corpo, mostrando todas as forças *reais* que agem sobre ele, isto é, o peso **W** e a força **P** exercida pela corda (Fig. 13.8*b*). (Um vetor de inércia não é uma força real e *não deve* ser incluído no diagrama de corpo livre.) Observamos que a força **P** não realiza trabalho, pois é normal à trajetória; logo, a única força que realiza trabalho é o peso **W**. O trabalho de **W** é obtido pelo produto da sua intensidade W pelo deslocamento vertical l (Seção 13.2); como o deslocamento é para baixo, o trabalho é positivo. Escrevemos, portanto, que $U_{1\to2} = Wl$.

Considerando agora a energia cinética do corpo do pêndulo, encontramos $T_1 = 0$ em A_1 e $T_2 = \frac{1}{2}(W/g)v_2^2$ em A_2. Podemos, então, aplicar o princípio de trabalho e energia; relembrando a Eq. (13.11), escrevemos:

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2 \qquad 0 + Wl = \frac{1}{2}\frac{W}{g}v_2^2$$

Resolvendo para v_2, encontramos $v_2 = \sqrt{2gl}$. Notemos que a velocidade escalar obtida é a mesma de um corpo em queda livre de uma altura l.

O exemplo que acabamos de considerar ilustra as seguintes vantagens do método de trabalho e energia:

1. A fim de encontrar-se a velocidade escalar em A_2, não há necessidade de determinar a aceleração em uma posição intermediária A e integrar a expressão obtida de A_1 até A_2.
2. Todas as grandezas envolvidas são escalares e podem ser adicionadas diretamente, sem o emprego de componentes x e y.
3. Forças que não realizam trabalho são eliminadas da solução do problema.

Entretanto, o que é vantagem para um problema pode ser desvantagem para outro. É evidente, por exemplo, que o método de trabalho e energia não pode ser usado para determinar diretamente uma aceleração. Também é evidente que, na determinação de uma força que é normal à trajetória da partícula, força esta que não realiza trabalho, o método de trabalho e energia deve ser suplementado pela aplicação direta da segunda lei de Newton. Suponha, por exemplo, que queiramos determinar a tração na corda do pêndulo da Fig. 13.8*a* quando o corpo passar por A_2. Desenhamos um diagrama de corpo livre do pêndulo naquela posição (Fig. 13.9) e expressamos a segunda lei de Newton em termos de componentes tangencial e normal. As equações $\Sigma F_t = ma_t$ e $\Sigma F_n = ma_n$ conduzem, respectivamente, $a_t = 0$ e

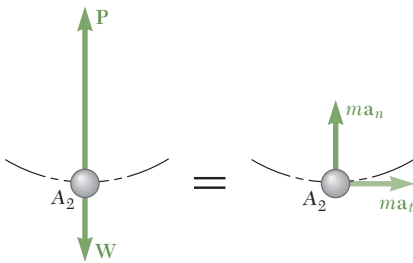



Figura 13.9

$$P - W = ma_n = \frac{W}{g}\frac{v_2^2}{l}$$

Mas a velocidade escalar em A_2 foi determinada anteriormente pelo método de trabalho e energia. Substituindo $v_2^2 = 2gl$ e resolvendo para P, escrevemos

$$P = W + \frac{W}{g}\frac{2gl}{l} = 3W$$

Quando um problema envolve duas ou mais partículas, o princípio de trabalho e energia pode ser aplicado a cada partícula separadamente. Adicionando as energias cinéticas das várias partículas e considerando o trabalho de todas as forças que agem sobre elas, podemos também escrever uma equação única de trabalho e energia para todas as partículas envolvidas. Temos

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (13.11)$$

onde T representa a soma aritmética das energias cinéticas das partículas envolvidas (todos os termos são positivos) e $U_{1\rightarrow 2}$ é o trabalho de todas as forças que agem sobre as partículas, *incluindo as forças de ação e reação exercidas pelas partículas entre si.* Em problemas que envolvem corpos ligados por *cordas ou conexões inextensíveis,* porém, o trabalho das forças exercidas por uma certa corda ou conexão sobre os dois corpos ligados por ela se anula, pois os pontos de aplicação dessas forças se movem por distâncias iguais (ver Problema Resolvido 13.2).*

Como as forças de atrito têm sentido oposto ao do deslocamento do corpo em que atuam, *o trabalho das forças de atrito é sempre negativo.* Esse trabalho representa a energia dissipada em calor e sempre resulta em um decréscimo da energia cinética do corpo envolvido (ver Problema Resolvido 13.3).

13.5 Potência e eficiência

A *potência* é definida como a taxa temporal de realização de trabalho. Na seleção de uma máquina ou um motor, a potência é um critério muito mais importante que a quantidade real de trabalho a ser realizado. Tanto um pequeno motor como uma grande usina de potência podem ser usados para fornecer uma dada quantidade de trabalho; mas o pequeno motor pode levar um mês para realizar o trabalho feito pela usina em poucos minutos. Se ΔU é o trabalho realizado durante o intervalo de tempo Δt, então a potência média durante aquele intervalo é

$$\text{Potência média} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$$

Fazendo Δt tender a zero, obtemos no limite

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} \qquad (13.12)$$

* A aplicação do método de trabalho e energia a um sistema de partículas é analisada no Cap. 14.

Substituindo o produto escalar $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ para dU, podemos escrever também

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt}$$

e, relembrando que $d\mathbf{r}/dt$ representa a velocidade $\mathbf{v}$ do ponto de aplicação de $\mathbf{F}$,

$$\text{Potência} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

Como a potência foi definida como a taxa temporal de realização de trabalho, ela deve ser expressa em unidades obtidas dividindo-se as unidades de trabalho pela unidade de tempo. Logo, no SI, a potência deve ser expressa em J/s; essa unidade é denominada *watt* (W). Temos

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

Lembrando que se utiliza comumente a unidade hp (cavalo-potência) para representar potência, tem-se que

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$$

Recordando da Sec. 13.2 que 1ft · 1b = 1.356 J, verificamos que

$$1 \text{ ft} \cdot \text{lb/s} = 1{,}356 \text{ J/s} = 1{,}356 \text{ W}$$
$$1 \text{ hp} = 550(1{,}356 \text{ W}) = 746 \text{ W} = 0{,}746 \text{ kW}$$

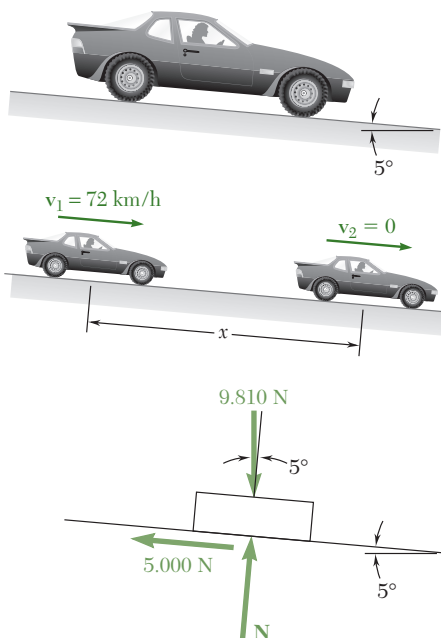
A *eficiência mecânica* de uma máquina foi definida na Seção 10.5 como sendo a razão entre o trabalho de saída e o trabalho de entrada:

$$\eta = \frac{\text{trabalho de saída}}{\text{trabalho de entrada}} \tag{13.14}$$

Essa definição baseia-se na hipótese de que o trabalho é realizado a uma taxa constante. Logo, a razão entre os trabalhos de saída e de entrada é igual à razão das taxas de realização dos trabalhos de saída e de entrada, e temos

$$\eta = \frac{\text{potência de saída}}{\text{potência de entrada}} \tag{13.15}$$

Por causa das perdas de energia devidas ao atrito, o trabalho de saída é sempre menor que o trabalho de entrada e, consequentemente, a potência de saída é sempre menor que a potência de entrada. Logo, a eficiência mecânica de uma máquina é sempre menor que 1.

Quando uma máquina é usada para transformar energia mecânica em energia elétrica, ou energia térmica em energia mecânica, sua *eficiência global* pode ser obtida a partir da Eq. (13.15). A eficiência global de uma máquina é sempre menor que 1; ela fornece uma medida das diversas perdas de energia envolvidas (perdas de energia elétrica ou térmica, assim como perdas por atrito). Observe que é necessário expressar a potência de saída e a potência de entrada nas mesmas unidades antes de aplicar a Eq. (13.15).

PROBLEMA RESOLVIDO 13.1

Um automóvel de massa 1.000 kg é conduzido em um declive de 5° a uma velocidade de 72 km/h quando os freios são usados, causando uma força total de frenagem constante de 5.000 N (aplicada pela estrada sobre os pneus). Determine a distância percorrida pelo automóvel até ele parar.

SOLUÇÃO

Energia cinética

Posição 1:

$$v_1 = \left(72\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1.000\text{ m}}{1\text{ km}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3.600\text{ s}}\right) = 20\text{ m/s}$$

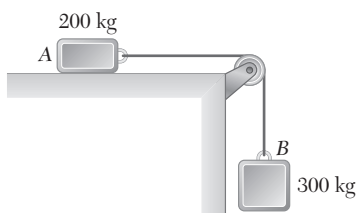
$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(1.000\text{ kg})(20\text{ m/s})^2 = 20.000\text{ J}$$

Posição 2: $v_2 = 0 \qquad T_2 = 0$

Trabalho $U_{1\to2} = -5.000x + (1.000\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2)(\text{sen }5°)x = -4.145x$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$

$$200.000 - 4.145x = 0 \qquad x = 48{,}25\text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.2

Dois blocos estão conectados por um cabo inextensível como mostrado na figura. Se o sistema é liberado do repouso, determine a velocidade do bloco A depois que ele se desloca 2 m. Admita que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco A e o plano seja de $\mu_k = 0{,}25$ e que a roldana não tenha nem peso nem atrito.

SOLUÇÃO

Trabalho e energia para o bloco *A*. Representamos a força de atrito por $\mathbf{F}_A$ e a força exercida pelo cabo por $\mathbf{F}_C$, e escrevemos

$$m_A = 200\text{ kg} \qquad W_A = (200\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 1.962\text{ N}$$

$$F_A = \mu_k N_A = \mu_k W_A = 0{,}25(1.962\text{ N}) = 490\text{ N}$$

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2: \quad 0 + F_C(2\text{ m}) - F_A(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_A v^2$$

$$F_C(2\text{ m}) - (490\text{ N})(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200\text{ kg})v^2 \qquad (1)$$

Trabalho e energia para o bloco *B*. Escrevemos

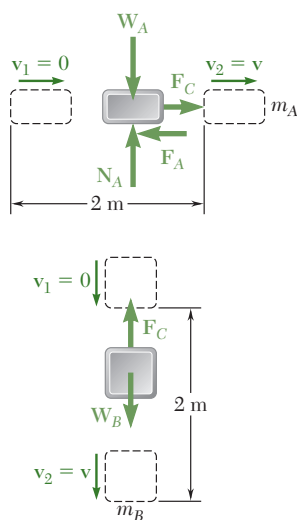
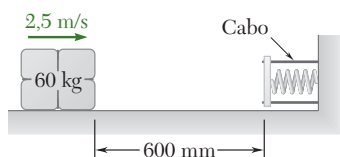
$$m_B = 300\text{ kg} \qquad W_B = (300\text{ kg})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 2.940\text{ N}$$

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2: \quad 0 + W_B(2\text{ m}) - F_C(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}m_B v^2$$

$$(2.940\text{ N})(2\text{ m}) - F_C(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(300\text{ kg})v^2 \qquad (2)$$

Adicionando os primeiro e segundo membros de (1) e (2), observamos que o trabalho das forças exercidas pelo cabo sobre A e B se anula:

$$(2.940\text{ N})(2\text{ m}) - (490\text{ N})(2\text{ m}) = \tfrac{1}{2}(200\text{ kg} + 300\text{ kg})v^2$$

$$4.900\text{ J} = \tfrac{1}{2}(500\text{ kg})v^2 \qquad v = 4{,}43\text{ m/s} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.3

Uma mola é usada para parar um pacote de 60 kg que desliza sobre uma superfície horizontal. A mola tem uma constante $k = 20$ kN/m e é contida por meio de cabos de modo tal que, inicialmente, ela está comprimida em 120 mm. Sabendo que o pacote tem uma velocidade de 2,5 m/s na posição mostrada na figura e que a deflexão máxima adicional da mola é de 40 mm, determine (*a*) o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a superfície e (*b*) a velocidade do pacote quando ele passar novamente pela posição mostrada.

SOLUÇÃO

a. Movimento da posição 1 para a posição 2

Energia cinética. ***Posição 1:*** $v_1 = 2{,}5$ m/s

$$T_1 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})(2{,}5 \text{ m/s})^2 = 187{,}5 \text{ N} \cdot \text{m} = 187{,}5 \text{ J}$$

Posição 2: (máxima deflexão da mola): $v_2 = 0 \quad T_2 = 0$

Trabalho

Força de atrito **F**. Temos

$$F = \mu_k N = \mu_k W = \mu_k mg = \mu_k(60 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = (588{,}6 \text{ N})\mu_k$$

O trabalho de **F** é negativo e igual a

$$(U_{1\to2})_f = -Fx = -(588{,}6 \text{ N})\mu_k(0{,}600 \text{ m} + 0{,}040 \text{ m}) = -(377 \text{ J})\mu_k$$

Força da mola **P**. A força variável **P** exercida pela mola realiza uma quantidade de trabalho negativo igual à área sob a curva força-deflexão da mola. Temos

$$P_{mín.} = kx_0 = (20 \text{ kN/m})(120 \text{ mm}) = (20.000 \text{ N/m})(0{,}120 \text{ m}) = 2.400 \text{ N}$$
$$P_{máx.} = P_{mín.} + k\,\Delta x = 2.400 \text{ N} + (20 \text{ kN/m})(40 \text{ mm}) = 3.200 \text{ N}$$
$$(U_{1\to2})_e = -\tfrac{1}{2}(P_{mín.} + P_{máx.})\Delta x = -\tfrac{1}{2}(2.400 \text{ N} + 3.200 \text{ N})(0{,}040 \text{ m}) = -112{,}0 \text{ J}$$

Logo, o trabalho total é

$$U_{1\to2} = (U_{1\to2})_f + (U_{1\to2})_e = -(377 \text{ J})\mu_k - 112{,}0 \text{ J}$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2: \qquad 187{,}5 \text{ J} - (377 \text{ J})\mu_k - 112{,}0 \text{ J} = 0 \qquad \mu_k = 0{,}20 \quad ◀$$

b. Movimento da posição 2 para a posição 3

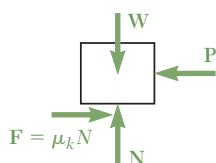
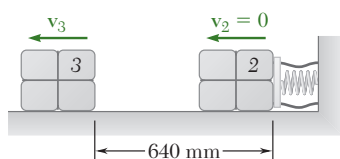
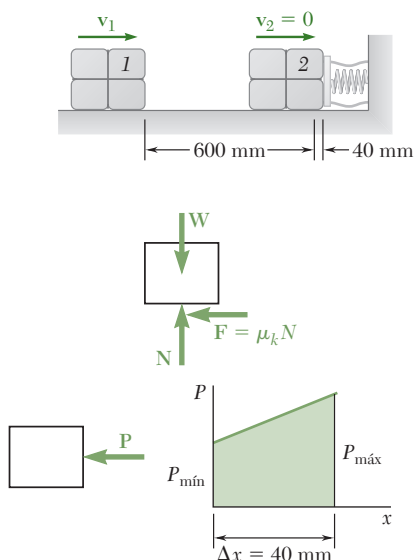
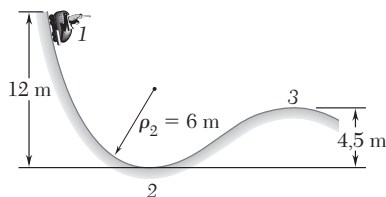
Energia cinética. ***Posição 2:*** $v_2 = 0 \quad T_2 = 0$

Posição 3: $T_3 = \tfrac{1}{2}mv_3^2 = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$

Trabalho. Uma vez que as distâncias envolvidas são as mesmas, os valores numéricos do trabalho da força de atrito **F** e da força da mola **P** são os mesmos calculados anteriormente. Todavia, enquanto o trabalho de **F** ainda é negativo, o trabalho de **P** é agora positivo.

$$U_{2\to3} = -(377 \text{ J})\mu_k + 112{,}0 \text{ J} = -75{,}5 \text{ J} + 112{,}0 \text{ J} = +36{,}5 \text{ J}$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_2 + U_{2\to3} = T_3: \qquad 0 + 36{,}5 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(60 \text{ kg})v_3^2$$
$$v_3 = 1{,}103 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_3 = 1{,}103 \text{ m/s} \leftarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.4

Um carrinho de montanha-russa de 1.000 kg parte do repouso no ponto *1* e move-se pista abaixo, sem atrito. (*a*) Determine a força exercida pela pista sobre o carrinho no ponto *2*, onde o raio de curvatura da pista é de 6 m. (*b*) Determine o valor mínimo de segurança do raio de curvatura no ponto *3*.

SOLUÇÃO

a. Força exercida pela pista no ponto 2. O princípio de trabalho e energia é usado para determinar a velocidade do carrinho quando ele passa pelo ponto *2*.

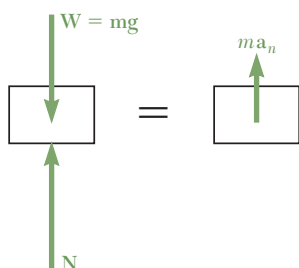
Energia cinética. $T_1 = 0 \qquad T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$

Trabalho. A única força que realiza trabalho é o peso **W**. Como o deslocamento vertical do ponto *1* ao ponto *2* é de 12 m para baixo, o trabalho do peso é

$$U_{1\to2} = +W(12\text{ m}) = mg\,(12\text{ m})$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2 \qquad 0 + mg\,(12\text{ m}) = \frac{1}{2}\,mv_2^2$$

$$v_2^2 = 24g = (24\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2) \qquad v_2 = 15{,}34\text{ m/s}$$

Segunda lei de Newton no ponto 2. A aceleração $\mathbf{a}_n$ do carrinho no ponto *2* tem intensidade $a_n = v_2^2/\rho$ e é orientada para cima. Como as forças externas que agem sobre o carrinho são **W** e **N**, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad -W + N = ma_n$$

$$= m\frac{v_2^2}{\rho}$$

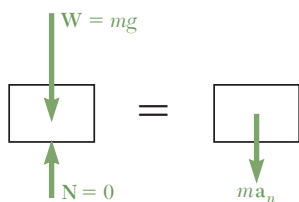
$$= m\frac{24g}{6} = 4\,mg = 4W$$

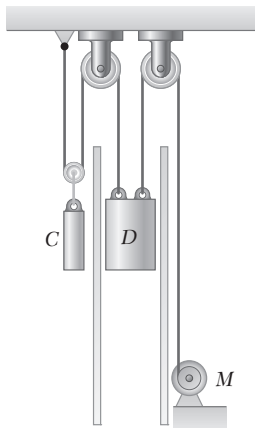
$$N = 5W = 5(1000\text{ kg})\,(9{,}81\text{ m/s}^2) \qquad N = 49{,}05\text{ kN}\uparrow \quad ◀$$

b. Valor mínimo de ρ no ponto 3. ***Princípio de trabalho e energia.*** Aplicando o princípio de trabalho e energia entre o ponto *1* e o ponto *3*, obtemos

$$T_1 + U_{1\to3} = T_3 \qquad 0 + mg\,(7{,}5\text{ m}) = \frac{1}{2}\,mv_3^2$$

$$v_3^2 = 15g = (15\text{m})\,(9{,}81\text{ m/s}^2)\;\; v_3 = 12{,}13\text{ m/s}$$

Segunda lei de Newton no ponto 3. O valor mínimo de segurança de ρ ocorre quando **N** = 0. Nesse caso, a aceleração $\mathbf{a}_n$, de intensidade $a_n = v_3^2/\rho$, é orientada para baixo, e escrevemos

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: \qquad mg = m\,\frac{v_3^2}{\rho}$$

$$\rho = \frac{v_3^2}{g} = \frac{15g}{g} \qquad \rho = 15\text{ m} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.5

O elevador D e sua carga têm uma massa combinada de 300 kg, enquanto o contrapeso C tem massa de 400 kg. Determine a potência liberada pelo motor elétrico M quando o elevador (a) se move para cima com uma velocidade constante de 2,5 m/s e (b) se move com uma velocidade instantânea de 2,5 m/s e aceleração de 1 m/s^2, ambas orientadas para cima.

SOLUÇÃO

Como a força **F** exercida pelo cabo do motor tem o mesmo sentido da velocidade $\mathbf{v}_D$ do elevador, a potência é igual a Fv_D, sendo $v_D = 2{,}5$ m/s. Para obter a potência, devemos antes determinar **F** em cada uma das duas situações dadas.

a. Movimento uniforme. Temos $\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D = 0$; ambos os corpos estão em equilíbrio.

Corpo livre C: $+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad 2T - 400\text{ g} = 0 \quad T = 200\text{ g} = 1.962\text{ N}$

Corpo livre D: $+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad F + T - 300\text{ g} = 0$

$$F = 300\text{ g} - T = 300\text{ g} - 200\text{ g} = 100\text{ g} = 981\text{ N}$$
$$Fv_D = (981\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 2.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 2.450\text{ W}$$

b. Movimento acelerado. Temos

$$\mathbf{a}_D = 1\text{ m/s}^2\uparrow \qquad \mathbf{a}_C = -\tfrac{1}{2}\mathbf{a}_D = 0{,}5\text{ m/s}^2\downarrow$$

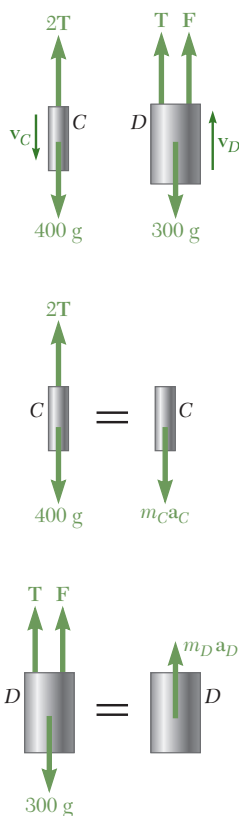
As equações de movimento são

Corpo livre C: $+\downarrow \Sigma F_y = m_C a_C$: $\quad 400\text{ g} - 2T = 400\,(0{,}5)$

$$T = \frac{(400)(9{,}81) - 400\,(0{,}5)}{2} = 1.862\text{ N}$$

Corpo livre D: $+\uparrow \Sigma F_y = m_D a_D$: $\quad F + T - 300\text{ g} = 300\,(1)$

$$F + 1.862 - 300\,(9{,}81) = 300 \qquad F = 1.381\text{ N}$$
$$Fv_D = (1.381\text{ N})(2{,}5\text{ m/s}) = 3.452\text{ W}$$
$$\text{Potência} = 3.450\text{ W}$$

◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

No capítulo anterior você resolveu problemas que tratam do movimento de uma partícula usando a equação fundamental $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para determinar a aceleração **a.** Aplicando os princípios da cinemática, você foi então capaz de determinar, a partir de **a**, a velocidade e o deslocamento da partícula em um instante qualquer. Nesta lição, combinamos $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ e os princípios da cinemática para obter um método adicional de análise denominado *método de trabalho e energia.* Esse método elimina a necessidade de calcular a aceleração e possibilitará que você relacione as velocidades da partícula em dois pontos ao longo de sua trajetória. Para resolver um problema pelo método de trabalho e energia, você deverá seguir os seguintes passos:

1. Calcular o trabalho de cada força. O trabalho $U_{1\to2}$ de uma força dada **F** durante um deslocamento finito da partícula de A_1 até A_2 é definido como

$$U_{1\to2} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{ou} \qquad U_{1\to2} = \int (F \cos \alpha)\, ds \qquad (13.2,\ 13.2')$$

onde α é o ângulo entre **F** e o deslocamento $d\mathbf{r}$. O trabalho $U_{1\to2}$ é uma grandeza escalar e é expresso em N · m ou joules (J) no SI. Observe que o trabalho realizado é nulo para uma força perpendicular ao deslocamento ($\alpha = 90°$). O trabalho realizado é negativo para $90° < \alpha < 180°$ e, em particular, para uma força de atrito, que sempre é oposta à direção do deslocamento ($\alpha = 180°$).

O trabalho $U_{1\to2}$ pode ser facilmente avaliado nos seguintes casos que você encontrará:

a. Trabalho de uma força constante em movimento retilíneo

$$U_{1\to2} = (F \cos \alpha)\, \Delta x \qquad (13.3)$$

onde: α = ângulo entre a força e a direção do movimento
Δx = deslocamento de A_1 até A_2 (Fig. 13.3)

b. Trabalho da força da gravidade

$$U_{1\to2} = -W\, \Delta y \qquad (13.4')$$

onde Δy é o deslocamento vertical do centro de gravidade do corpo cujo peso é W. Observe que o trabalho é positivo quando Δy é negativo, isto é, quando o corpo move-se para baixo (Fig. 13.4).

c. Trabalho da força exercida por uma mola

$$U_{1\to2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

onde k é a constante da mola e x_1 e x_2 são as elongações da mola correspondentes às posições A_1 e A_2 (Fig. 13.5).

(*continua*)

d. Trabalho de uma força gravitacional

$$U_{1\to 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \tag{13.7}$$

para um deslocamento do corpo de $A_1(r = r_1)$ até $A_2(r = r_2)$ (Fig. 13.6).

2. Calcular a energia cinética em A_1 e A_2. A energia cinética $\boldsymbol{T}$ é

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

onde m é a massa da partícula e v é a intensidade da velocidade. As unidades de energia cinética são iguais às unidades de trabalho, isto é, N · m ou joules (J), no SI.

3. Substituir os valores do trabalho realizado $U_{1\to 2}$ e das energias cinéticas T_1 e T_2 na equação:

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Você terá agora *uma equação* que pode resolver para *uma incógnita.* Observe que essa equação não fornece diretamente o tempo de percurso ou a aceleração. Todavia, se você conhece o raio de curvatura ρ da trajetória da partícula em um ponto onde tenha obtido a velocidade v, você pode expressar o componente normal da aceleração como $a_n = v^2/\rho$ e obter o componente normal da força exercida sobre a partícula escrevendo $F_n = mv^2/\rho$.

4. A potência foi introduzida nesta lição como sendo a taxa temporal de realização de trabalho, $P = dU/dt$. A potência é medida em J/s ou *watts* (W) no SI. Utiliza-se, comumente, como alternativa o hp (cavalo-potência). Para calcular a potência, você pode aplicar a fórmula equivalente,

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \tag{13.13}$$

onde **F** e **v** representam, respectivamente, a força e a velocidade em um certo instante [Problema Resolvido 13.5]. Em alguns problemas [ver, por exemplo, o Problema 13.50], será solicitado que você calcule a *potência média,* que pode ser obtida dividindo-se o trabalho total pelo intervalo de tempo durante o qual o trabalho é realizado.

PROBLEMAS

13.1 Um pequeno carro híbrido de 1.300 kg está viajando a 108 km/h. Determine (*a*) a energia cinética do veículo, (*b*) a velocidade escalar para um caminhão de 9.000 kg que tem a mesma energia cinética que o carro.

13.2 Um satélite de 450 kg é posto em uma órbita circular a 6.360 km acima da superfície da Terra. Nessa elevação, a aceleração da gravidade é de 2,4 m/s^2. Determine a energia cinética do satélite, sabendo que sua velocidade orbital é de 20.000 km/h.

13.3 Partindo do repouso, uma pedra de 1 kg cai de uma altura *h* e bate no chão com uma velocidade de 15 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura *h* da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 m/s^2.)

13.4 Partindo do repouso, uma pedra de 4 kg cai de uma altura *h* e bate no chão com uma velocidade de 25 m/s. (*a*) Encontre a energia cinética da pedra quando ela bate no chão e a altura *h* da queda. (*b*) Resolva o item *a*, admitindo que a mesma pedra caia na Lua. (Aceleração da gravidade na Lua = 1,62 m/s^2.)

13.5 Determine a máxima velocidade escalar teórica que pode ser alcançada em uma distância de 360 m por um carro inicialmente em repouso considerando que não há deslizamento. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e o pavimento é 0,75; 60% do peso do carro está distribuído sobre as rodas dianteiras e 40% nas rodas traseiras. Considere (*a*) tração dianteira, (*b*) tração traseira.

Figura P13.6

13.6 Marcas de derrapagem em uma pista de disputa de arrancadas indicam que as rodas traseiras (de tração) de um carro derrapam durante os primeiros 18 m da pista de 400 m. (*a*) Sabendo que o coeficiente e atrito cinético é 0,60, determine a velocidade escalar do carro ao final da primeira parte, de 18 m, da pista se ele parte do repouso e as rodas dianteiras perdem contato com o solo. (*b*) Qual é a máxima velocidade escalar teórica do carro na linha de chegada se, após derrapar por 18 m, ele é guiado sem que as rodas deslizem no restante da corrida? Considere que, enquanto o carro rola sem deslizar, 60% do seu peso recaem sobre as rodas traseiras e que o coeficiente de atrito estático é 0,85. Ignore as resistências do ar e de rolamento.

13.7 Em uma operação de mineração, uma caçamba cheia de minério é suspensa por um guindaste móvel que se desloca lentamente ao longo de uma ponte estacionária. A caçamba não deverá oscilar mais que 4 m horizontalmente quando o guindaste sofrer uma parada repentina. Determine a velocidade escalar horizontal máxima *v* admissível do guindaste.

13.8 Em uma operação de mineração, uma caçamba cheia de minério é suspensa por um guindaste móvel que se desloca lentamente ao longo de uma ponte estacionária. O guindaste desloca-se a uma velocidade de 3 m/s quando sofre uma parada repentina. Determine a distância horizontal máxima de oscilação da caçamba.

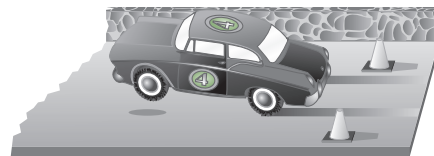
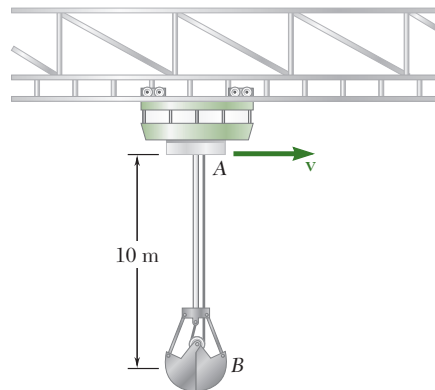



Figura P13.7 e P13.8

13.9 Um pacote é lançado 10 m para cima num aclive de 15° de forma que alcança o topo da inclinação com velocidade nula. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a velocidade inicial do pacote em *A*, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

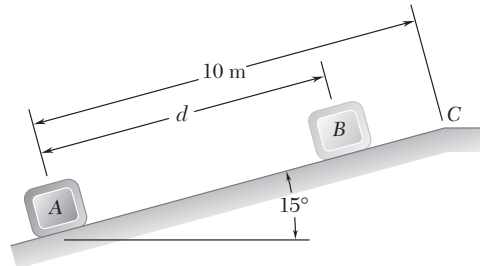



Figura P13.9 e P13.10

13.10 Um pacote é lançado para cima num aclive de 15° em *A* com velocidade de 8 m/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,12, determine (*a*) a máxima distância *d* que o pacote se moverá para cima na inclinação, (*b*) a velocidade do pacote quando este retornar a sua posição original.

13.11 As caixas são transportadas por uma esteira com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ até o início de um plano inclinado fixo em *A*, onde elas deslizam e finalmente caem em *B*. Sabendo que $\mu_k = 0{,}40$, determine a velocidade da esteira transportadora para que as caixas deixem o plano inclinado em *B* com uma velocidade de 2,4 m/s.

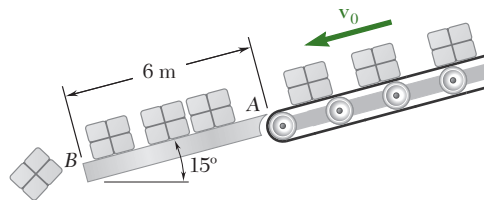



Figura *P13.11* e *P13.12*

13.12 As caixas são transportadas por uma esteira com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ até o início de um plano inclinado fixo em *A*, onde elas deslizam e finalmente caem em *B*. Sabendo que $\mu_k = 0{,}40$, determine a velocidade da esteira transportadora para que as caixas tenham velocidade nula em *B*.

13.13 Os pacotes são descarregados em um declive em *A* com velocidade de 1 m/s. Eles deslizam ao longo da superfície *ABC* para a esteira transportadora que se move com velocidade de 2 m/s. Sabendo que $\mu_k = 0{,}25$ entre os pacotes e a superfície *ABC*, determine a distância *d* se os pacotes alcançam *C* com velocidade de 2 m/s.

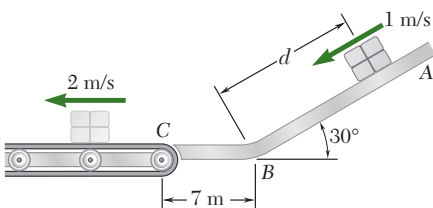



Figura P13.13 e P13.14

13.14 Os pacotes são descarregados em um declive em *A* com velocidade de 1 m/s. Eles deslizam ao longo da superfície *ABC* para a esteira transportadora que se move com velocidade de 2 m/s. Sabendo que $d = 7{,}5$ m e $\mu_k = 0{,}25$ entre os pacotes e todas as superfícies, determine (*a*) a velocidade do pacote em *C*, (*b*) a distância que um pacote deslizará na esteira transportadora antes de ficar em repouso com relação à esteira.

13.15 Um trem de metrô está viajando numa velocidade escalar de 48 km/h quando os freios são plenamente aplicados nas rodas dos carros *B* e *C*, causando então o deslizamento nos trilhos, mas não são aplicados nas rodas do carro *A*. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,35 entre as rodas e o trilho, determine (*a*) a distância necessária para produzir a parada do trem, (*b*) a força em cada engate.

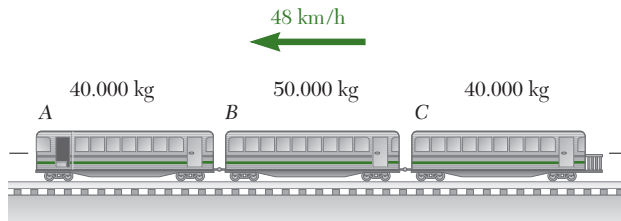



Figura P13.15

13.16 Resolver o Problema 13.15 considerando que os freios são aplicados apenas nas rodas do carro *A*.

13.17 Um caminhão-baú entra em um declive com 2% de inclinação deslocando-se a 108 km/h e deve reduzir para 72 km/h em 300 m. O cavalo mecânico tem uma massa de 1.800 kg e o baú, 5.400 kg. Determine (*a*) a força média de frenagem que deve ser aplicada, (*b*) a força média exercida no engate entre o cavalo mecânico e o baú se 70% da força de frenagem é suportada pelo baú e 30% pelo cavalo mecânico.

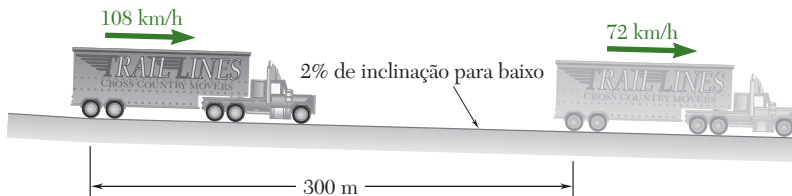



Figura *P13.17*

13.18 Um caminhão-baú entra em um aclive com 2% de inclinação deslocando-se a 72 km/h e atinge uma velocidade de 108 km/h em 300 m. O cavalo mecânico tem uma massa de 1.800 kg e o baú, 5.400 kg. Determine (*a*) a força média nas rodas do cavalo mecânico, (*b*) a força média no engate entre o cavalo mecânico e o baú.

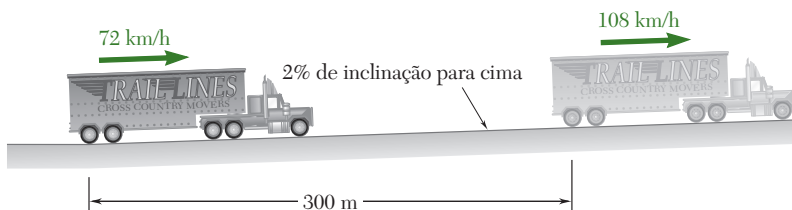



Figura *P13.18*

13.19 Dois blocos idênticos são liberados em repouso. Desprezando a massa das roldanas e o efeito do atrito, determine (*a*) a velocidade do bloco *B* depois deste ter movimentado 2 m, (*b*) a tração no cabo.

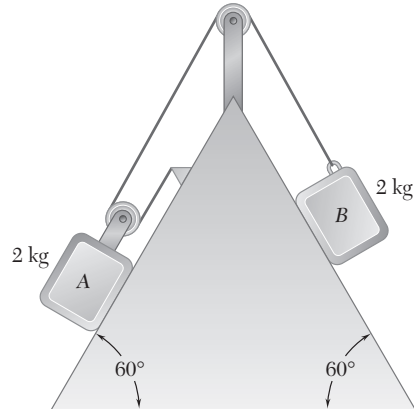



Figura *P13.19* e *P13.20*

13.20 Dois blocos idênticos são liberados em repouso. Desprezando a massa das roldanas e sabendo que os coeficientes de atrito estático e cinético são $\mu_s = 0{,}30$ e $\mu_k = 0{,}20$, determine (*a*) a velocidade do bloco *B* depois deste ter movimentado 2 m, (*b*) a tração no cabo.

13.21 O sistema mostrado na figura está em repouso quando uma força constante de 150 N é aplicada em um colar *B*. (*a*) Se a força atua por meio de todo movimento, determine a velocidade do colar *B* que atinge o suporte em *C*. (*b*) Depois de qual distância *d* a força de 150 N deveria ser retirada se o colar alcança o suporte *C* com velocidade nula?

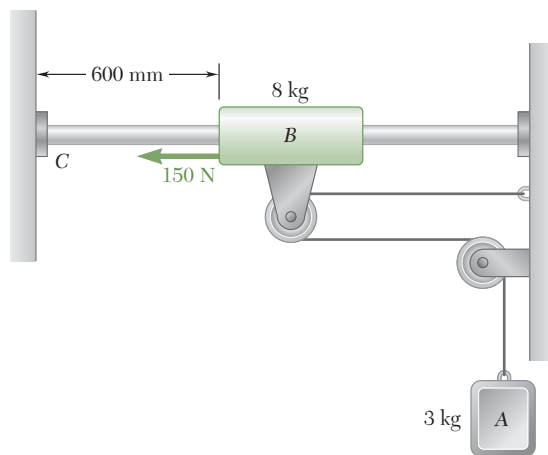



Figura P13.21

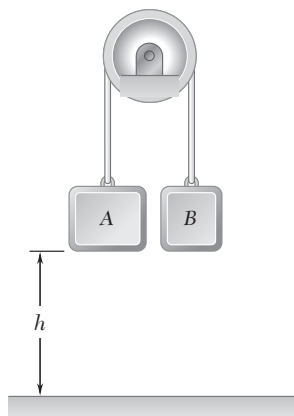



Figura P13.22

13.22 Os blocos *A* e *B* têm massas de 11 kg e 5 kg, respectivamente, e estão a uma altura $h = 2$ m acima do chão, quando o sistema é liberado do repouso. Exatamente antes de atingir o chão, o bloco *A* está se movendo com a velocidade de 3 m/s. Determine (*a*) a quantidade de energia dissipada no atrito das roldanas, (*b*) a tração em cada porção da corda durante o movimento.

13.23 O sistema mostrado na figura consiste de um colar A de 20 kg e um contrapeso B de 10 kg e está em repouso quando uma força constante de 450 N é aplicada ao colar A. (a) Determine a velocidade de A exatamente antes que ele atinja o suporte em C. (b) Resolva o item a considerando que o contrapeso B seja substituído por uma força de 100 N para baixo. Ignore o atrito e a massa das roldanas.

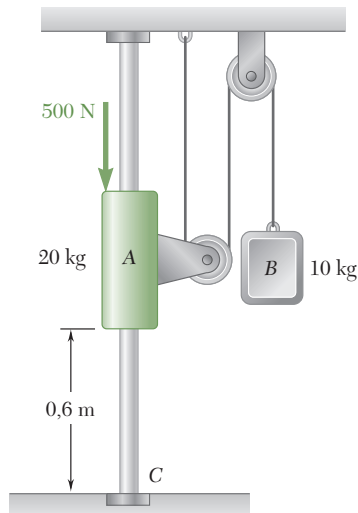



Figura P13.23

13.24 Quatro pacotes de 3 kg são mantidos no lugar por atrito sobre uma correia transportadora que está desengatada de seu motor de acionamento. Quando o sistema é liberado do repouso, o pacote *1* deixa a esteira em A justamente enquanto o pacote *4* vem para a parte inclinada da esteira em B. Determine (a) a velocidade do pacote *2* quando ele deixa a esteira em A, (b) a velocidade do pacote *3* quando ele deixa a esteira em A. Despreze a massa da esteira e dos roletes.

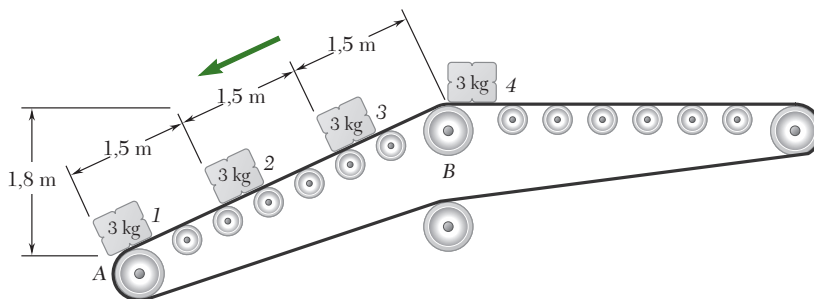



Figura P13.24

13.25 Dois blocos A e B, de massa de 4 kg e 5 kg, respectivamente, estão conectados por uma corda que passa pelas roldanas do modo mostrado na figura. Um colar C de 3 kg é colocado sobre o bloco A e o sistema é liberado do repouso. Depois que os blocos se deslocam 0,9 m, o colar C é removido e os blocos A e B continuam a se mover. Determine a velocidade do bloco A exatamente antes que ele bata no chão.

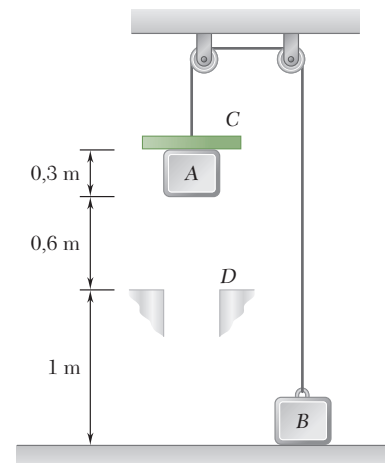



Figura P13.25

13.26 Um bloco de 5 kg é fixado a uma mola indeformada de constante $k = 2.100$ N/mm. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano são 0,60 e 0,40 respectivamente. Se a força **F** é lentamente aplicada no bloco até a tração na mola alcançar 100 N e então subitamente retirada, determine (*a*) a velocidade do bloco quando este volta a sua posição inicial, (*b*) a máxima velocidade alcançada pelo bloco.

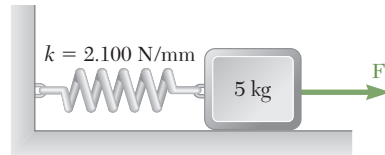



Figura P13.26 e P13.27

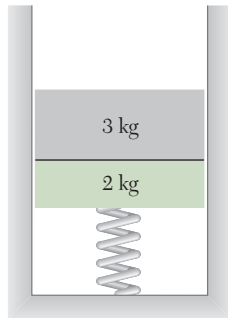



Figura *P13.28*

13.27 Um bloco de 5 kg é fixado a uma mola indeformada de constante $k = 2.100$ N/mm. Os coeficientes de atrito estático e cinético entre o bloco e o plano são 0,60 e 0,40, respectivamente. Se a força **F** é lentamente aplicada no bloco até a tração na mola alcançar 100 N e então subitamente retirada, determine (*a*) a que distância o bloco irá se mover para a esquerda antes de parar, (*b*) se o bloco irá então se mover para a direita.

13.28 Um bloco de 3 kg repousa sobre um bloco de 2 kg que está apoiado, mas não preso, a uma mola de constante 40 N/m. O bloco superior é subitamente removido. Determine (*a*) a velocidade máxima alcançada pelo bloco de 2 kg, (*b*) a altura máxima alcançada pelo bloco de 2 kg.

13.29 Resolva o Problema 13.28, considerando que o bloco de 2 kg esteja preso à mola.

13.30 Um colar *C* de 4 kg desliza sobre uma barra horizontal entre as molas *A* e *B*. Se o colar é empurrado para a direita até que a mola *B* seja comprimida 50 mm e em seguida liberada, determine a distância que o colar percorrerá, admitindo (*a*) que não haja atrito entre o colar e a barra, (*b*) um coeficiente de atrito $\mu_k = 0{,}35$.

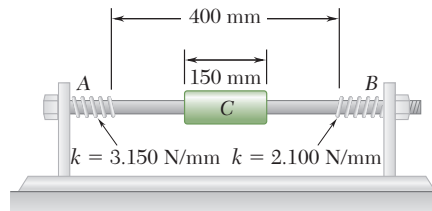



Figura *P13.30*

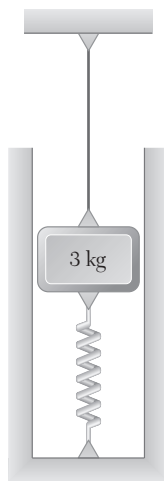



Figura P13.31

13.31 Um bloco de 3 kg está preso a um cabo e uma mola como mostrado na figura. A constante da mola é $k = 1.400$ N/mm e a tração no cabo é 15 N. Se o cabo é cortado, determine (*a*) o máximo deslocamento do bloco, (*b*) a máxima velocidade do bloco.

13.32 Um automóvel desgovernado deslocando-se a 100 km/h bate de frente com um sistema rodoviário de absorção de impacto (amortecedor) do tipo mostrado na figura, no qual o automóvel é levado ao repouso pelo esmagamento sucessivo de tambores de aço. A intensidade F da força necessária para esmagar os tambores é mostrada como uma função da distância x de deslocamento do automóvel dentro do amortecedor. Sabendo que a massa do automóvel é 1.100 kg e desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a distância que o automóvel percorrerá dentro do amortecedor antes de atingir o repouso e (*b*) a desaceleração máxima do automóvel.

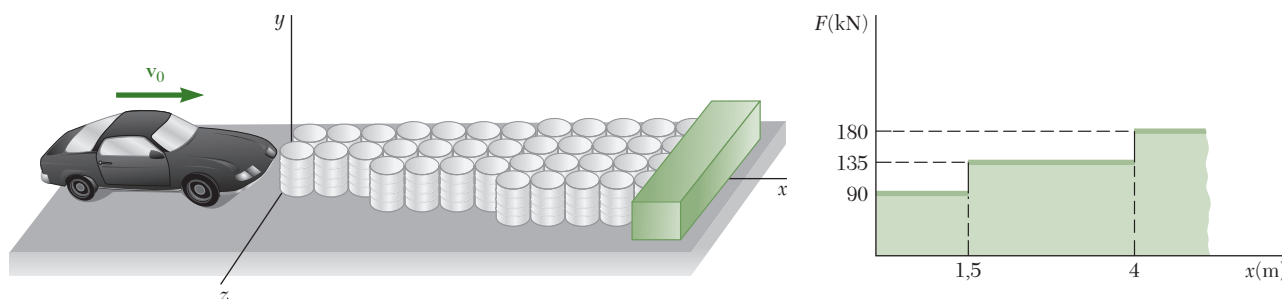



Figura P13.32

13.33 Um pistão de massa m e seção transversal de área A está em equilíbrio sob a pressão p no centro de um cilindro fechado em ambas as extremidades. Admitindo que o cilindro seja empurrado para a esquerda a uma distância $a/2$ e liberado, e sabendo que a pressão em cada lado do pistão varia inversamente com o volume, determine a velocidade do pistão quando ele alcançar novamente o centro do cilindro. Despreze o atrito entre o pistão e o cilindro e expresse sua resposta em termos de m, a, p e A.

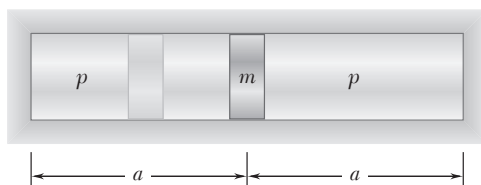



Figura P13.33

13.34 Expresse a aceleração da gravidade g_h a uma altitude h acima da superfície da Terra em termos da aceleração da gravidade g_0 na superfície da Terra, da altitude h e do raio R da Terra. Determine o erro percentual se o peso que um objeto possui sobre a superfície da Terra for usado como o seu peso a uma altitude de (*a*) 1 km e (*b*) 1.000 km.

13.35 Um foguete é lançado verticalmente da superfície da Lua com uma velocidade v_0. Deduza uma fórmula para a razão h_n/h_u das alturas alcançadas a uma velocidade v se a lei da gravitação de Newton for usada para calcular h_n e se um campo gravitacional uniforme for usado para calcular h_u. Expresse sua resposta em termos da aceleração da gravidade g_m sobre a superfície da Lua, do raio R_m da Lua e das velocidades v e v_0.

13.36 Uma bola de golfe golpeada na terra alcança uma altura máxima de 60 m e atinge o chão uma distância de 200 m. A que distância a mesma bola de golfe se desloca na Lua se a intensidade e direção de sua velocidade forem as mesmas que ela teria na Terra imediatamente depois de bola foi atingida? Considere que a bola é atingida e aterrissa com a mesma elevação em ambos os casos e que o efeito da atmosfera na Terra é negligenciado, de modo que a trajetória em ambos os casos é uma parábola. A aceleração da gravidade na Lua é 0,165 vezes daquela da Terra.

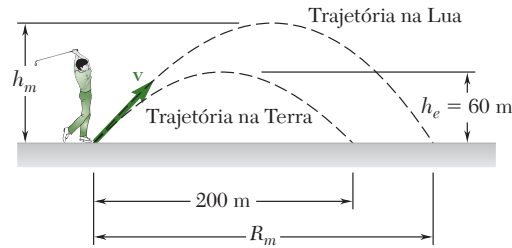



Figura P13.36

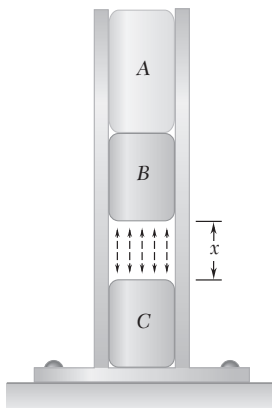



Figura *P13.37*

13.37 Um bloco de bronze *A* (não magnético) de 300 g e um ímã de aço *B* de 200 g estão em equilíbrio em um tubo de bronze sob a força magnética repulsiva de um outro ímã de aço *C* localizado a uma distância $x = 4$ mm de *B*. A força é inversamente proporcional ao quadrado da distância entre *B* e *C*. Se o bloco *A* for subitamente removido, determine (*a*) a velocidade máxima de *B* e (*b*) a aceleração máxima de *B*. Considere que a resistência do ar e o atrito sejam desprezíveis.

13.38 Molas não lineares são classificadas como duras ou macias, dependendo da curvatura de sua curva força-deflexão (ver a figura). Se um instrumento delicado, com massa de 5 kg, é colocado sobre uma mola de comprimento *l*, de modo a que sua base esteja apenas tocando a mola indeformada, sendo então liberado do repouso inadvertidamente, determine a máxima deflexão x_m da mola e a máxima força F_m exercida pela mola, considerando (*a*) mola linear de constante $k = 3$ kN/m, (*b*) mola dura, não linear, para a qual $F = (3 \text{ kN/m})(x + 160x^3)$.

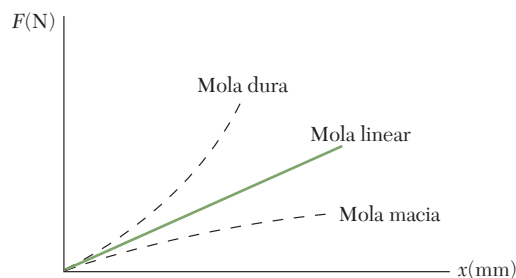
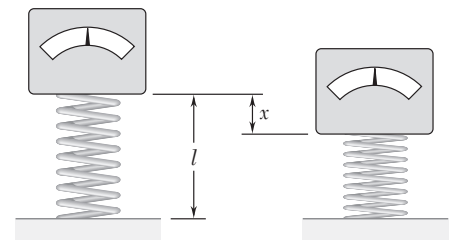



Figura P13.38

13.39 A esfera em A é empurrada para baixo com velocidade $\mathbf{v}_0$ e oscila em um círculo vertical de raio l e centro O. Determine a menor velocidade $\mathbf{v}_0$ para que a esfera atinja o ponto B oscilando em torno do ponto O (*a*) se AO for uma corda, (*b*) se AO for uma barra delgada de massa desprezível.

13.40 A esfera em A é empurrada para baixo com velocidade $\mathbf{v}_0$ de intensidade 5 m/s e oscila em um plano vertical na extremidade de uma corda de comprimento $l = 2$ m, presa a um apoio em O. Determine o ângulo θ no qual a corda irá romper-se, sabendo que ela pode resistir a uma tração máxima igual ao dobro do peso da esfera.

Figura P13.39 e P13.40

13.41 Um trecho da pista de uma montanha-russa consiste de dois arcos de círculo AB e CD unidos por um trecho reto BC. O raio de AB é 27 m e o raio de CD é 72 m. O carrinho e seus ocupantes, de massa total de 280 kg, alcançam o ponto A praticamente sem velocidade e então caem livremente ao longo da pista. Determine a força normal exercida pela pista sobre o carro quando este alcança o ponto B. Ignore as resistências do ar e de rolamento.

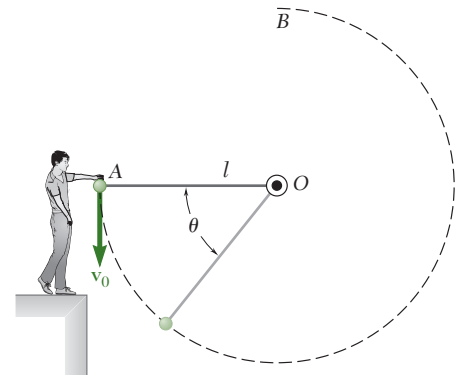
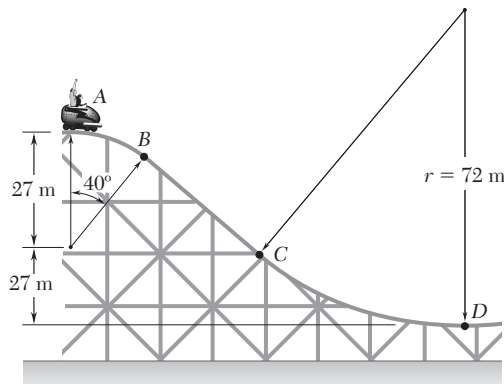



Figura 13.41 e P13.42

13.42 Um trecho da pista de uma montanha-russa consiste de dois arcos de círculo AB e CD unidos por um trecho reto BC. O raio de AB é 27 m e o raio de CD é 72 m. O carrinho e seus ocupantes, de massa total de 280 kg, alcançam o ponto A praticamente sem velocidade e então caem livremente ao longo da pista. Determine os valores máximo e mínimo da força normal exercida pela pista sobre o carro durante o percurso de A até D. Ignore as resistências do ar e de rolamento.

13.43 Uma pequena esfera B de massa m é liberada do repouso na posição mostrada na figura e oscila livremente em um plano vertical, primeiro em torno do ponto O e em seguida em torno do pino A, depois que a corda entra em contato com o pino. Determine a tração na corda (*a*) logo antes dela entrar em contato com o pino, (*b*) logo após dela entrar em contato com o pino.

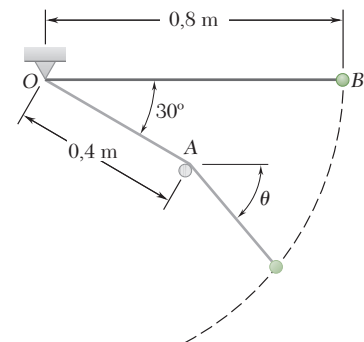



Figura *P13.43*

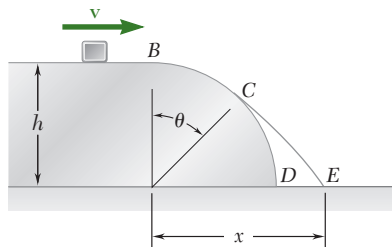



Figura P13.44 e *P13.45*

13.44 Um pequeno bloco desliza com uma velocidade $v = 2{,}4$ m/s sobre uma superfície horizontal a uma altura $h = 0{,}9$ m acima do chão. Determine (*a*) o ângulo θ em que ele deixará a superfície cilíndrica *BCD*, (*b*) a distância *x* em que ele baterá no chão. Despreze o atrito e a resistência do ar.

13.45 Um pequeno bloco desliza com uma velocidade v sobre uma superfície horizontal. Sabendo que $h = 2{,}5$ m, determine a velocidade necessária para que ele deixe a superfície cilíndrica *BCD* quando $\theta = 40°$. Despreze o atrito e a resistência do ar.

13.46 (*a*) Uma mulher de 60 kg pedala uma bicicleta de 8 kg subindo uma ladeira com 3% de inclinação, a uma velocidade constante de 1,5 m/s. Quanta potência precisa ser desenvolvida pela mulher? (*b*) Um homem de 90 kg em uma bicicleta de 9 kg começa a descer a mesma ladeira, mantendo com os freios uma velocidade constante de 6 m/s. Qual é a potência dissipada pelos freios? Ignore as resistências do ar e de rolamento.

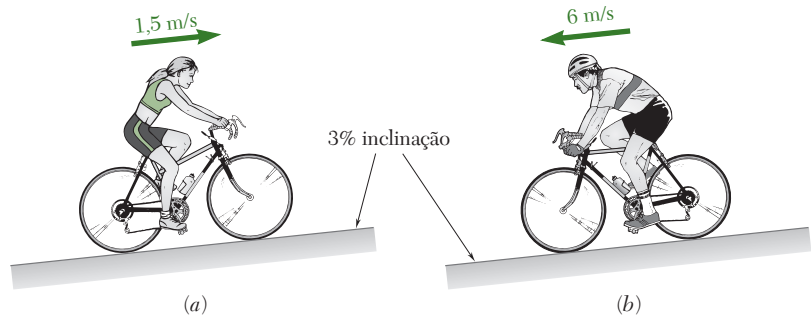



Figura P13.46

13.47 Uma fórmula para especificação de potência deve ser deduzida para os motores elétricos que acionam esteiras transportadoras que deslocam material sólido a diferentes taxas ao longo de alturas e distâncias diferentes. Representando por η a eficiência dos motores e desprezando a potência necessária para acionar a própria esteira, deduza uma fórmula para a potência *P* em kW em termos da vazão em massa *m* em kg/h, da altura *b* e da distância horizontal *l* em metros.

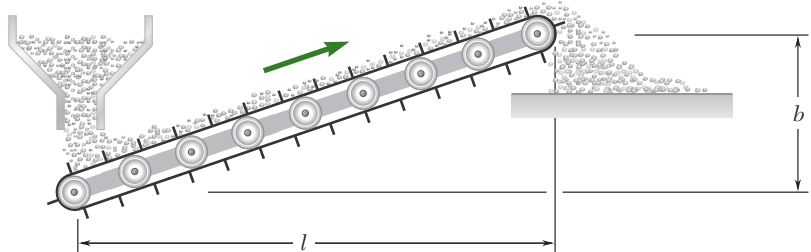



Figura *P13.47*

13.48 Um teleférico é projetado para transportar 900 esquiadores por hora da base A até o topo B. A massa média de cada esquiador é 80 kg e a velocidade média do teleférico é 1,25 m/s. Determine (*a*) a potência média necessária, (*b*) a capacidade necessária do motor se a eficiência mecânica é de 85% e se é permitida uma sobrecarga de 300%.

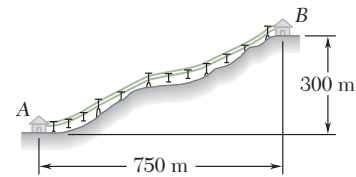



Figura P13.48

13.49 Em um automóvel de corrida de arrancadas, as rodas traseiras (de tração) de 1.000 kg do carro derrapam durante os primeiros 20 m e rolam com deslizamento iminente durante os 380 m restantes. As rodas dianteiras do carro perdem contato com o solo durante os 20 m iniciais e, no restante da corrida, 80% do peso do carro recaem sobre as rodas traseiras. Sabendo que os coeficientes de atrito $\mu_s = 0{,}90$ e $\mu_k = 0{,}68$, determine a potência desenvolvida pelo carro nas rodas motrizes (*a*) no final da porção de 20 m da corrida, (*b*) no final da corrida. Indique sua resposta em kW. Ignore o efeito da resistência do ar e atrito de rolamento.

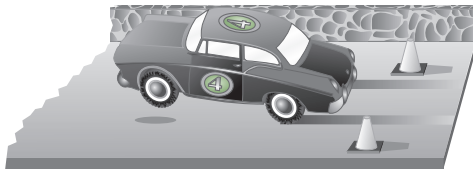



Figura P13.49

13.50 São necessários 15 s para erguer um carro de 1.200 kg e a plataforma de apoio de 300 kg de um elevador hidráulico de carros a uma altura de 2,8 m. Determine (*a*) a potência média de saída fornecida pela bomba hidráulica para erguer o sistema, (*b*) a potência elétrica média necessária, sabendo que a eficiência global de conversão de potência elétrica em mecânica do sistema é de 82%.

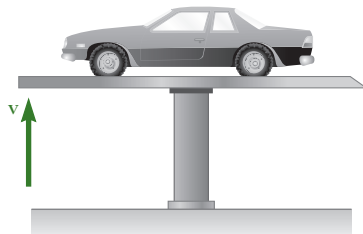
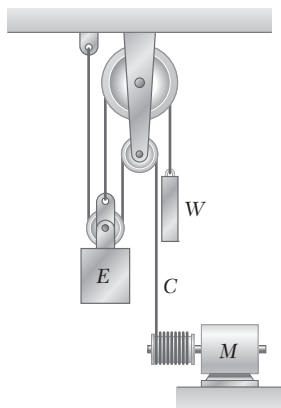



Figura P13.50

13.51 A velocidade do elevador hidráulico do Problema 13.50 cresce uniformemente de zero até seu valor máximo a meia altura em 7,5 s e então decresce uniformemente até zero em 7,5 s. Sabendo que a maior potência de saída da bomba hidráulica é de 6 kW quando sua velocidade é máxima, determine a força máxima de elevação fornecida pela bomba.

13.52 Um trem de 100.000 kg viaja em uma linha horizontal necessitando de 300 kW para manter constante a velocidade de 80 km/h. Determine (*a*) a força total necessária para vencer o atrito no eixo das rodas, na resistência ao rolamento e na resistência do ar, (*b*) a potência adicional necessária se o trem manter a mesma velocidade subindo uma inclinação de 1%.

13.53 A resistência ao atrito de um navio é conhecida por variar diretamente com 1,75 da capacidade da velocidade v do navio. Um único rebocador a toda potência pode rebocar um navio a uma velocidade constante de 4,5 km/h exercendo uma força constante de 300 kN. Determine (*a*) a potência desenvolvida pelo rebocador, (*b*) a máxima velocidade na qual dois rebocadores, capazes de entregar a mesma potência, podem rebocar o navio.

Figura P13.54

13.54 O elevador E tem uma massa de 3.000 kg quando totalmente carregado e está ligado pelo modo mostrado na figura, a um contrapeso W de massa 1.000 kg. Determine a potência em kW entregue pelo motor (*a*) quando o elevador estiver movendo-se para baixo a uma velocidade constante de 3 m/s e (*b*) quando ele tiver uma velocidade de 3 m/s para cima e uma desaceleração de 0,5 m/s^2.

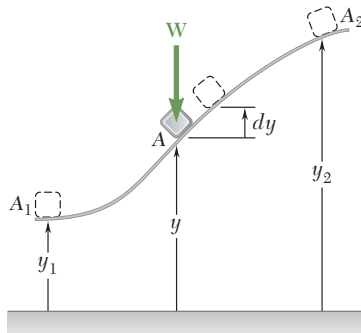
13.6 Energia potencial*

Vamos considerar novamente um corpo de peso **W** que se move ao longo de uma trajetória curva de um ponto A_1 de elevação y_1 até um ponto A_2 de elevação y_2 (Fig. 13.4). Recordemos da Seção 13.2 que o trabalho da força da gravidade **W** durante esse deslocamento é

$$U_{1\rightarrow 2} = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

Figura 13.4 (repetida)

O trabalho de **W** pode então ser obtido subtraindo-se o valor da função Wy correspondente à segunda posição do corpo do seu valor correspondente à primeira posição. O trabalho de **W** é independente da trajetória real percorrida; ele depende apenas dos valores inicial e final da função Wy. Essa função é denominada *energia potencial* do corpo em relação à *força da gravidade* **W** e é representada por V_g. Escrevemos

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_g)_1 - (V_g)_2 \qquad \text{com } V_g = Wy \tag{13.16}$$

Notemos que se $(V_g)_2 > (V_g)_1$, isto é, *se a energia potencial aumenta durante o deslocamento* (como no caso aqui considerado), *o trabalho* $U_{1\rightarrow 2}$ *é negativo.* Se, por outro lado, o trabalho de **W** é positivo, a energia potencial diminui. Logo, a energia potencial V_g do corpo fornece uma medida do trabalho que pode ser realizado pelo seu peso **W**. Uma vez que apenas a *variação* da energia potencial e não o valor real de V_g está envolvido na Eq. (13.6), uma constante arbitrária pode ser adicionada à expressão obtida para V_g. Em outras palavras, o nível de referência a partir do qual a elevação y é medida pode ser escolhido arbitrariamente. Observe que a energia potencial é expressa nas mesmas unidades que o trabalho, isto é, em joules.

* Parte do material desta seção já foi analisada na *Seção 10.7*.

Deve-se notar que a expressão que acabamos de obter para a energia potencial de um corpo em relação à gravidade é válida apenas enquanto o peso **W** do corpo puder ser considerado constante, ou seja, enquanto os deslocamentos do corpo forem pequenos em comparação com o raio da Terra. No caso de um veículo espacial, porém, devemos levar em conta a variação da força da gravidade com a distância r do centro da Terra. Usando a expressão obtida na Seção 13.2 para o trabalho de uma força gravitacional, escrevemos (Fig. 13.6)

$$U_{1\rightarrow 2} = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \tag{13.7}$$

Figura 13.6 (repetida)

Logo, o trabalho da força da gravidade pode ser obtido subtraindo-se o valor da função $-GMm/r$ correspondente à segunda posição do corpo do seu valor correspondente à primeira posição. Assim, a expressão que deve ser usada para a energia potencial V_g quando a variação da força da gravidade não puder ser desprezada é

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \tag{13.17}$$

Considerando a primeira das relações (*12.29*), escrevemos V_g de forma alternativa

$$V_g = -\frac{WR^2}{r} \tag{13.17′}$$

onde R é o raio da Terra e W é o valor do peso do corpo sobre a superfície da Terra. Quando qualquer das relações (13.17) ou (13.17′) for usada para expressar V_g, a distância r deverá ser medida, obviamente, a partir do centro da Terra.* Note que V_g é sempre negativa e tende a zero para valores muito grandes de r.

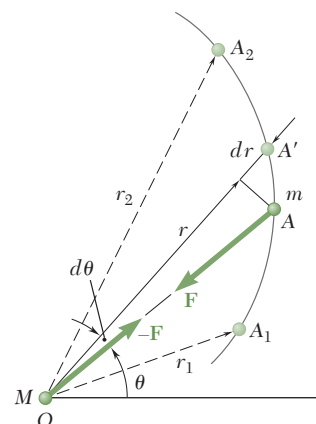
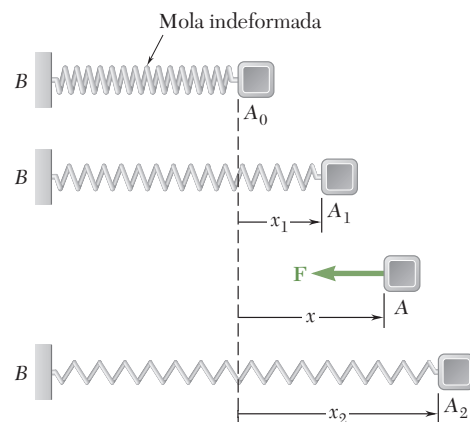
Considere agora um corpo preso a uma mola e movendo-se de uma posição A_1, correspondente a uma deflexão x_1 da mola, até uma posição A_2, correspondente a uma deflexão x_2 da mola (Fig. 13.5). Relembremos da Seção 13.2 que o trabalho realizado pela força **F** exercida pela mola sobre o corpo é

$$U_{1\rightarrow 2} = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \tag{13.6}$$

Figura 13.5 (repetida)

O trabalho da força elástica é então obtido subtraindo-se o valor da função $\frac{1}{2}kx^2$, correspondente à segunda posição do corpo, do seu valor correspondente à primeira posição. Essa função é representada por V_e e é denominada *energia potencial* do corpo em relação à *força elástica* **F**. Escrevemos

$$U_{1\rightarrow 2} = (V_e)_1 - (V_e)_2 \qquad \text{com } V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{13.18}$$

e observamos que, durante o deslocamento considerado, o trabalho da força **F** exercido pela mola sobre o corpo é negativo e que a energia potencial V_e aumenta. Você deve notar que a expressão obtida para V_e é

* As expressões dadas para V_g em (*13.17*) e (*13.17′*) são válidas apenas quando $r \geq R$, isto é, quando o corpo considerado estiver acima da superfície da Terra.

válida apenas se a deflexão da mola for medida em relação à sua posição indeformada. Por outro lado, a Eq. (13.18) pode ser usada mesmo quando a mola foi girada em torno de sua extremidade fixa (Fig. 13.10*a*). O trabalho da força elástica depende somente das deflexões inicial e final da mola (Fig. 13.10*b*).

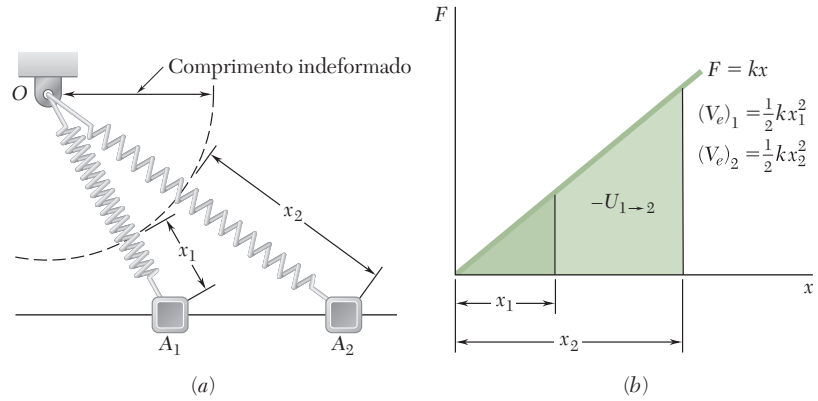



Figura 13.10

O conceito de energia potencial pode ser usado para outras forças envolvidas além das forças gravitacionais e elásticas. De fato, ele permanece válido sempre que o trabalho da força considerado for independente da trajetória percorrida pelo seu ponto de aplicação à medida que esse ponto se desloca de uma dada posição A_1 para uma dada posição A_2. Tais forças são denominadas *forças conservativas;* as propriedades gerais das forças conservativas são estudadas na seção seguinte.

*13.7 Forças conservativas

Figura 13.11

Conforme indicado na seção anterior, a força **F** que age sobre uma partícula *A* é dita conservativa *se o seu trabalho* $U_{1\to 2}$ *é independente da trajetória percorrida pela partícula A à medida que ela se desloca de* A_1 *até* A_2 (Fig. 13.11*a*). Podemos então escrever

$$U_{1\to 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \tag{13.19}$$

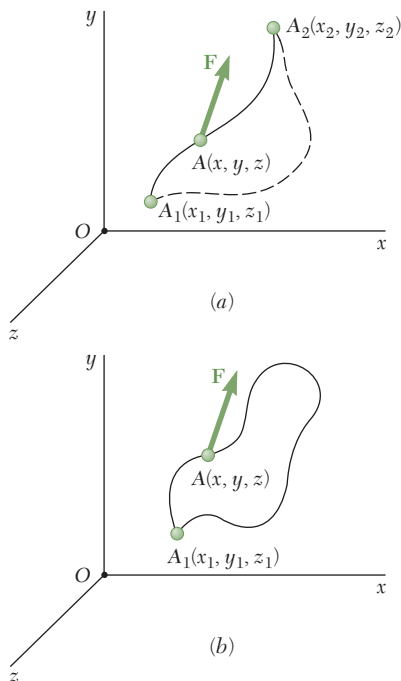
ou, de modo resumido

$$U_{1\to 2} = V_1 - V_2 \tag{13.19'}$$

A função $V(x, y, z)$ é denominada energia potencial, *ou função potencial,* de **F**.

Notemos que se A_2 é escolhida de modo a coincidir com A_1, isto é, se a partícula descreve uma trajetória fechada (Fig. 13.11*b*), temos $V_1 = V_2$ e o trabalho é nulo. Logo, para qualquer força conservativa **F**, podemos escrever

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{13.20}$$

onde o círculo no sinal de integral indica que a trajetória é fechada.

Vamos aplicar agora a Eq. (13.19) entre dois pontos próximos $A\ (x, y, z)$ e $A'(x + dx, y + dy, z + dz)$. O trabalho elementar dU correspondente ao deslocamento $d\mathbf{r}$ de A até A' é

$$dU = V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz)$$

ou

$$dU = -dV(x, y, z) \tag{13.21}$$

Logo, o trabalho elementar de uma força conservativa é um *diferencial exato*.

Substituindo a expressão obtida para dU da Eq. (13.1″) na Eq. (13.21) e relembrando a definição de diferencial de uma função de várias variáveis, escrevemos

$$F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right)$$

da qual resulta que

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{13.22}$$

Fica claro que os componentes de $\mathbf{F}$ devem ser funções das coordenadas x, y, z. Assim, uma condição *necessária* para que uma força seja conservativa é que ela dependa apenas do seu ponto de aplicação. As relações (13.22) podem ser expressas de modo mais conciso se escrevermos

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k}\right)$$

O vetor entre parênteses é conhecido como a gradiente *de uma função escalar* V e é representado por **grad** V. Para qualquer força conservativa, escrevemos então

$$\mathbf{F} = -\mathbf{grad}\ V \tag{13.23}$$

As relações de (13.19) até (13.23) mostraram ser satisfeitas para qualquer força conservativa. É também possível mostrar que, se uma força $\mathbf{F}$ satisfaz uma dessas relações, $\mathbf{F}$ deve ser uma força conservativa.

13.8 Conservação da energia

Vimos nas duas seções anteriores que o trabalho de uma força conservativa, tal como o peso de uma partícula ou a força exercida por uma mola, pode ser expresso como uma variação da energia potencial. Quando a partícula se deslocar sob a ação de forças conservativas, o princípio de trabalho e energia estabelecido na Seção 13.3 pode ser expresso de uma forma modificada. Substituindo $U_{1\rightarrow 2}$ da Eq. (13.19′) na Eq. (13.10), escrevemos

$$V_1 - V_2 = T_2 - T_1$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.24}$$

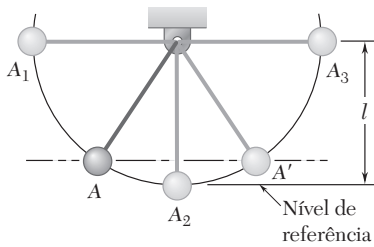



Figura 13.12

A equação (13.24) indica que, quando uma partícula se desloca sob a ação de forças conservativas, *a soma da energia cinética e da energia potencial da partícula permanece constante.* A soma $T + V$ é denominada *energia mecânica total* da partícula e é representada por E.

Considere, por exemplo, o pêndulo analisado na Seção 13.4, que é liberado com velocidade nula em A_1 para oscilar em um plano vertical (Fig. 13.12). Medindo a energia potencial em relação ao nível de A_2, temos, em A_1

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = Wl \qquad T_1 + V_1 = Wl$$

Relembrando que em A_2 a velocidade do pêndulo é $v_2 = \sqrt{2gl}$, temos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(2gl) = Wl \qquad V_2 = 0$$
$$T_2 + V_2 = Wl$$

Verificamos assim que a energia mecânica total $E = T + V$ do pêndulo é a mesma em A_1 e em A_2. Enquanto a energia é inteiramente potencial em A_1, ela torna-se inteiramente cinética em A_2 e, à medida que o pêndulo permanece oscilando para a direita, a energia cinética é transformada em energia potencial de novo. Em A_3, $T_3 = 0$ e $V_3 = Wl$.

Como a energia mecânica total do pêndulo permanece constante e como sua energia potencial depende apenas de sua elevação, a energia cinética do pêndulo terá o mesmo valor em dois pontos quaisquer localizados no mesmo nível. Logo, a velocidade do pêndulo é a mesma em A e em A' (Fig. 13.12). Esse resultado pode ser estendido ao caso de uma partícula que se move ao longo de uma trajetória dada qualquer, independentemente de sua forma, desde que as únicas forças que atuem sobre a partícula sejam o seu peso e a reação normal da trajetória. A partícula da Fig. 13.13, por exemplo, que desliza em um plano vertical ao longo de uma pista sem atrito, terá a mesma velocidade em A, A' e A''.

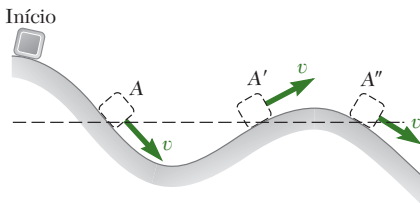



Figura 13.13

Enquanto o peso de uma partícula e a força exercida por uma mola são forças conservativas, *as forças de atrito são forças não conservativas.* Em outras palavras, *o trabalho de uma força de atrito não pode ser expresso como uma variação de energia potencial.* O trabalho de uma força de atrito depende da trajetória percorrida pelo seu ponto de aplicação; e, enquanto o trabalho $U_{1\to2}$ definido por (13.19) é positivo ou negativo de acordo com o sentido do movimento, *o trabalho de uma força de atrito é sempre negativo,* como discutimos na Seção 13.4. Logo, conclui-se que a energia mecânica total de um sistema mecânico que envolve atrito não permanece constante, mas diminui. A energia do sistema, porém, não é perdida; ela é transformada em calor, e a soma da *energia mecânica* e da *energia térmica* do sistema permanece constante.

Outras formas de energia também podem estar envolvidas em um sistema. Por exemplo, um gerador converte energia mecânica em *energia elétrica;* um motor à gasolina converte *energia química* em energia mecânica; um reator nuclear converte *massa* em energia térmica. Se todas as formas de energia forem levadas em conta, a energia do sistema pode ser considerada como constante e o princípio de conservação da energia permanece válido sob todas as condições.

13.9 Movimento sob uma força central conservativa. Aplicação à mecânica espacial

Vimos na Seção 12.9 que quando uma partícula P move-se sob uma força central $\mathbf{F}$, a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ da partícula em relação ao centro da força O é constante. Se a força $\mathbf{F}$ também é conservativa, existe uma energia potencial V associada a $\mathbf{F}$, e a energia total $E = T + V$ da partícula é constante (Seção 13.8). Assim, quando uma partícula se move sob uma força central conservativa, tanto o princípio de conservação da quantidade de movimento angular como o princípio da conservação da energia podem ser usados para estudar seu movimento.

Considere, por exemplo, um veículo espacial de massa m movendo-se sob a força gravitacional da Terra. Vamos admitir que ele inicie seu voo livre no ponto P_0 a uma distância r_0 do centro da Terra, com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ que faz um ângulo ϕ_0 com o raio vetor OP_0 (Fig. 13.14). Sendo P um ponto da trajetória descrita pelo veículo, representamos por r a distância de O a P, por $\mathbf{v}$ a velocidade do veículo em P e por ϕ o ângulo entre $\mathbf{v}$ e o raio vetor OP. Aplicando o princípio de conservação da quantidade de movimento angular em relação a O entre P_0 e P (Seção 12.9), escrevemos

$$r_0 m v_0 \text{ sen } \phi_0 = rmv \text{ sen } \phi \tag{13.25}$$

Figura 13.14

Retomando a expressão (13.17) obtida para a energia potencial devida a uma força gravitacional, aplicamos o princípio de conservação da energia entre P_0 e P e escrevemos

$$T_0 + V_0 = T + V$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.26}$$

onde M é a massa da Terra.

A Eq. (13.26) pode ser resolvida para a intensidade v; da velocidade do veículo em P quando a distância r de O a P é conhecida; a Eq. (13.25) pode, então, ser visada para determinar o ângulo ϕ que o vetor velocidade faz com o raio vetor OP.

As Eqs. (13.25) e (13.26) também podem ser usadas para determinar os valores máximo e mínimo de r no caso de um satélite lançado de P_0 em uma direção que forma um ângulo ϕ_0 com a vertical OP_0 (Fig. 13.15). Os valores desejados de r são obtidos fazendo com que $\phi = 90°$ em (13.25) e eliminando v entre as Eqs. (13.25) e (13.26).

Deve-se observar que a aplicação dos princípios de conservação da energia e de conservação da quantidade de movimento angular conduz a uma formulação dos problemas de mecânica espacial mais fundamental que a do método indicado na Seção 12.12. Em todos os casos que envolvem lançamentos oblíquos, ela também resultará em cálculos bem mais simples. E, embora o método da Seção 12.12 deva ser usado quando a trajetória real ou o período orbital de um veículo espacial tiverem que ser calculados, os cálculos serão simplificados se os princípios de conservação forem antes aplicados ao cálculo dos valores máximo e mínimo do raio vetor r.

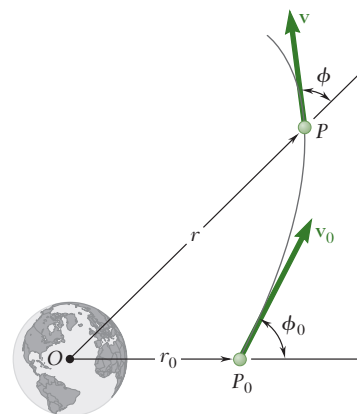
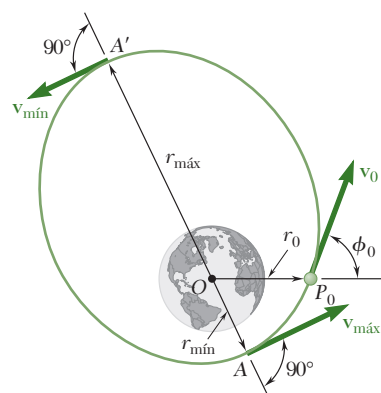
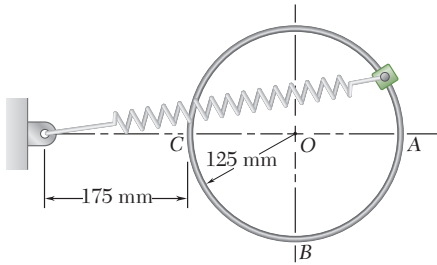



Figura 13.15

PROBLEMA RESOLVIDO 13.6

Um colar de 1,5 kg está preso a uma mola e desliza sem atrito ao longo de uma haste circular em um plano horizontal. A mola tem um comprimento indeformado de 150 mm e uma constante k = 400 N/m. Sabendo que o colar está em equilíbrio em A e recebe um leve impulso para mover-se, determine a velocidade do colar (*a*) quando passa por B, (*b*) quando passa por C.

SOLUÇÃO

a. Velocidade em B

$$v_A = 0 \quad T_A = 0$$

$$\Delta L_{AD} = L_{AD} - L_O$$

$$\Delta L_{AD} = 425 \text{ mm} - 150 \text{ mm}$$

$$\Delta L_{AD} = 275 \text{ mm} = 0{,}275 \text{ m}$$

$$V_A = \frac{1}{2}k(\Delta L_{AD})^2$$

$$V_A = \frac{1}{2}(400 \text{ N/m})(0{,}275 \text{ m})^2 = 15{,}125 \text{ J}$$

$$T_B = \frac{1}{2}mv_B^2 = \left(\frac{1{,}5}{2}\text{kg}\right)\left(v_B^2\right) = (0{,}75)v_B^2$$

$$L_{BD} = (300^2 \text{ mm} + 125^2 \text{ mm})^{1/2} = 325 \text{ mm}$$

$$\Delta_{BD} = L_{BD} - L_O = (325 \text{ mm} - 150 \text{ mm}) = 175 \text{ mm} = 0{,}175 \text{ m}$$

$$V_B = \frac{1}{2}k(\Delta_{BD})^2 = \frac{1}{2}(400 \text{ N/m})(0{,}175 \text{ m})^2 = 6{,}125 \text{ J}$$

$$T_A + V_A = T_B + V_B \quad 0 + 15{,}125 = 0{,}75v_B^2 + 6{,}125$$

$$v_B = \frac{(15{,}125 - 6{,}125)}{(0{,}75)} = 12{,}00 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

v_B = 3,46 m/s ◄

b. Velocidade em C

$$T_A = 0 \qquad V_A = 15{,}125 \text{ J [see Part } (a)]$$

$$T_C = \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}(1{,}5 \text{ kg})v_C^2 = 0{,}75\, v_C^2$$

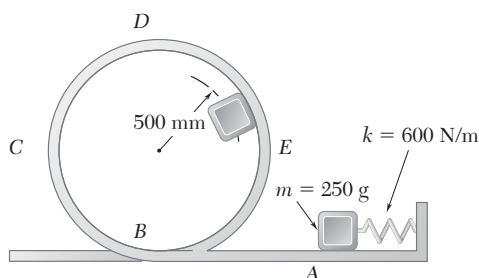
$$\Delta L_{OC} = L_O - L_{OC} = (150 \text{ mm} - 175 \text{ m}) = -25 \text{ mm}$$

$$V_C = \frac{1}{2}k(\Delta L_{OC})^2 = \frac{1}{2}(400 \text{ N/m})(-0{,}025 \text{ m})^2 = 0{,}125 \text{ J}$$

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

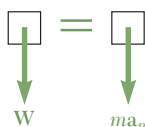
$$0 + 15{,}125 = 0{,}75v_C^2 + 0{,}125$$

$$v_C^2 = 15/0{,}75 = 20$$

v_C = 4,47 m/s ◄

PROBLEMA RESOLVIDO 13.7

Um bloco de 250 g é empurrado contra a mola em A e liberado do repouso. Desprezando o atrito, determine a menor deflexão da mola para que o bloco dê a volta em torno do laço $ABCDE$ e permaneça o tempo todo em contato com ele.

SOLUÇÃO

Velocidade requerida no ponto *D*. Quando o bloco passar pelo ponto D, mais alto, sua energia potencial em relação à gravidade será máxima, e, portanto, sua energia cinética e velocidade serão mínimas. Como o bloco deve permanecer em contato com o laço, a força **N** exercida pelo laço sobre o bloco deve ser igual ou maior que zero. Fazendo **N** = 0, calculamos a menor velocidade possível v_D.

$$+\downarrow \Sigma F_n = ma_n: \quad W = ma_n \quad mg = ma_n \quad a_n = g$$

$$a_n = \frac{v_D^2}{r}: \qquad v_D^2 = ra_n = rg = (0{,}5\text{ m})(9{,}81\text{ m/s}^2) = 4{,}905\text{ m}^2/\text{s}^2$$

Posição 1. ***Energia potencial.*** Representando por x a deflexão da mola e notando que k = 600 N/m, escrevemos

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 = \tfrac{1}{2}(600\text{ N/m})x^2 = 300x^2$$

Escolhendo o nível de referência em A, temos $V_g = 0$; logo

$$V_1 = V_e + V_g = 300x^2$$

Energia cinética. Como o bloco é liberado do repouso, $v_A = 0$ e temos $T_1 = 0$.

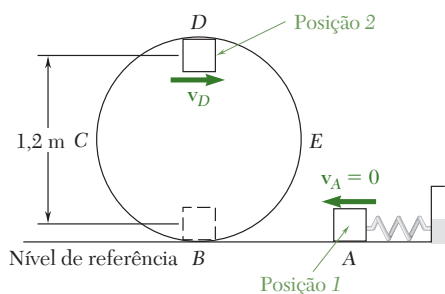
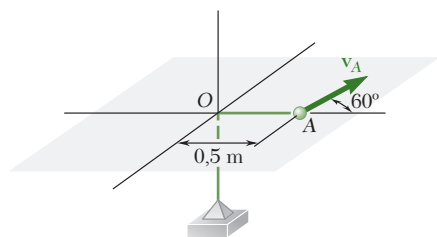
Posição 2. ***Energia potencial.*** Agora a mola está indeformada; logo, $V_e = 0$. Como o bloco está a 1 m acima do nível de referência, temos

$$V_g = mgy = (0{,}25\text{ kg})\,(9{,}81\text{ m/s}^2)\,(1\text{ m}) = 2{,}45\text{ J}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 2{,}45\text{ J}$$

Energia cinética. Usando o valor de v_D^2 obtido acima, escrevemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2} \times (0{,}25\text{ kg})\,(4{,}905\text{ m}^2/\text{s}^2) = 0{,}613\text{ J}$$

Conservação da energia. Aplicando o princípio de conservação da energia entre as posições *1* e *2*, escrevemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 300x^2 = 2{,}45\text{ J} + 0{,}613\text{ J}$$
$$x = 0{,}101\text{ m} \qquad x = 101\text{ m} \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.8

Uma esfera de massa $m = 0{,}6$ kg está presa a uma corda elástica de constante $k = 100$ N/m, que está indeformada quando a esfera encontra-se na origem O. Sabendo que a esfera pode deslizar sem atrito sobre a superfície horizontal e que na posição mostrada na figura sua velocidade $\mathbf{v}_A$ tem intensidade de 20 m/s, determine (a) as distâncias máxima e mínima da esfera em relação à origem O e (b) os valores correspondentes de sua velocidade.

SOLUÇÃO

A força exercida pela corda sobre a esfera passa pelo ponto fixo O e seu trabalho pode ser expresso como uma variação de energia potencial. Logo, trata-se de uma força central conservativa, e tanto a energia total da esfera como sua quantidade de movimento angular em relação a O são conservadas.

Conservação da quantidade de movimento angular em relação a O. No ponto B, onde a distância de O é máxima, a velocidade da esfera é perpendicular a OB e a quantidade de movimento angular é $r_m m v_m$. Uma propriedade similar vale no ponto C, onde a distância de O é mínima. Expressando a conservação de quantidade de movimento angular entre A e B, escrevemos

$$r_A m v_A \text{ sen } 60° = r_m m v_m$$
$$(0{,}5 \text{ m})(0{,}6 \text{ kg})(20 \text{ m/s}) \text{ sen } 60° = r_m (0{,}6 \text{ kg}) v_m$$
$$v_m = \frac{8{,}66}{r_m} \quad (1)$$

Conservação da energia

No ponto A: $T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2}(0{,}6 \text{ kg})(20 \text{ m/s})^2 = 120 \text{ J}$
$V_A = \frac{1}{2} k r_A^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m})(0{,}5 \text{ m})^2 = 12{,}5 \text{ J}$

No ponto B: $T_B = \frac{1}{2} m v_m^2 = \frac{1}{2}(0{,}6 \text{ kg}) v_m^2 = 0{,}3 v_m^2$
$V_B = \frac{1}{2} k r_m^2 = \frac{1}{2}(100 \text{ N/m}) r_m^2 = 50\, r_m^2$

Aplicando o princípio de conservação da energia entre os pontos A e B, escrevemos

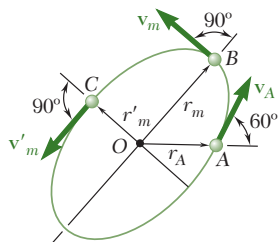
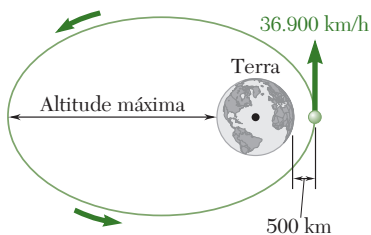
$$T_A + V_A = T_B + V_B$$
$$120 + 12{,}5 = 0{,}3 v_m^2 + 50 r_m^2 \quad (2)$$

a. Valores máximo e mínimo de distância. Substituindo v_m da Eq. (1) na Eq. (2) e resolvendo para r_m^2, obtemos

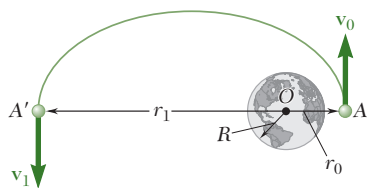
$$r_m^2 = 2{,}468 \text{ ou } 0{,}1824 \qquad r_m = 1{,}571 \text{ m}, \; r'_m = 0{,}427 \text{ m} \blacktriangleleft$$

b. Valores correspondentes de velocidade. Substituindo os valores obtidos para r_m e r'_m na Eq. (1), temos

$$v_m = \frac{8{,}66}{1{,}571} \qquad v_m = 5{,}51 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$
$$v'_m = \frac{8{,}66}{0{,}427} \qquad v'_m = 20{,}3 \text{ m/s} \blacktriangleleft$$

Nota. Pode-se mostrar que a trajetória da esfera é uma elipse de *centro O*.

PROBLEMA RESOLVIDO 13.9

Um satélite é lançado em uma direção paralela à superfície da Terra com uma velocidade de 36.900 km/h de uma altitude de 500 km. Determine (*a*) a altitude máxima alcançada pelo satélite e (*b*) o erro máximo admissível na direção de lançamento do satélite para que ele entre em órbita e não se aproxime em até 200 km da superfície da Terra.

SOLUÇÃO

a. Altitude máxima. Representamos por A' o ponto da órbita mais afastado da Terra e por r_1 a distância correspondente do centro da Terra. Como o satélite está em voo livre entre A e A', aplicamos o princípio de conservação da energia:

$$T_A + V_A = T_{A'} + V_{A'}$$

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} \qquad (1)$$

Como a única força que age sobre o satélite é a força da gravidade, que é uma força central, a quantidade de movimento angular do satélite em relação a O é conservada. Considerando os pontos A e A', escrevemos

$$r_0 m v_0 = r_1 m v_1 \qquad v_1 = v_0 \frac{r_0}{r_1} \qquad (2)$$

Substituindo essa expressão para v_1 na Eq. (1), dividindo cada termo pela massa m e reordenando os termos, obtemos

$$\tfrac{1}{2}v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{r_1^2}\right) = \frac{GM}{r_0}\left(1 - \frac{r_0}{r_1}\right) \qquad 1 + \frac{r_0}{r_1} = \frac{2GM}{r_0 v_0^2} \qquad (3)$$

Relembrando que o raio da Terra é $R = 6.370$ km, calculamos

$$r_0 = 6.370 \text{ km} + 500 \text{ km} = 6.870 \text{ km} = 6{,}87 \times 10^6 \text{ m}$$
$$v_0 = 36.900 \text{ km/h} = (36{,}9 \times 10^6 \text{ m})/(3{,}6 \times 10^3 \text{ s}) = 10{,}25 \times 10^3 \text{ m/s}$$
$$GM = gR^2 = (9{,}81 \text{ m/s}^2)(6{,}37 \times 10^6 \text{ m})^2 = 398 \times 10^{12} \text{ m}^3/\text{s}^2$$

Substituindo esses valores em (3), obtemos $r_1 = 66{,}8 \times 10^6$ m.

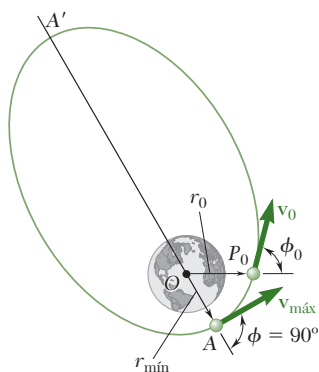
Altitude máxima $= 66{,}8 \times 10^6 \text{ m} - 6{,}37 \times 10^6 \text{ m} = 60{,}4 \times 10^6 \text{ m} =$
60.400 km ◀

b. Erro admissível na direção de lançamento. O satélite é lançado de P_0 em uma direção que faz um ângulo ϕ_0 com a vertical OP_0. O valor de ϕ_0 correspondente a $r_{mín} = 6.370 \text{ km} + 200 \text{ km} = 6.570$ km é obtido pela aplicação dos princípios de conservação da energia e de conservação da quantidade de movimento angular entre P_0 e A:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2}mv_{máx}^2 - \frac{GMm}{r_{mín}} \qquad (4)$$

$$r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = r_{mín.} m v_{máx.} \qquad (5)$$

Resolvendo (5) para $v_{máx.}$ e então substituindo $v_{máx.}$ na Eq. (4), podemos resolver (4) para sen ϕ_0. Usando os valores de v_0 e GM calculados no item *a* e observando que $r_0/r_{mín.} = 6.870/6.570 = 1{,}0457$, encontramos

sen $\phi_0 = 0{,}9801$ $\qquad$ $\phi_0 = 90° \pm 11{,}5°$ $\qquad$ Erro admissível $= \pm 11{,}5°$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção você aprendeu que, quando o trabalho realizado por uma força **F** que age sobre uma partícula *A é independente da trajetória percorrida pela partícula* quando ela se move de uma posição dada A_1 para uma posição dada A_2 (Fig. 13.11*a*), então é possível definir uma função V, denominada *energia potencial,* para a força **F**. Tais forças são designadas como *forças conservativas* e você pode escrever

$$U_{1\rightarrow 2} = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2) \tag{13.19}$$

ou, de modo resumido,

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \tag{13.19'}$$

Note que o trabalho é negativo quando a variação da energia potencial é positiva, isto é, quando $V_2 > V_1$.

Substituindo a expressão acima na equação para trabalho e energia, você pode escrever

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.24}$$

que mostra que, quando uma partícula se desloca sob a ação de uma força conservativa, *a soma das energias cinética e potencial da partícula permanece constante.*

Sua resolução de problemas ao usar a fórmula acima consistirá dos seguintes passos.

1. **Determinar se todas as forças envolvidas são conservativas.** Se alguma força não for conservativa, como, por exemplo, se o atrito estiver envolvido, você deverá empregar o método de trabalho e energia da lição anterior, pois o trabalho realizado por tais forças depende da trajetória percorrida pela partícula, não existindo uma função potencial. Se não houver atrito e se todas as forças forem conservativas, você poderá prosseguir como indicado.

2. **Determinar a energia cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$ em cada extremidade da trajetória.**

3. Calcular a energia potencial de todas as forças envolvidas em cada extremidade da trajetória. Você relembrará que as seguintes expressões para a energia potencial foram deduzidas nesta lição.

a. A energia potencial de um peso W próximo à superfície da Terra e a uma altura y acima de um dado nível de referência,

$$V_g = Wy \tag{13.16}$$

b. A energia potencial de uma massa *m* localizada a uma distância *r* do centro da Terra, grande o suficiente para que a variação da força da gravidade deva ser levada em conta

$$V_g = -\frac{GMm}{r} \tag{13.17}$$

onde a distância r é medida do centro da Terra e V_g é igual a zero para $r = \infty$.

c. A energia potencial de um corpo em relação a uma força elástica *F* = *kx*,

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{13.18}$$

onde a distância x é a deflexão da mola elástica medida em relação à sua posição *indeformada* e k é a constante da mola. Note que V_e *depende apenas da deflexão* x, e não da trajetória do corpo preso à mola. Além disso, V_e é sempre positivo, esteja a mola comprimida ou esticada.

4. Substituir suas expressões para as energias cinética e potencial na Eq. (13.24). Você estará apto a resolver essa equação para uma incógnita, para a velocidade, por exemplo [Problema Resolvido 13.6]. Se mais de uma incógnita estiver envolvida, você terá de procurar uma outra condição ou equação, tal como a velocidade mínima [Problema Resolvido 13.7] ou a energia potencial mínima da partícula. Para problemas envolvendo uma força central, uma segunda equação pode ser obtida usando-se a conservação da quantidade de movimento angular [Problema Resolvido 13.8]. Isso é especialmente útil em aplicações à mecânica espacial [Seção 13.9].

PROBLEMAS

13.55 Uma força **P** é lentamente aplicada a uma placa que está presa a duas molas, causando uma deflexão x_0. Para cada um dos casos mostrados na figura, deduza uma expressão para constante k_e, em termos k_1 e k_2, de uma mola única equivalente para o sistema dado, isto é, da mola única que sofrerá a mesma deflexão x_0 quando submetida à mesma força **P**.

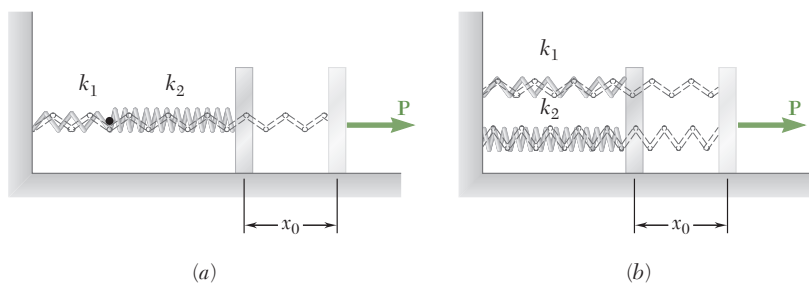



Figura P13.55

13.56 Um bloco de massa m é fixado a duas molas como mostra a figura. Sabendo que em cada caso o bloco é puxado por uma distância x_0 de sua posição de equilíbrio e liberado, determine a máxima velocidade do bloco em seu movimento subsequente.

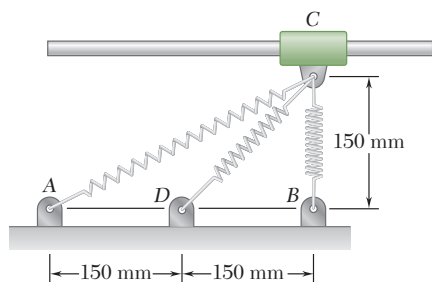



Figura P13.57

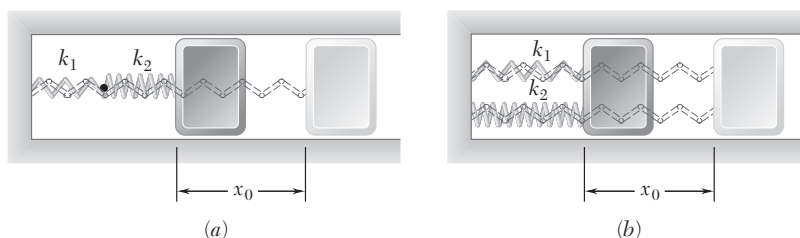



Figura P13.56

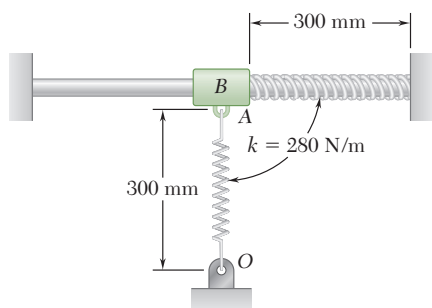
13.57 Um colar C de 1,2 kg pode deslizar sem atrito ao longo da haste horizontal. Ele está preso a três molas, cada uma de constante k = 400 N/m e 150 mm de comprimento indeformado. Sabendo que o colar é liberado do repouso na posição mostrada, determine a máxima velocidade que ele irá alcançar no movimento subsequente.

13.58 Um colar B de 5 kg pode deslizar sem atrito ao longo da haste horizontal e está em equilíbrio em A quando ele é puxado 125 mm para a direita e liberado. O comprimento indeformado de cada mola é 300 mm e a constante de cada mola é k = 280 N/m. Determine (a) a máxima velocidade do colar, (b) a máxima aceleração do colar.

Figura P13.58

13.59 Uma corda elástica é esticada entre dois pontos A e B, separados de 16 cm no mesmo plano horizontal. Quando esticada diretamente entre A e B, a tração na corda é de 10 N. A corda é, então, esticada como mostra a figura até o seu ponto médio C ser movido de 6 cm para C'; uma força de 60 N é necessária para manter a corda em C'. Uma bolinha de 100 g é colocada em C' e a corda é liberada. Determine a velocidade que a bolinha passa por C.

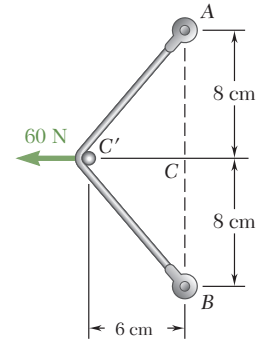



Figura P13.59

13.60 Um colar de 10 kg desloca-se sem fricção ao longo de uma barra vertical como mostra a figura. A mola presa ao colar tem um comprimento indeformado de 100 mm e uma constante de 600 N/m. Se o colar é liberado do repouso na posição 1, determine sua velocidade depois de mover-se 150 mm em direção à posição 2.

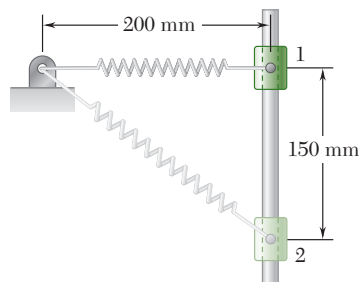
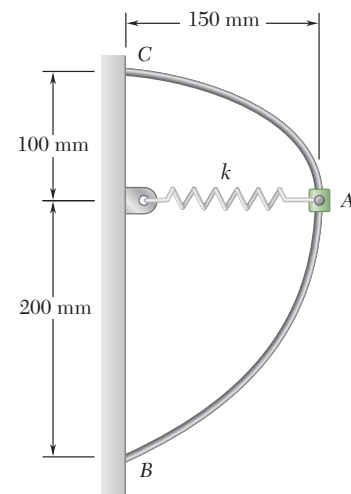



Figura *P13.60*

Figura *P13.61*

13.61 Um colar de 500 g pode deslizar sem atrito sobre uma barra curva BC em um plano *horizontal.* Sabendo que o comprimento indeformado da mola é de 80 mm e que $k = 400$ kN/m, determine (a) a velocidade que o colar deve receber em A para atingir B com velocidade nula, (b) a velocidade do colar quando ele finalmente atingir C.

13.62 Um colar de 3 kg pode deslizar sem atrito sobre uma barra vertical e ficar em repouso equilibrando-se sobre uma mola. Ele é empurrado para baixo, comprimindo a mola 150 mm e é liberado. Sabendo que a constante da mola é $k = 2{,}6$ kN/m, determine (a) a altura máxima h alcançada pelo colar acima de sua posição de equilíbrio, (b) a velocidade máxima do colar.

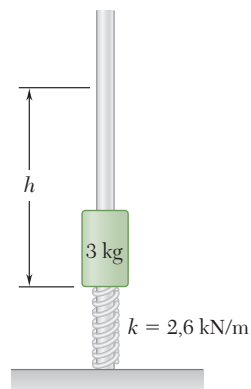



Figura P13.62

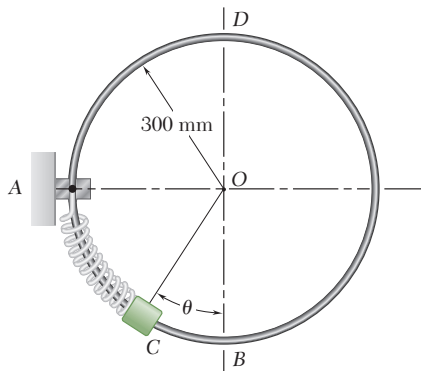
Figura P13.63

13.63 É mostrado na mecânica dos materiais que quando uma viga elástica AB suporta um bloco de peso W em um ponto B, a deflexão y_{est} (chamada de deflexão estática) é proporcional a W. Mostre que se o mesmo bloco cai de uma altura h na extremidade B da viga em balanço AB e não ricocheteia, a máxima deflexão y_m no movimento subsequente pode ser expressa como $y_m = y_{est}\,(1 + \sqrt{1 + 2h/y_{est}})$. Note que essa fórmula é aproximada, já que está baseada no pressuposto que não há energia dissipada no impacto e que o peso da viga é pequeno comparado com o peso do bloco.

Figura P13.64 e P13.65

13.64 Uma barra circular delgada é sustentada em um *plano vertical* por um suporte em A. Uma mola de constante $k = 45$ N/m e comprimento indeformado igual ao arco de círculo AB está presa ao suporte e enrolada frouxamente em volta da barra. Um colar C de 220 g, não ligado à mola, pode deslizar sem atrito ao longo da barra. Sabendo que o colar é liberado do repouso quando $\theta = 30°$, determine (*a*) a altura máxima acima do ponto B alcançada pelo colar, (*b*) a velocidade máxima do colar.

13.65 Uma barra circular delgada é sustentada em um *plano vertical* por um suporte em A. Uma mola de constante $k = 45$ N/m e comprimento indeformado igual ao arco de círculo AB está presa ao suporte e enrolada frouxamente em volta da barra. Um colar C de 220 g, não ligado à mola, pode deslizar sem atrito ao longo da barra. Sabendo que o colar é liberado do repouso a um ângulo θ em relação à vertical, determine (*a*) o menor valor de θ para que o colar passe por D e atinja o ponto A, (*b*) a velocidade do colar quando ele atingir o ponto A.

13.66 Um colar de 1,3 kg pode deslizar ao longo da barra mostrada na figura. Ele está preso a uma corda elástica fixada em F que tem um comprimento indeformado de 0,9 m e uma constante de mola de 60 N/m. Sabendo que o colar é liberado do repouso em A e desprezando o atrito, determine a velocidade do colar (*a*) em B, (*b*) em E.

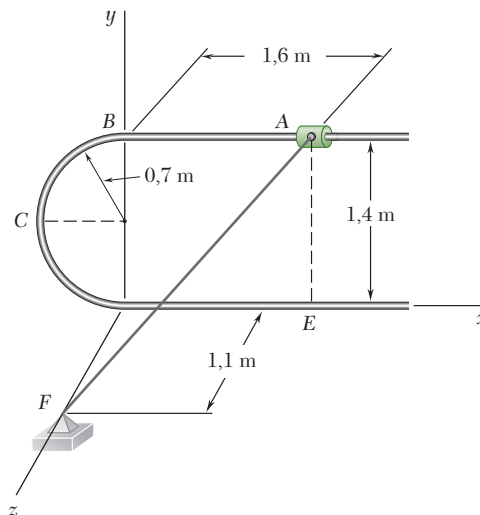



Figura *P13.66*

13.67 O sistema mostrado na figura está em equilíbrio quando $\phi = 0$. Sabendo que inicialmente $\phi = 90°$ e que o bloco C está em movimento suave e muito lento quando o sistema está naquela posição, determine a velocidade do bloco quando ele passar pela posição de equilíbrio $\phi = 0$. Despreze o peso da barra.

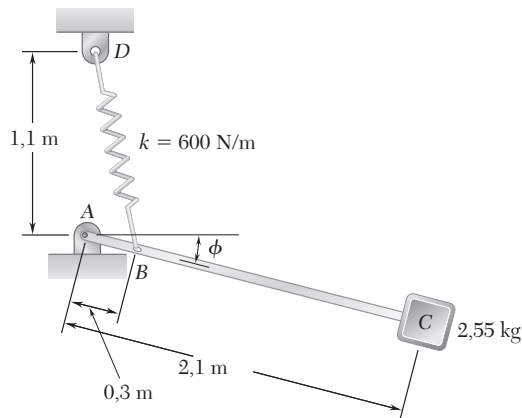



Figura P13.67

13.68 Uma mola é usada para parar um pacote de 50 kg que está se movendo para baixo numa inclinação de 20°. A mola tem constante $k = 30$ kN/m e é mantida por cabos de modo que está comprimida inicialmente de 50 mm. Sabendo que a velocidade do pacote é 2 m/s quando ele está a 8 m da mola e desprezando o atrito, determine a máxima deformação adicional na mola para levar o pacote ao repouso.

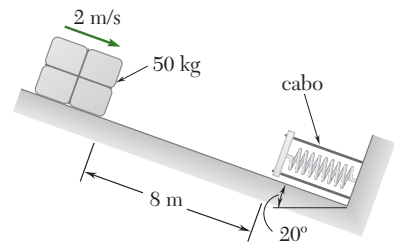



Figura P13.68

13.69 Resolva o Problema 13.68 considerando o coeficiente de atrito cinético entre o pacote e a inclinação é 0,2.

13.70 Um bloco de 300 g é liberado do repouso em A e desliza com atrito ao longo da superfície mostrada na figura. Determine a força exercida sobre o bloco pela superfície (a) justamente antes de o bloco alcançar B, (b) imediatamente após ele passar por B.

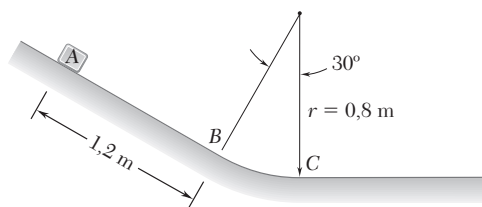



Figura P13.70 e P13.71

13.71 Um bloco de 300 g é liberado do repouso em A e desliza sem atrito ao longo da superfície mostrada na figura. Determine a força exercida sobre o bloco pela superfície (a) justamente antes de o bloco alcançar C e (b) imediatamente após ele passar por C.

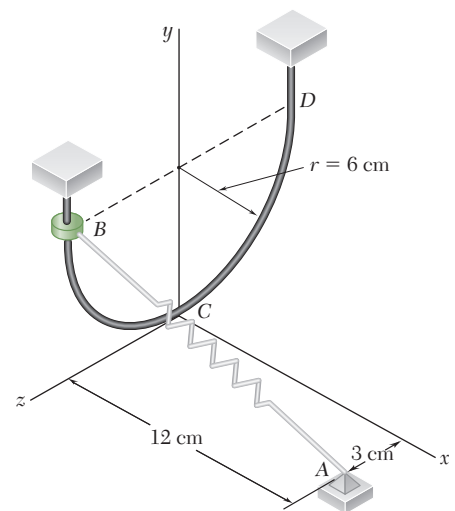
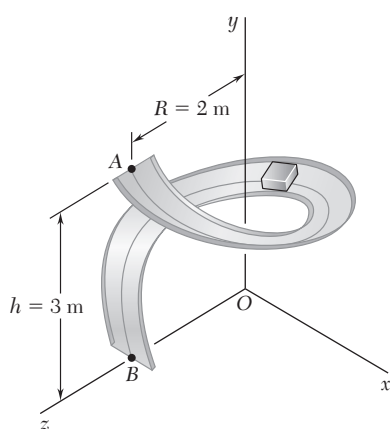



Figura P13.72

Figura P13.73

13.72 Um colar de 0,6 kg pode deslizar sem atrito ao longo da barra semicircular *BCD*, A mola tem constante 900 N/m e comprimento indeformado de 8 cm. Sabendo que o colar é liberado do repouso em *B*, determine (*a*) a velocidade do colar quando ele passar por *C*, (*b*) a força exercida pela barra sobre o colar em *C*.

13.73 Um colar de 0,5 kg está preso a uma mola e desliza sem atrito ao longo de uma barra circular em um plano *vertical*. A mola tem um comprimento indeformado de 5 cm e uma constante $k = 400$ N/m. Sabendo que o colar está em equilíbrio em *A* e que recebe um leve impulso para se movimentar, determine a velocidade do colar e força normal entre o colar e a barra quando ele passar por *B*.

13.74 Um pacote de 200 g é lançado para cima com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ por uma mola em *A*; ele se move em torno de uma estrutura sem atrito e é depositado em *C*. Para cada uma das estruturas mostradas nas figuras, determine (*a*) a menor velocidade $\mathbf{v}_0$ para que o pacote atinja *C*, (*b*) a força correspondente exercida pelo pacote sobre a estrutura justamente antes do pacote deixar a estrutura em *C*.

Figura P13.76,13.77

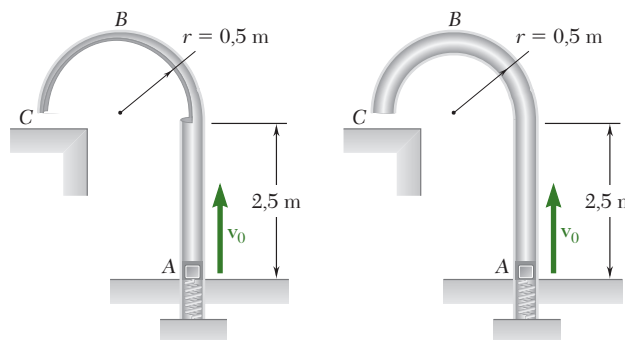



Figura P13.74

13.75 Se o pacote do Problema 13.74 não puder atingir a superfície horizontal em *C* com velocidade superior a 3,5 m/s, (*a*) mostre que esse requisito só pode ser atendido pela segunda estrutura, (*b*) determine a maior velocidade inicial admissível $\mathbf{v}_0$ quando a segunda estrutura for usada.

13.76 Uma bola de 1 kg em *A* é suspensa por uma corda inextensível e tem velocidade inicial de 4,8 m/s. Se $l = 0,6$ m e $x_B = 0$, determine y_B de modo que a bola entre no cesto.

***13.77** Uma bola de 1 kg em *A* é suspensa por uma corda inextensível e tem velocidade inicial de $\mathbf{v}_0$. Se $l = 0,6$ m e $x_B = 0,09$ e $y_B = 0,12$ m, determine a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de modo que a bola entre no cesto.

Figura P13.78

***13.78** Pacotes são movidos do ponto *A* no piso superior de uma casa comercial para o ponto *B* no piso inferior, 3 m abaixo de *A*, por meio de uma calha cuja linha central é formada por uma hélice de eixo vertical *y* e raio $R = 2$ m. A seção transversal da calha é montada de tal forma que cada pacote, depois de ser liberado em *A* com velocidade nula, deslizará ao longo da linha central da calha sem nunca tocar as bordas. Desprezando o atrito, (*a*) expresse como uma função da elevação *y* de um dado ponto *P* da linha central, o ângulo ϕ formado

pela normal da superfície da calha em P e a normal principal da linha central naquele ponto, (b) determine a intensidade e direção da força exercida pela calha em um pacote 10 kg quando este alcança o ponto B. *Dica:* A normal principal da hélice em qualquer ponto P é horizontal e dirigida na direção do eixo y, e o raio de curvatura da hélice é $\rho = R[1 + (h/2\pi R)^2]$.

***13.79** Prove que uma força $F(x, y, z)$ é conservativa se, e somente se, as seguintes relações forem satisfeitas:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

13.80 A força $\mathbf{F} = (yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k})/xyz$ age sobre uma partícula $P(x, y, z)$ que se move no espaço. (a) Usando a relação deduzida no Problema 13.79, mostre que essa força é uma força conservativa. (b) Determine a função potencial associada a $\mathbf{F}$.

Figura P13.81

***13.81** Uma força $\mathbf{F}$ age sobre uma partícula $P(x, y)$ que se move no plano xy. Determine se a força $\mathbf{F}$ é uma força conservativa e calcule o trabalho de $\mathbf{F}$ quando P descreve a trajetória no sentido horário A,B,C,A, de acordo com o quarto de círculo $x^2 + y^2 = a^2$, se (a) $\mathbf{F} = ky\mathbf{i}$, ($b$) $\mathbf{F} = k(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$.

***13.82** A função potencial associada com a força $\mathbf{P}$ no espaço é conhecida por ser $V(x, y, z) = -(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$. ($a$) Determine os componentes x, y e z de $\mathbf{P}$. (b) Calcule o trabalho feito por $\mathbf{P}$ de O para D por integração ao longo do caminho $OABD$ e mostre que este valor é igual ao negativo da variação no potencial de O a D.

Figura P13.82

***13.83** (a) Calcule o trabalho feito de D a O para a força $\mathbf{P}$ do Problema 13.82 por integração ao longo da diagonal do cubo. (b) Usando o resultado obtido na resposta da parte b do Problema 13.82, verifique que o trabalho feito pela força conservativa ao longo da trajetória fechada $OABDO$ é zero.

***13.84** A força $\mathbf{F} = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ age sobre uma partícula $P(x, y, z)$ que se move no espaço. (a) Usando a relação deduzida no Problema 13.79, mostre que essa força é uma força conservativa (b) Determine a função potencial associada a $\mathbf{F}$.

13.85 Enquanto descreve uma órbita circular a 300 km acima da Terra, um veículo espacial lança um satélite de comunicação de 3.600 kg. Determine (a) a energia adicional necessária para pôr o satélite em uma órbita geoestacionária a uma altitude de 35.770 km acima da superfície da Terra, (b) a energia necessária para pôr o satélite na mesma órbita lançando-o da superfície da Terra, excluindo a energia necessária para vencer a resistência do ar. (Uma *órbita geoestacionária* é uma órbita circular em que o satélite parece estacionário em relação ao solo.)

13.86 Um satélite é posto em uma órbita elíptica em torno da Terra. Sabendo-se que a razão v_A/v_P entre as velocidades no apogeu A e no perigeu P é igual à razão r_P/r_A entre as distâncias de P e A ao centro da Terra e que a distância entre A e P é de 80.000 km, determine a energia por unidade de massa necessária para colocar o satélite nessa órbita lançando-o da superfície da Terra. Exclua a energia necessária para vencer o peso do foguete propulsor, a resistência do ar e as manobras.

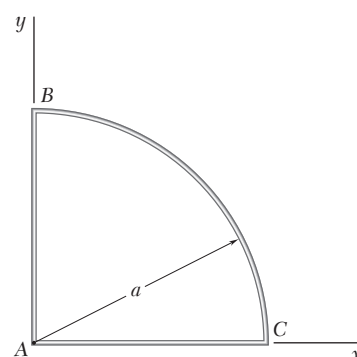
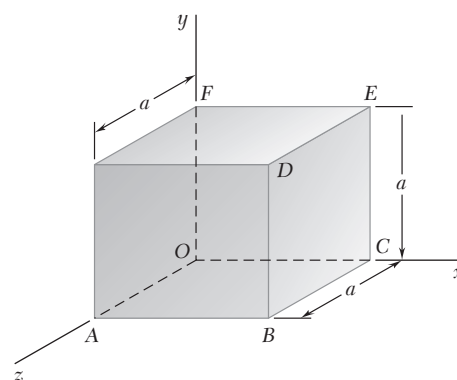
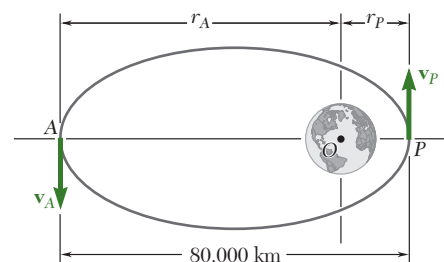



Figura P13.86

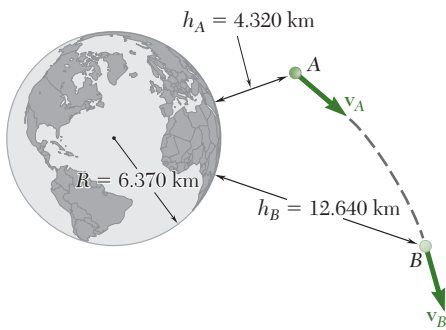



Figura P13.87

13.87 Sabendo que a velocidade de uma sonda espacial experimental lançada da Terra tem intensidade $v_A = 32{,}32 \times 10^3$ km/h no ponto A, determine a velocidade da sonda quando ela passar pelo ponto B.

13.88 Um módulo de excursão lunar foi usado nas missões Apollo de descida na Lua para poupar combustível, tornando desnecessário lançar toda a espaçonave da superfície da Lua na viagem de retorno a Terra. Verifique a eficácia dessa abordagem calculando a energia por quilograma necessária para uma espaçonave escapar do campo gravitacional da Lua, caso a espaçonave parta (*a*) da superfície da Lua, (*b*) de uma órbita circular a 80 km acima da superfície da Lua. Despreze o efeito do campo gravitacional da Terra. (O raio da Lua é de 1.730 km e sua massa é 0,0123 vezes a massa da Terra.)

13.89 Um satélite de massa m descreve uma órbita circular de raio r em torno da Terra. Expresse, em função de r, (*a*) a energia potencial do satélite, (*b*) sua energia cinética e (*c*) sua energia total. Represente o raio da Terra por R e a aceleração da gravidade na superfície da Terra por g e admita que a energia potencial do satélite seja nula em sua plataforma de lançamento.

13.90 Quanta energia por quilograma deve ser fornecida a um satélite a fim de colocá-lo em uma órbita circular a uma altitude de (*a*) 600 km e (*b*) 6.000 km?

13.91 (*a*) Fazendo $r = R + y$ no segundo membro à direita da Eq. (13.17′) e expandindo-o em uma série de potências de y/R, mostre que a expressão na Eq. (13.16) para a energia potencial V_g devido à gravidade é uma aproximação de primeira ordem para a expressão dada na Eq. (13.17′). (*b*) Usando a mesma expansão, deduza uma aproximação de segunda ordem para V_g.

13.92 Observações mostram que um corpo celeste que viaja a $1{,}9 \times 10^6$ km/h parece estar descrevendo um círculo em torno do ponto B de raio igual a 60 anos-luz. Suspeita-se que o ponto B seja uma concentração de massa muito densa conhecida como buraco negro. Determine a razão M_B/M_S entre a massa de B e a massa do Sol. (A massa do Sol é 330.000 vezes a massa da Terra e um ano-luz é a distância percorrida pela luz em um ano à velocidade de 298.000 km/s.)

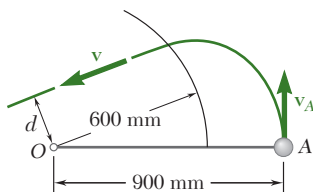



Figura P13.93

13.93 Uma bola de 200 g, que pode deslizar sobre uma superfície *horizontal* sem atrito, está presa ao ponto fixo O por meio de uma corda elástica de constante k = 150 N/m e comprimento indeformado de 600 mm. A bola é posta no ponto A, a 900 mm de O, e recebe uma velocidade inicial $\mathbf{v}_A$ perpendicular a OA. Sabendo que a distância d = 100 m de O, determine (*a*) a velocidade inicial v_A da bola, (*b*) sua velocidade v depois da corda se tornar frouxa.

13.94 Para a bola do Problema 13.93, determine (*a*) o menor valor admissível da velocidade inicial $\mathbf{v}_A$ para que a corda permaneça esticada todo tempo, (*b*) a velocidade máxima correspondente alcançada pela bola.

13.95 Um colar A de 5 kg está preso a uma mola de constante 800 N/m e comprimento indeformado de 450 mm. O sistema é posto em movimento com $r = 300$ mm, $v_\theta = 5$ m/s e $v_r = 0$. Desprezando a massa da barra e o efeito de atrito, determine os componentes radial e transversal da velocidade do colar quando $r = 520$ mm.

Figura P13.95

13.96 Para o movimento descrito no Problema 13.95 determine (*a*) a máxima distância entre a origem e o colar, (*b*) a velocidade correspondente. (*Dica:* Resolva por tentativa e erro a equação obtida para r.)

13.97 Resolva o Problema 13.8, considerando que a corda elástica é substituída por uma força central $\mathbf{F}$ de intensidade $(80/r^2)$ N voltada para O.

13.98 Um colar A de 1,8 kg e um colar B de 0,7 kg podem deslizar sem atrito sobre uma estrutura que consiste da barra horizontal OE e da barra vertical CD, livre para girar em torno de CD. Os dois colares estão conectados por uma corda que passa por uma roldana presa à estrutura em O. No instante mostrado na figura, a velocidade $\mathbf{v}_A$ do colar A tem intensidade 2,1 m/s e uma trava impede o movimento do colar B. Se a trava for removida subitamente, determine (*a*) a velocidade do colar A quando ele estiver a 0,2 m de O, (*b*) a velocidade do colar A quando o colar B chegar ao repouso. (Admita que o colar B não atinja O, que o colar A não saia da barra OE, e que a massa da estrutura seja desprezível.)

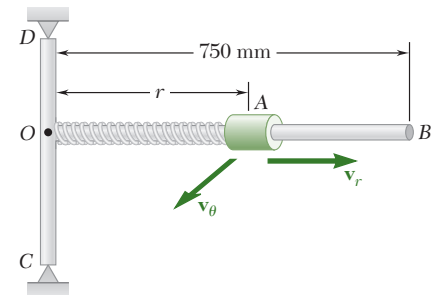
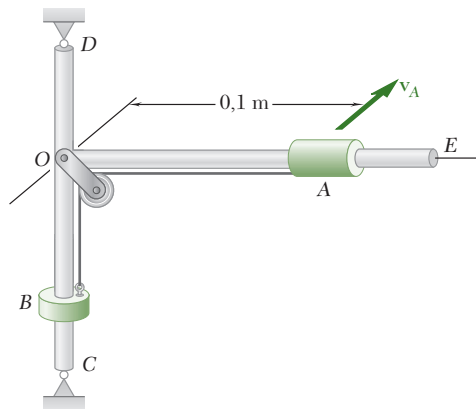



Figura *P13.98*

13.99 Usando os princípios de conservação da energia e da quantidade de movimento angular, resolva o item *a* do Problema Resolvido 12.8.

13.100 Uma espaçonave navega ao longo de uma trajetória parabólica em direção ao planeta Júpiter e a expectativa é de que atinja o ponto A com uma velocidade $\mathbf{v}_A$ de intensidade 26,9 km/s. Seus motores serão, então, acionados para desacelerá-la, colocando-a em uma órbita elíptica que a levará para até 100×10^3 km de Júpiter. Determine o decréscimo de velocidade Δv no ponto A que colocará a espaçonave na órbita requerida. A massa de Júpiter é 319 vezes a massa da Terra.

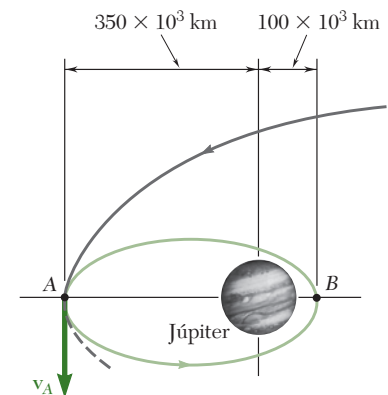



Figura P13.100

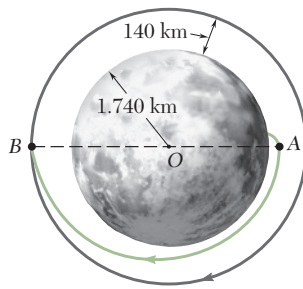



Figura P13.101

13.101 Após completar sua missão de exploração na Lua, os dois astronautas da tripulação de um módulo de excursão lunar Apollo iriam preparar o retorno ao módulo de comando que orbitava na Lua a uma altitude de 140 km. Eles acionariam o motor do módulo lunar, levariam-no ao longo de uma trajetória curva até o ponto *A*, a 8 km acima da superfície da Lua, e desligariam o motor. Sabendo que o módulo lunar movia-se naquele instante em uma direção paralela à superfície da Lua e que, então, seguiria livre ao longo de uma trajetória elíptica para reencontrar o módulo de comando em *B*, determine (*a*) a velocidade do módulo lunar após o desligamento do motor, (*b*) a velocidade relativa com a qual o módulo de comando se aproximaria do módulo lunar em *B*. (O raio da Lua é de 1.740 km e sua massa é 0,0123 vezes a massa da Terra.)

13.102 A melhor maneira de transferir um veículo espacial de uma órbita circular mais interna para uma outra órbita coplanar mais externa é acionando seus motores quando ele passar por *A*, a fim de aumentar sua velocidade e pô-lo em uma órbita elíptica de transferência. Um outro aumento de velocidade quando ele passar por *B* irá colocá-lo na órbita circular desejada. Para um veículo em uma órbita circular em torno da Terra a uma altitude $h_1 = 320$ km que deve ser transferido para uma órbita circular a uma altitude $h_2 = 800$ km, determine (*a*) o aumento de velocidade requerido em *A* e *B*, (*b*) a energia total por unidade de massa necessária para executar a transferência.

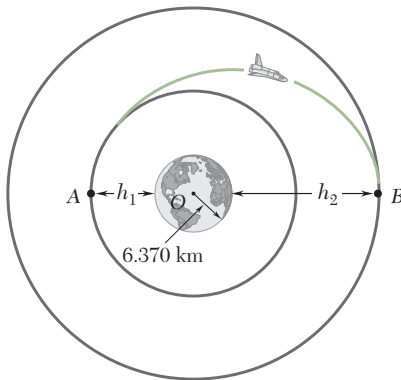



Figura P13.102

13.103 Uma espaçonave aproxima-se do planeta Saturno, atingindo o ponto *A* com uma velocidade V_A de intensidade de 21×10^3 m/s. Ela é posta em uma órbita elíptica em torno de Saturno, de modo que estará apta a examinar periodicamente Tétis, uma das luas de Saturno. Tétis está em uma órbita circular de raio 293×10^3 km em torno do centro de Saturno, viajando a uma velocidade de 11×10^3 m/s. Determine (*a*) o decréscimo de velocidade da espaçonave em *A* necessário para que ela atinja a órbita desejada, (*b*) a velocidade da espaçonave quando ela alcançar a órbita de Tétis em *B*.

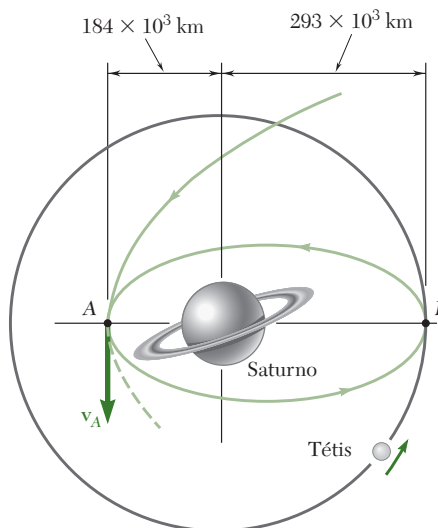



Figura P13.103

13.104 Uma espaçonave descreve uma órbita elíptica de altitude mínima $h_A = 2.400$ km e altitude máxima $h_B = 9.600$ km acima da superfície da Terra. Determine a velocidade da espaçonave em A.

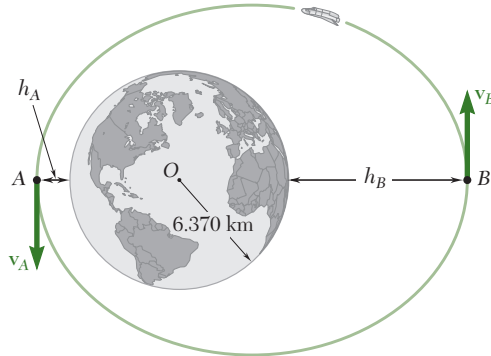



Figura *P13.104* e *P13.105*

13.105 Uma espaçonave descreve uma órbita elíptica em torno da Terra com uma velocidade máxima $v_A = 26{,}3 \times 10^3$ km/h em A e uma velocidade mínima $v_B = 18{,}5 \times 10^3$ km/h em B. Determine a altitude da espaçonave em B.

13.106 Após o retorno do módulo lunar ao módulo de comando, a espaçonave Apollo foi girada em torno de si mesma de modo que o módulo lunar ficou voltado para trás. O módulo lunar foi então ejetado à deriva com uma velocidade de 200 m/s relativa ao módulo de comando. Determine a intensidade e a direção (ângulo ϕ formado com a vertical OC) da velocidade $\mathbf{v}_C$ do módulo justamente antes de ele colidir com a superfície da Lua em C.

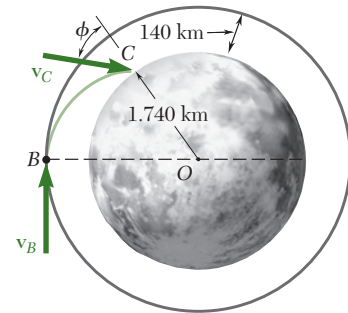



Figura P13.106

13.107 Um satélite é lançado ao espaço com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ a uma distância r_0 do centro da Terra pelo último estágio de seu foguete lançador. A velocidade $\mathbf{v}_0$ foi calculada para enviar o satélite para uma órbita circular de raio r_0. Entretanto, devido a uma falha de controle, o satélite não é lançado horizontalmente, mas a um ângulo a com a horizontal e, como resultado, é propulsionado para uma órbita elíptica. Determine os valores máximo e mínimo da distância entre o centro da Terra e o satélite.

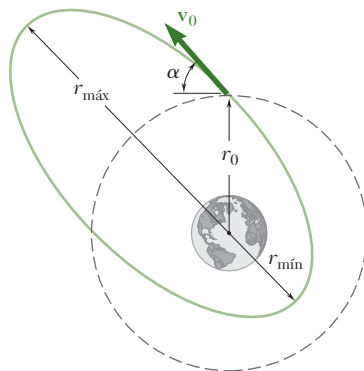



Figura P13.107

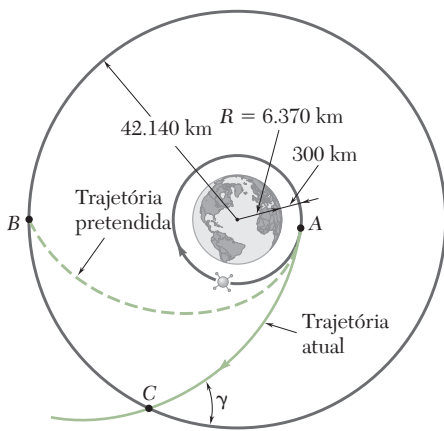



Figura P13.108

13.108 Uma plataforma espacial encontra-se em uma órbita circular ao redor da Terra a uma altitude de 300 km. Quando a plataforma passa por A, um foguete carregando um satélite de comunicação é lançado da plataforma com uma velocidade relativa de intensidade de 3,44 km/s em uma direção tangente à órbita da plataforma. A intenção era colocar o foguete em uma órbita de transferência elíptica, levando-o ao ponto B, onde o foguete seria novamente acionado a fim de pôr o satélite em uma órbita geoestacionária de raio de 42.140 km. Após o lançamento, descobriu-se que a velocidade relativa fornecida ao foguete havia sido grande demais. Determine o ângulo γ no qual o foguete cruzará a órbita pretendida no ponto C.

13.109 Um veículo espacial encontra-se em uma órbita circular a uma altitude de 360 km acima da Terra. Para retornar à Terra, ele diminui sua velocidade quando passa por A, acionando seu motor por um curto intervalo de tempo em sentido oposto ao de seu movimento. Sabendo que a velocidade do veículo espacial deve formar um ângulo $\phi_B = 60°$ com a vertical quando ele atingir o ponto B a uma altitude de 65 km, determine (a) a velocidade necessária para que o veículo deixe sua órbita circular em A, (b) sua velocidade no ponto B.

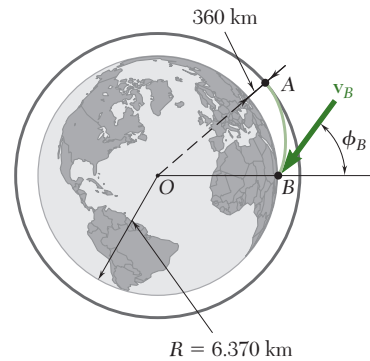



Figura P13.109

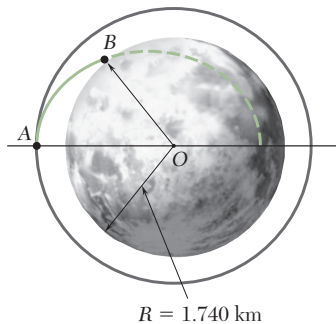
***13.110** No Problema 13.109, a velocidade do veículo espacial foi diminuída quando ele passava por A acionando seu motor em um sentido oposto ao do movimento. Uma estratégia alternativa para tirar o veículo espacial de sua órbita circular seria girá-lo de modo a que o motor apontasse para longe da Terra e, então, fornecer uma velocidade incremental $\Delta \mathbf{v}_A$ em direção ao centro O da Terra. Isso provavelmente exigiria um menor consumo de energia para acionar o motor em A, mas poderia resultar em uma descida muito rápida para B. Considerando o uso dessa estratégia com apenas 50% do consumo de energia do Problema 13.109, determine os valores resultantes de ϕ_B e v_B.

13.111 Quando o módulo lunar foi deixado à deriva após o retorno de dois dos astronautas da Apollo ao módulo de comando, que orbitava a Lua a uma altitude de 140 km, sua velocidade foi reduzida para deixá-lo colidir com a superfície da Lua. Determine (a) a menor redução de velocidade do módulo lunar para garantir que ele colida com a superfície da Lua, (b) a redução de velocidade que o fará atingir a superfície da Lua a um ângulo de 45° (*Dica:* o ponto A está no apogeu de uma trajetória elíptica de colisão. Considere também que a massa da Lua é 0,0123 vezes a massa da Terra.)

Figura P13.111

***13.112** Uma sonda espacial descreve uma órbita circular de raio nR com velocidade $\mathbf{v}_0$ em torno de uma planeta de raio R e centro O. Mostre que (a) para que a sonda espacial deixar sua órbita e atingir o planeta com um ângulo θ com a vertical, sua velocidade deve ser reduzida a $\alpha\mathbf{v}_0$, onde

$$\alpha = \operatorname{sen}\theta\sqrt{\frac{2(n-1)}{n^2 - \operatorname{sen}^2\theta}};$$

(b) a sonda não atingirá o planeta se α for maior que $\sqrt{2/(1+n)}$.

13.113 Mostre que os valores v_A e v_P da velocidade de um satélite da Terra no apogeu A e no perigeu P de uma órbita elíptica estão definidos pelas relações

$$v_A^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_P}{r_A} \qquad v_P^2 = \frac{2GM}{r_A + r_P}\frac{r_A}{r_P}$$

onde M é a massa da Terra e r_A e r_P representam, respectivamente, as distâncias máxima e mínima da órbita ao centro da Terra.

Figura P13.113 e P13.114

13.114 Mostre que a energia total E de um satélite da Terra de massa m que descreve uma órbita elíptica é $E = -GMm/(r_A + r_P)$, onde M é a massa da Terra e r_A e r_P representam, respectivamente, as distâncias máxima e mínima da órbita ao centro da Terra. (Considere que a energia potencial gravitacional de um satélite foi definida de modo a se anular a uma distância infinita da Terra.)

13.115 Uma espaçonave de massa m descreve uma órbita circular de raio r_1 ao redor da Terra (a) Mostre que a energia adicional ΔE, que deve ser fornecida à espaçonave para transferi-la a uma órbita circular de raio maior r_2, é

$$\Delta E = \frac{GMm(r_2 - r_1)}{2r_1 r_2}$$

onde M é a massa da Terra. (b) Mostre ainda que se a transferência de uma órbita circular para outra é executada colocando-se a espaçonave em uma trajetória de transição semielíptica AB, as quantidades de energia ΔE_A e ΔE_B que devem ser fornecidas em A e B são, respectivamente, proporcionais a r_2 e r_1:

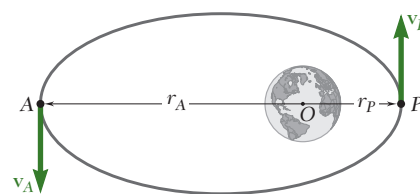
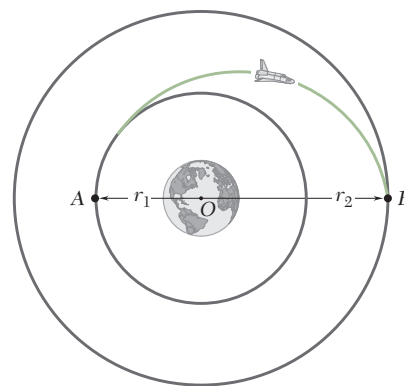
$$\Delta E_A = \frac{r_2}{r_1 + r_2}\Delta E \qquad \Delta E_B = \frac{r_1}{r_1 + r_2}\Delta E$$

Figura P13.115

13.116 Um míssil é disparado do chão com uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ que faz um ângulo ϕ_0 com a vertical. Se o míssil tiver que alcançar uma altitude máxima igual a αR, onde R é o raio da Terra, (a) mostre que o ângulo requerido ϕ_0 está definido pela relação

$$\operatorname{sen}\phi_0 = (1+\alpha)\sqrt{1 - \frac{\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{v_{esc}}{v_0}\right)^2}$$

onde v_{esc} é a velocidade de escape, (b) determine a faixa de valores admissíveis para v_0.

***13.117** Usando as respostas obtidas no Problema 13.107, mostre que a órbita circular pretendida e a órbita elíptica resultante interceptam-se nas extremidades do eixo menor da órbita elíptica.

***13.118** (a) Expresse em termos de $r_{\text{mín}}$ e $v_{\text{máx}}$ a quantidade de momento angular por unidade de massa h e a energia total por unidade de massa, E/m, do veículo espacial movendo sob a atração de planeta de massa M (Fig. 13.15). (*b*) Eliminando $v_{\text{máx}}$ na equação, derive a fórmula

$$\frac{1}{r_{\text{mín}}} = \frac{GM}{h^2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}\right]$$

(*c*) Mostre que a excentricidade ε da trajetória do veículo pode ser expressa como

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2E}{m}\left(\frac{h}{GM}\right)^2}$$

(*d*) Mostre ainda que a trajetória do veículo é uma hipérbole, uma elipse, ou uma parábola, dependendo se E é positivo, negativo ou zero.

13.10 Princípio de impulso e quantidade de movimento

Um terceiro método básico para a solução de problemas que tratam do movimento de partículas será considerado agora. Esse método baseia-se no princípio de impulso e quantidade de movimento e pode ser usado para resolver problemas que envolvem força, massa, velocidade e tempo. Ele é de particular interesse para a solução de problemas que incluem movimento impulsivo e impacto (Seções 13.11 e 13.12).

Foto 13.1

Foto 13.2 Este teste de impacto de um F-4 Phanton e um alvo rígido reforçado foi para determinar a força de impacto em função do tempo.

Considere uma partícula de massa m sujeita a uma força $\mathbf{F}$. Como vimos na Seção 12.3, a segunda lei de Newton pode ser expressa na forma

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \tag{13.27}$$

onde $m\mathbf{v}$ é a quantidade de movimento linear da partícula. Multiplicando ambos os membros da Eq. (13.27) por dt e integrando a partir de um tempo t_1 até um tempo t_2 escrevemos

$$\mathbf{F}\,dt = d(m\mathbf{v})$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1$$

ou, transpondo o último termo

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

A integral na Eq. (13.28) é um vetor conhecido como *impulso linear*, ou simplesmente *impulso*, da força $\mathbf{F}$ durante o intervalo de tempo considerado. Decompondo $\mathbf{F}$ em componentes retangulares, escrevemos

$$\begin{aligned}\mathbf{Imp}_{1\to 2} &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt \\ &= \mathbf{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt + \mathbf{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt + \mathbf{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt \end{aligned} \tag{13.29}$$

e notamos que os componentes do impulso da força **F** são, respectivamente, iguais às áreas sob as curvas obtidas plotando os componentes F_x, F_y, F_z em função de t (Fig. 13.16). No caso de uma força **F** de intensidade e sentido constantes, o impulso é representado pelo vetor $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$, que tem o mesmo sentido de **F**.

Figura 13.16

Em unidades do SI, a intensidade do impulso de uma força é expressa em N · s. Mas, relembrando a definição de Newton, temos

$$\text{N} \cdot \text{s} = (\text{kg} \cdot \text{m/s}^2) \cdot \text{s} = \text{kg} \cdot \text{m/s}$$

que é a unidade obtida na Seção 12.4 para a quantidade de movimento linear de uma partícula. Logo, verificamos que a Eq. (13.28) é dimensionalmente correta.

A Eq. (13.28) expressa que, quando uma partícula está sujeita a uma força **F** durante um dado intervalo de tempo, *a quantidade de movimento final* $m\mathbf{v}_2$ *da partícula pode ser obtida adicionando-se vetorialmente sua quantidade de movimento inicial* $m\mathbf{v}_1$ *e o impulso da força* **F** *durante o intervalo de tempo considerado* (Fig. 13.17).

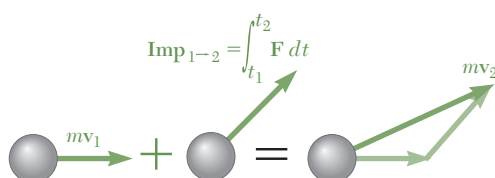
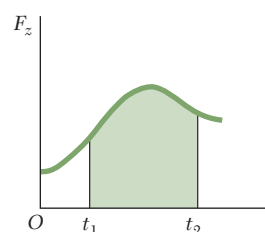
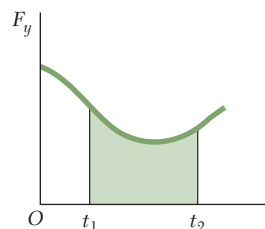
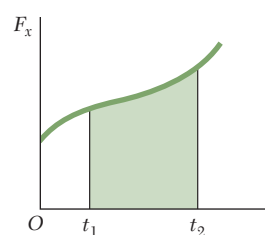



Figura 13.17

Escrevemos

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.30}$$

Observamos que, enquanto a energia cinética e o trabalho são grandezas escalares, a quantidade de movimento e o impulso são grandezas vetoriais. Para obter uma solução analítica, é necessário, então, substituir a Eq. (13.30) pelas equações componentes correspondentes

$$(mv_x)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = (mv_x)_2$$

$$(mv_y)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = (mv_y)_2$$

$$(mv_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt = (mv_z)_2 \tag{13.31}$$

Quando diversas forças agem sobre uma partícula, o impulso de cada uma das forças deve ser considerado. Temos

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\, \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.32}$$

Novamente, a equação obtida representa uma relação entre grandezas vetoriais; na solução real de um problema, ela deve ser substituída pelas equações componentes correspondentes.

Quando um problema envolve duas ou mais partículas, cada partícula pode ser considerada separadamente e a Eq. (13.32) pode ser escrita para cada partícula. Podemos também somar vetorialmente as quantidades de movimento de todas as partículas e os impulsos de todas as forças envolvidas. Escrevemos, então

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\ \mathbf{Imp}_{1\to2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.33}$$

Como as forças de ação e reação exercidas pelas partículas entre si formam pares de forças iguais e opostas, e como o intervalo de tempo de t_1 a t_2 é comum a todas as forças envolvidas, os impulsos das forças de ação e reação se cancelam e apenas os impulsos das forças externas precisam ser considerados.*

Se nenhuma força externa é exercida sobre as partículas, ou, de modo mais geral, se a soma das forças externas é nula, o segundo termo da Eq. (13.33) desaparece e essa equação reduz-se a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

que expressa que *a quantidade de movimento total das partículas se conserva.* Considere, por exemplo, dois barcos de massa m_A e m_B, inicialmente em repouso, sendo puxados juntos (Fig. 13.18). Se a resistência da água for desprezada, as únicas forças externas que agem sobre os barcos são seus pesos e as forças de empuxo exercidas sobre eles.

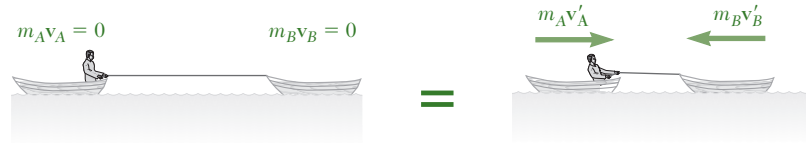



Figura 13.18

Como essas forças estão contrabalançadas, escrevemos

$$\begin{aligned}\Sigma m\mathbf{v}_1 &= \Sigma m\mathbf{v}_2\\ 0 &= m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B\end{aligned}$$

onde $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$ representam as velocidades dos barcos após um intervalo de tempo finito. As equações obtidas indicam que os barcos se movem em sentido oposto (um em direção ao outro) com velocidade inversamente proporcionais a suas massas.**

---

* Devemos observar a diferença entre essa afirmação e a afirmação correspondente feita na Seção. 13.4 com respeito ao trabalho das forças de ação e reação entre diversas partículas. Enquanto a soma dos impulsos dessas forças é sempre nula, a soma de seus trabalhos é nula apenas sob condições especiais, por exemplo, quando os vários corpos envolvidos estiverem conectados por cordas ou vínculos inextensíveis de modo a estarem obrigados a se mover por distâncias iguais.

** Sinais de igualdade em verde são usados na Fig. 13.18 e no restante de todo este capítulo para expressar que dois sistemas de vetores são *equipolentes*, isto é, que eles têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante (cf. Seção 3.19). Sinais de igualdade em preto continuarão a ser usados para indicar que dois sistemas de vetores são *equivalentes*, isto é, que eles têm o mesmo efeito. Este e o conceito de conservação de quantidade de movimento para um sistema de partículas serão discutidos em mais detalhes no *Cap. 14*.

13.11 Movimento impulsivo

Uma força que age sobre uma partícula durante um intervalo de tempo muito curto e que seja grande o suficiente para produzir uma variação de quantidade de movimento definida é denominada *movimento impulsivo.* Por exemplo, quando uma bola de beisebol é golpeada, o contato entre bastão e bola ocorre durante um intervalo de tempo Δt muito curto. Mas o valor médio da força **F** exercida pelo bastão sobre a bola é muito grande, e o impulso resultante $\mathbf{F}\,\Delta t$ é grande o bastante para alterar o sentido de movimento da bola (Fig. 13.19).

Figura 13.19

Quando forças impulsivas agem sobre a partícula, a Eq. (13.32) torna-se:

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_2 \tag{13.35}$$

Qualquer força que não seja uma força impulsiva pode ser desprezada, pois o impulso correspondente $\mathbf{F}\,\Delta t$ é muito pequeno. As *forças não impulsivas* incluem o peso do corpo, a força exercida por uma mola ou qualquer outra força *conhecida que* seja pequena comparada com uma força impulsiva. Reações desconhecidas podem ser ou não impulsivas; logo, seus impulsos devem ser incluídos na Eq. (13.35) enquanto elas não se demonstrarem desprezíveis. O impulso do peso da bola de beisebol considerado anteriormente, por exemplo, pode ser desprezado. Se o movimento do bastão é analisado, o impulso do peso do bastão também pode ser desprezado. Entretanto, os impulsos das reações das mãos do jogador sobre o bastão devem ser incluídos; esses impulsos não serão desprezíveis se a bola for golpeada incorretamente.

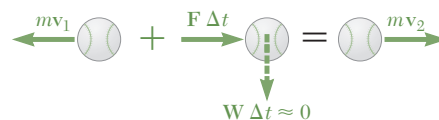
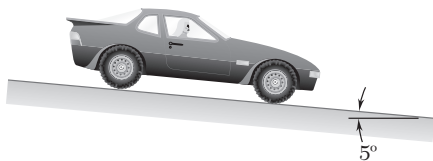
Notemos que o método de impulso e quantidade de movimento é particularmente eficaz na análise do movimento impulsivo de uma partícula, pois envolve apenas as velocidades inicial e final da partícula e os impulsos das forças exercidas sobre a partícula. A aplicação direta da segunda lei, por outro lado, exigiria a determinação das forças como funções do tempo e a integração das equações de movimento sobre o intervalo de tempo Δt.

No caso do movimento impulsivo de diversas partículas, a Eq. (13.33) pode ser usada. Ela se reduz a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.36}$$

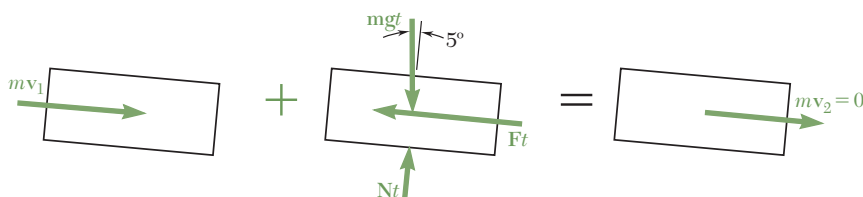
onde o segundo termo envolve apenas as forças impulsivas externas. Se todas as forças externas que agem sobre as várias partículas são não impulsivas, o segundo termo da Eq. (13.36) desaparece e essa equação reduz-se à Eq. (13.34). Escrevemos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

o qual expressa que a quantidade de movimento total das partículas se conserva. Essa situação ocorre, por exemplo, quando duas partículas que se movem livremente colidem uma com a outra. Todavia, devemos observar que, embora a quantidade de movimento total das partículas seja conservada, sua energia total geralmente *não* se conserva. Problemas envolvendo a colisão ou *impacto* de duas partículas serão discutidos em detalhe nas Seções de 13.12 a 13.14.

PROBLEMA RESOLVIDO 13.10

Um automóvel de massa 1.800 kg é conduzido em um declive de 5° a uma velocidade de 100 km/h quando os freios são aplicados, causando uma força total de frenagem de 7.000 N (aplicada pela estrada nos pneus). Determine o tempo transcorrido até o automóvel parar.

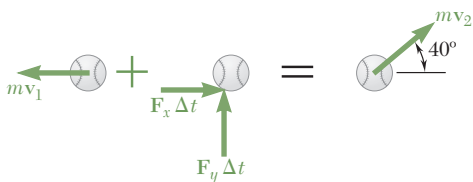
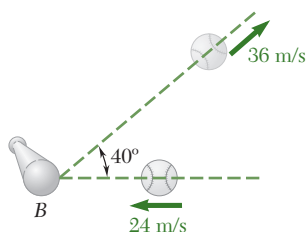
SOLUÇÃO

Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento. Como cada força é constante em intensidade, direção e sentido, cada impulso correspondente é igual ao produto da força e do intervalo de tempo t.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2$$

$+\searrow$ componentes: $\quad mv_1 + (\text{mg sen } 5°)t - Ft = 0$

$$100 \text{ km/h} = 100 \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ h}} = 27{,}78 \text{ m}$$

$$(1.800 \text{ kg})\,(27{,}78 \text{ m/s}) + (17.660 \text{ sen } 5° \text{ N})\text{t} - (7.000 \text{ N})t = 0$$

$$t = 9{,}46 \text{ s} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.11

Uma bola de beisebol de 120 g é arremessada com uma velocidade de 24 m/s em direção a um batedor. Depois que a bola é golpeada pelo bastão B, ela passa a ter uma velocidade de 36 m/s na direção mostrada na figura. Se a bola e o bastão ficam em contato por 0,015 s, determine a força impulsiva média exercida sobre a bola durante o impacto.

SOLUÇÃO

Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento à bola. Como o peso da bola é uma força não impulsiva, ele pode ser desconsiderado.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad -mv_1 + F_x\,\Delta t = mv_2 \cos 40°$

$$-(0{,}12 \text{ kg})(24 \text{ m/s}) + F_x(0{,}015 \text{ s}) = (0{,}12 \text{ kg})(36 \text{ m/s}) \cos 40°$$

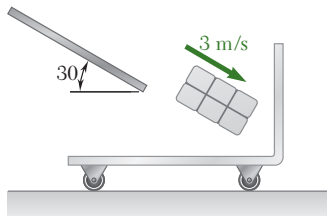
$$F_x = +412{,}6 \text{ N}$$

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad 0 + F_y\,\Delta t = mv_2 \text{ sen } 40°$

$$F_y(0{,}015 \text{ s}) = (0{,}12 \text{ kg})(36 \text{ m/s}) \text{ sen } 40°$$

$$F_y = +185{,}1 \text{ N}$$

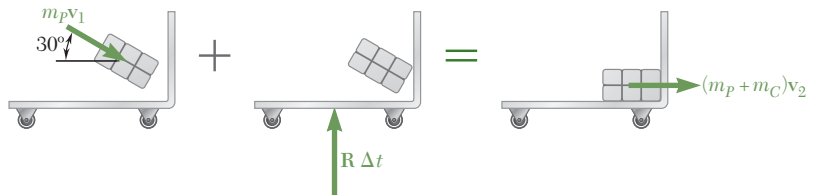
Conhecidos seus componentes F_x e F_y, determinamos a intensidade e a direção da força $\mathbf{F}$:

$$\text{F} = 452 \text{ N} \measuredangle 24{,}2° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.12

Um pacote de 10 kg cai de uma rampa dentro de um carrinho de 25 kg com uma velocidade de 3 m/s. Sabendo que o carrinho está inicialmente em repouso e que pode rolar livremente, determine (*a*) a velocidade final do carrinho, (*b*) o impulso exercido pelo carrinho sobre o pacote e (*c*) a fração da energia inicial perdida no impacto.

SOLUÇÃO

Em primeiro lugar, aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento ao sistema pacote-carrinho para determinar a velocidade $\mathbf{v}_2$ do carrinho e do pacote. Em seguida, aplicamos o mesmo princípio só ao pacote para determinar o impulso $\mathbf{F}\,\Delta t$ exercido sobre ele.

a. Princípio de impulso e quantidade de movimento: pacote e carrinho

$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = (m_P + m_C)\mathbf{v}_2$$

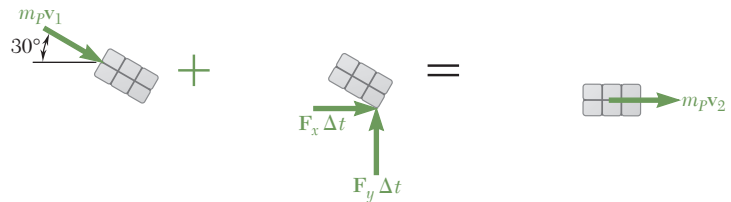
$\xrightarrow{+}$ componentes em x:

$$m_P v_1 \cos 30° + 0 = (m_P + m_C)v_2$$

$$(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30° = (10 \text{ kg} + 25 \text{ kg})v_2$$

$$\mathbf{v}_2 = 0{,}742 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$

Observamos que a equação usada expressa a conservação da quantidade de movimento na direção x.

b. Princípio de impulso e quantidade de movimento: pacote

$$m_P\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to 2} = m_P\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x:

$$(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \cos 30° + F_x\,\Delta t = (10 \text{ kg})(0{,}742 \text{ m/s})$$

$$F_x\,\Delta t = -18{,}56 \text{ N} \cdot \text{s}$$

$+\uparrow$ componentes em y:

$$-m_P v_1 \text{ sen } 30° + F_y\,\Delta t = 0$$

$$-(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s}) \text{ sen } 30° + F_y\,\Delta t = 0$$

$$F_y\,\Delta t = +15 \text{ N} \cdot \text{s}$$

O impulso exercido sobre o pacote é $\quad \mathbf{F}\,\Delta t = 23{,}9 \text{ N} \cdot \text{s} \measuredangle 38{,}9°$ ◀

c. Fração de energia perdida. As energias inicial e final são

$$T_1 = \tfrac{1}{2}m_P v_1^2 = \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(3 \text{ m/s})^2 = 45 \text{ J}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(m_P + m_C)v_2^2 = \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg} + 25 \text{ kg})(0{,}742 \text{ m/s})^2 = 9{,}63 \text{ J}$$

A fração de energia perdida é $\quad \dfrac{T_1 - T_2}{T_1} = \dfrac{45 \text{ J} - 9{,}63 \text{ J}}{45 \text{ J}} = 0{,}786$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção integramos a segunda lei de Newton para deduzir o *princípio de impulso e quantidade de movimento* para uma partícula. Relembrando que a *quantidade de movimento linear* de uma partícula foi definida como o produto de sua massa m e de sua velocidade $\mathbf{v}$ [Seção 12.3], escrevemos

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\,\mathbf{Imp}_{1\to2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.32}$$

Essa equação expressa que a quantidade de movimento linear $m\mathbf{v}_2$ de uma partícula no instante t_2 pode ser obtida adicionando-se à sua quantidade de movimento $m\mathbf{v}_1$ no instante t_1 os *impulsos* das forças exercidas sobre a partícula durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2. Para fins de cálculo, as quantidades de movimento e os impulsos podem ser expressos em termos de seus componentes retangulares, e a Eq. (13.32) pode ser substituída pelas equações escalares equivalentes. As unidades de quantidade de movimento e impulso são N · s no SI. Para resolver problemas usando essa equação, você deve seguir os seguintes passos:

1. Desenhar um diagrama mostrando a partícula, suas quantidades de movimento em t_1 e t_2 e os impulsos das forças exercidas pela partícula durante o intervalo de tempo de t_1 a t_2.

2 Calcular o impulso de cada força, expressando-o em termos de seus componentes retangulares se mais do que uma direção estiver envolvida. Você pode encontrar os seguintes casos:

a. O intervalo de tempo é finito e a força é constante.

$$\mathbf{Imp}_{1\to2} = \mathbf{F}(t_2 - t_1)$$

b. O intervalo de tempo é finito e a força é uma função de *t*.

$$\mathbf{Imp}_{1\to2} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt$$

c. O intervalo de tempo é muito pequeno e a força é muito grande. A força é chamada de *força impulsiva* e o seu impulso durante o intervalo de tempo $t_2 - t_1 = \Delta t$ é

$$\mathbf{Imp}_{1\to2} = \mathbf{F}\,\Delta t$$

Observa-se que esse impulso é *nulo para uma força não impulsiva* tal como o peso de um corpo, a força exercida por uma *mola* e qualquer outra força que seja conhecida como pequena em comparação com as forças impulsivas. Reações desconhecidas, porém, *não podem ser admitidas* como não impulsivas e seus impulsos devem ser levados em conta.

3. Substituir os valores obtidos para os impulsos na Eq. (13.32) ou nas equações escalares equivalentes. Você verá que as forças e as velocidades dos problemas desta lição estão contidas em um plano. Logo, você escreverá duas equações escalares e resolverá essas equações para *duas incógnitas.* Essas incógnitas podem ser um *tempo* [Problema Resolvido 13.10], uma *velocidade* e um *impulso* [Problema Resolvido 13.12], ou uma *força impulsiva média* [Problema Resolvido 13.11].

4. Quando diversas partículas estão envolvidas, deve-se desenhar um diagrama separado para cada partícula, mostrando as quantidades de movimento inicial e final da partícula, bem como os impulsos das forças exercidas sobre a partícula.

a. Entretanto, é usualmente conveniente considerar em primeiro lugar um diagrama incluindo todas as partículas. Esse diagrama conduz à equação

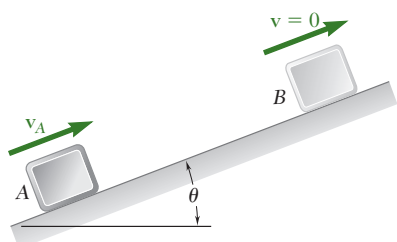
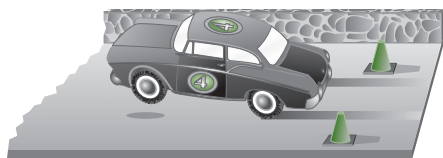
$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\ \mathbf{Imp}_{1\to 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.33}$$

onde os impulsos *de somente forças externas ao sistema* precisam ser considerados. Logo, as duas equações escalares equivalentes não conterão nenhum dos impulsos das forças internas desconhecidas.

b. Se a soma dos impulsos das forças externas for nula, a Eq. (13.33) reduz-se a

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.34}$$

o qual expressa que *a quantidade de movimento total das partículas se conserva.* Isso ocorre se a resultante das forças externas é nula ou, quando o intervalo de tempo Δt é muito curto (movimento impulsivo), se todas as forças externas não são impulsivas. Todavia, tenha em mente que a quantidade de movimento total pode se conservar em *uma direção,* mas não necessariamente em outra [Problema Resolvido 13.12].

PROBLEMAS

13.119 Um automóvel de 1.200 kg está movendo a uma velocidade 90 km/h quando os freios são totalmente aplicados, causando o escorregamento de todas as quatro rodas. Determine o tempo necessário para parar o automóvel (*a*) no pavimento seco ($\mu_k = 0{,}75$), (*b*) na rodovia gelada ($\mu_k = 0{,}10$).

13.120 Um transatlântico de 40 Mg toneladas tinha sua velocidade inicial de 4 km/h. Desprezando a resistência ao atrito da água, determine o tempo necessário para trazer o transatlântico para o repouso usando um único rebocador que exerce uma força de 140 kN.

Figura P13.121

13.121 A velocidade inicial do bloco na posição *A* é 9 m/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é $\mu_k = 0{,}30$, determine o tempo que o bloco leva para atingir *B* com velocidade zero se (*a*) $\theta = 0$, (*b*) $\theta = 20°$.

13.122 Uma partícula de 2 kg está sujeita a uma força expressa em newtons, $\mathbf{F} = (8 - 6t)\mathbf{i} + (4 - t^2)\mathbf{j} + (4 + t)\mathbf{k}$. Sabendo que a velocidade da partícula é $\mathbf{v} = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (100 \text{ m/s})\mathbf{j} - (250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ em $t = 0$, determine (*a*) o tempo em que a velocidade é paralela ao plano *yz*, (*b*) a velocidade correspondente da partícula.

Figura P13.123

13.123 Marcas de derrapagem em uma pista de disputa de arrancadas indicam que as rodas traseiras (de tração) de um carro derrapam durante os primeiros 18 m da pista de 400 m. (*a*) Sabendo que o coeficiente e atrito cinético é 0,60, determine o menor tempo possível para o carro percorrer a primeira parte de 18 m da pista, se ele parte do repouso com as rodas dianteiras sem contato com o solo. (*b*) Determine o tempo mínimo para o carro fazer toda a corrida se, após derrapar por 18 m, as rodas deslizam pelo restante da corrida. Considere para a parte de deslizamento da corrida que 60% do peso do carro recaem sobre as rodas traseiras e que o coeficiente de atrito estático é de 0,85. Ignore as resistências do ar e de rolamento.

13.124 Um caminhão viaja em uma estrada nivelada a uma velocidade de 90 km/h quando seus freios são aplicados para desacelerá-lo até 30 km/h. Um sistema de freios antiderrapantes limita a força de frenagem a um valor no qual as rodas do caminhão ficam na iminência de deslizar. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a estrada e as rodas é 0,65, determine o menor tempo necessário para o caminhão reduzir a velocidade.

13.125 Um caminhão desce uma ladeira com 4% de inclinação a uma velocidade de 90 km/h, quando os freios são aplicados para desacelerá-lo até 30 km/h. Um sistema de freios antiderrapantes limita a força de frenagem a um valor no qual as rodas do caminhão ficam na iminência de deslizar. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a estrada e as rodas é de 0,60, determine o menor tempo necessário para o caminhão reduzir a velocidade.

13.126 A bagagem no piso de um vagão-bagageiro de um trem de alta velocidade não está impedida de se movimentar, exceto pelo atrito. Determine o menor valor admissível do coeficiente de atrito estático entre uma caixa e o piso do vagão para que a caixa não deslize quando o trem diminuir sua velocidade a uma taxa constante de 200 km/h para 90 km/h em um intervalo de tempo de 12 s.

13.127 Resolva o Problema 13.126, considerando que o trem está descendo uma inclinação de 5%.

13.128 Um veleiro de 500 kg com seus tripulantes veleja a favor do vento a 12 km/h quando sua vela-balão é içada para aumentar a velocidade do veleiro. Determine a força resultante fornecida pela vela durante o intervalo de 10 s que o veleiro leva para atingir uma velocidade de 18 km/h.

Figura *P13.128*

13.129 Um trem leve composto de dois vagões viaja a 70 km/h. A massa do vagão *A* é 18.000 kg e a massa do vagão *B* é 13.000 kg. Quando os freios são acionados repentinamente, uma força de frenagem constante de 20 kN é aplicada a cada vagão. Determine (*a*) o tempo necessário para o trem parar após o acionamento dos freios, (*b*) a força no engate entre os vagões durante a desaceleração do trem.

Figura P13.129

13.130 Resolva o Problema 13.129, considerando que a força de frenagem constante de 20 kN é aplicada no carro *B* mas que os freios no carro *A* não são aplicados.

13.131 Um caminhão-baú, com um cavalo mecânico de 2.000 kg um baú 8.000 kg, viaja em uma estrada nivelada a 90 km/h. Os freios da carreta do baú traseiro falham e o sistema antiderrapagem do cavalo-mecânico fornece a maior força possível para evitar que as rodas deslizem. Sabendo que o coeficiente de atrito estático é 0,65, determine (*a*) o menor tempo necessário para o caminhão parar, (*b*) a força no engate durante esse tempo.

Figura P13.131

13.132 Um cilindro *C* de 8 kg repousa sobre uma plataforma *A* de 4 kg sustentada por uma corda que passa sobre as roldanas *D* e *E* e é presa a um bloco *B* de 4 kg. Sabendo que o sistema é liberado do repouso, determine (*a*) a velocidade do bloco *B* após 0,8 s, (*b*) a força exercida pelo cilindro sobre a plataforma.

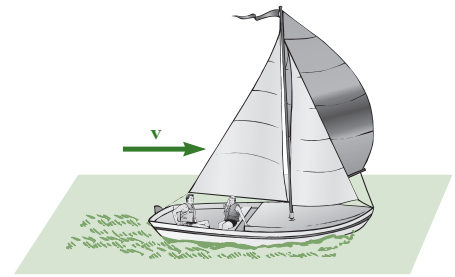
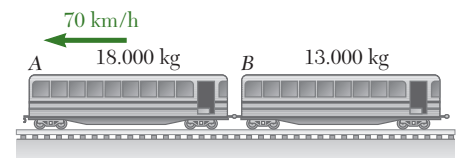
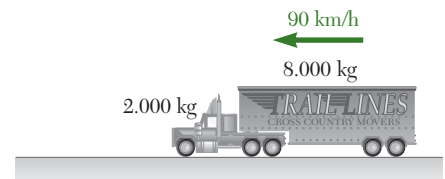
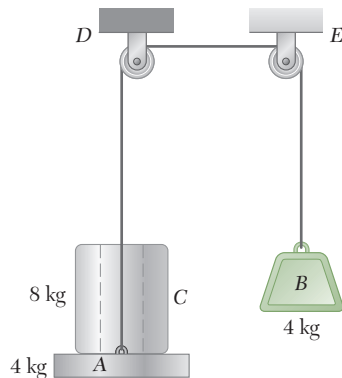
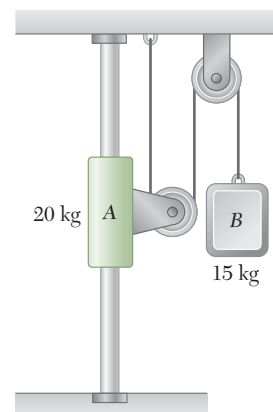



Figura P13.132

13.133 O sistema mostrado na figura é liberado do repouso. Determine o tempo necessário para a velocidade de *A* atingir 1 m/s. Despreze o atrito e a massa das roldanas.

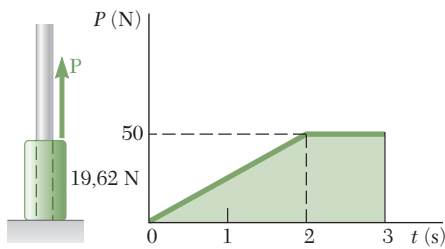



Figura *P13.133*

Figura P13.134 e P13.135

13.134 Um colar de 2 kg pode deslizar sobre uma barra vertical sem atrito e está sujeito a uma força **P** cuja intensidade varia como mostrado na figura. Sabendo que o colar está inicialmente em repouso, determine sua velocidade em (*a*) $t = 2$ s e (*b*) $t = 3$ s.

13.135 Um colar de 2 kg pode deslizar sobre uma barra vertical sem atrito e está sujeito a uma força **P** cuja intensidade varia como mostrado na figura. Sabendo que o colar está inicialmente em repouso, determine (*a*) a máxima velocidade do colar, (*b*) o tempo em que a velocidade é zero.

Figura P13.136 e P13.137

13.136 Um bloco de 12,74 kg em repouso é acionado por uma força **P** que varia como mostrado na figura. Sabendo que os coeficientes de atrito entre o bloco e a superfície são $\mu_s = 0{,}50$, $\mu_k = 0{,}40$ determine (*a*) o tempo no qual o bloco começará a se mover, (*b*) a velocidade máxima alcançada do bloco, (*c*) o tempo no qual o bloco vai parar de se mover.

13.137 Resolva o Problema 13.136, considerando que o peso do bloco é 17,84 kg.

13.138 Um modelo simplificado baseado em uma linha reta deve ser obtido para a variação de pressão dentro do cano de um rifle de 10 mm de diâmetro durante o disparo de uma bala de 20 g. Sabendo que leva 1,6 ms para a bala percorrer o comprimento do cano e que a velocidade da bala na saída é de 700 m/s, determine o valor de p_0.

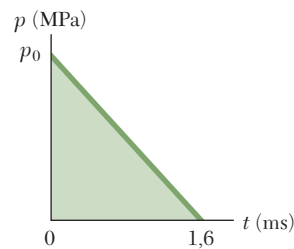



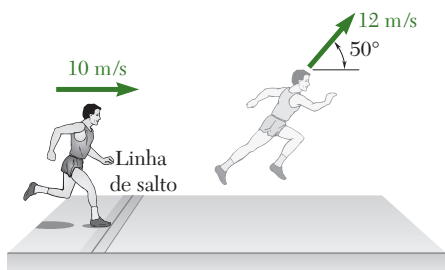
Figura *P13.138*

13.139 O seguinte modelo matemático foi sugerido para a variação na pressão dentro do diâmetro de 10 mm do cano de um rifle quando uma bala de 25 g é disparada:

$$p(t) = (950 \text{ MPa})e^{-t/(0{,}16 \text{ ms})}$$

onde t é expresso em ms. Sabendo que leva 1,44 ms para a bala percorrer o comprimento do cano e que a velocidade da bala na saída é de 520 m/s, determine o erro percentual introduzido se a equação acima é usado para calcular a velocidade no bocal do rifle.

Figura P13.140

13.140 O salto triplo é uma prova do atletismo em que o atleta faz uma corrida de arrancada e tenta se projetar o mais longe possível com um salto inicial, dois passos e um salto final. A figura mostra o salto inicial do atleta. Admitindo que ele se aproxime da linha de salto vindo da esquerda com uma velocidade horizontal de 10 m/s, que permaneça em contato com o solo por 0,18 s e salte com um ângulo de 50° a uma velocidade de 12 m/s, determine o componente vertical da força impulsiva média exercida pelo solo sobre seu pé. Dê sua resposta em termos do peso W do atleta.

13.141 A última parte da prova de salto triplo do atletismo é o salto final, em que o atleta faz o último salto e aterrissa em uma caixa de areia. Considerando que a velocidade de um atleta de 90 kg justamente antes de aterrissar é de 9 m/s a um ângulo de 35° com a horizontal, e que o atleta para por completo em 0,22 s após a aterrissagem, determine o componente horizontal da força impulsiva média exercida sobre seus pés durante a aterrissagem.

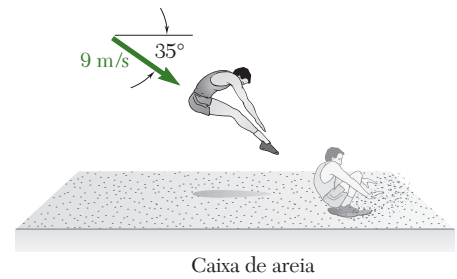



Figura P13.141

13.142 Uma estimativa da carga esperada sobre cintos de segurança é feita antes de se desenhar protótipos de cintos que serão avaliados em testes de impacto com automóveis. Admitindo que um automóvel que roda a 70 km/h seja parado em 110 ms, determine (*a*) a força impulsiva média exercida por um homem de 100 kg sobre o cinto e (*b*) a força máxima F_m exercida sobre o cinto caso o diagrama força-tempo tenha a forma mostrada na figura.

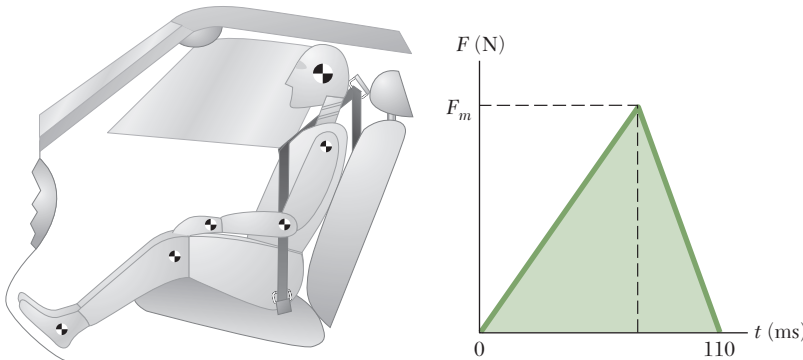



Figura P13.142

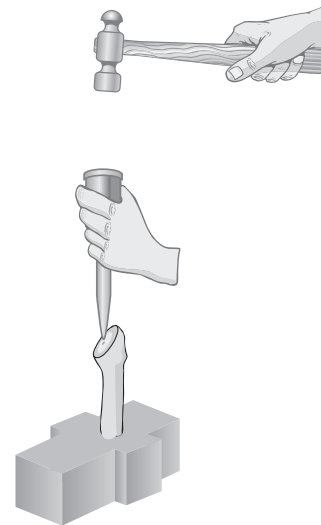
13.143 Uma bola de golfe de 46 g é golpeada com um taco de golfe e o deixa a uma velocidade de 50 m/s. Consideramos que para $0 \leq t \leq t_0$, onde t_0 é a duração do impacto, a intensidade F da força exercida na bola pode ser expressa como $F = F_m \text{ sen } (\pi t/t_0)$. Sabendo que $t_0 = 0{,}5$ ms, determine o máximo valor de F_m da força exercida na bola.

13.144 O projeto para uma nova prótese de quadril está sendo estudado usando um instrumento de inserção e um fêmur fixo falso. Considerando que o punção aplica uma força média de 2 kN durante um tempo de 2 ms sobre a prótese de 200 g, determine (*a*) a velocidade da prótese imediatamente depois do impacto, (*b*) a resistência média da prótese para penetração se esta move 1 mm antes de entrar em repouso.

Figura *P13.144*

13.145 Um vagão ferroviário de 20 Mg movendo a 4 km/h é acoplado a um vagão ferroviário de 40 Mg que está em repouso com as rodas travadas ($\mu_k = 0{,}30$). Determine (*a*) a velocidade dos carros depois que acoplamento for completado, (*b*) o tempo que os carros levam para ficar em repouso.

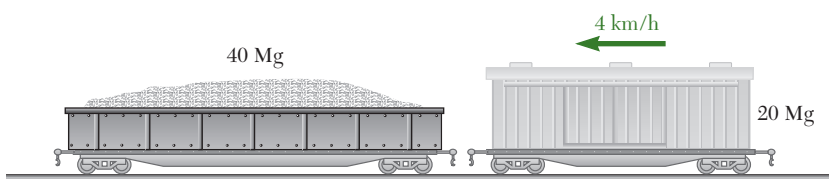



Figura P13.145

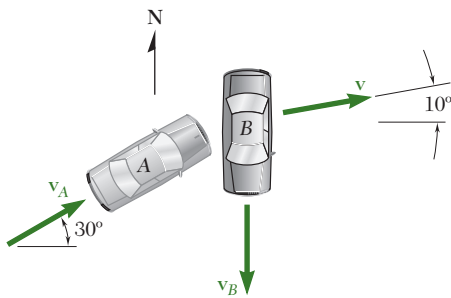



Figura P13.146

13.146 Em um cruzamento, o carro B ia para o sul e o carro A viajava 30° para nordeste, quando se envolveram em uma colisão. Pela investigação, soube-se que, após a batida, os dois carros se engataram e derraparam em um ângulo de 10° para nordeste. Cada motorista declarou que dirigia à velocidade limite de 50 km/h e que tentou reduzir a velocidade, mas que não pôde evitar a batida porque o outro motorista vinha muito mais rápido. Sabendo que as massas dos carros A e B eram de 1.500 kg e 1.200 kg, respectivamente, determine (a) que carro andava mais rápido, (b) a velocidade do carro mais rápido se o carro mais lento se deslocava na velocidade limite.

13.147 Uma mãe e seu filho estão esquiando juntos, com a mãe segurando a ponta de uma corda amarrada na cintura do filho. Eles estão se movendo a uma velocidade de 7,2 km/h na parte plana de uma trilha de esqui quando a mãe observa que eles estão se aproximando de um trecho de descida. Ela decide puxar a corda para reduzir a velocidade do filho. Sabendo que essa manobra causa a redução da velocidade da criança pela metade em 3 s e desprezando o atrito, determine (a) a velocidade da mãe no final do intervalo de 3 s, (b) o valor médio da tração na corda durante o intervalo de tempo.

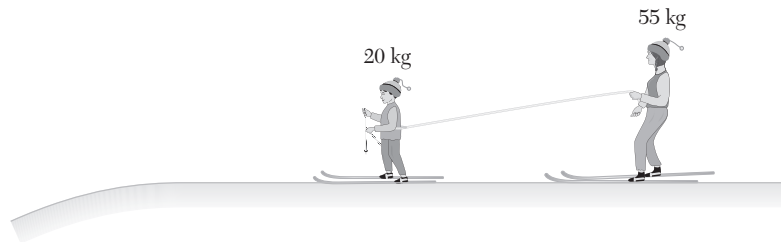



Figura P13.147

13.148 A bala B tem massa de 15 g e os blocos A e C de 1,5 kg. O coeficiente de atrito entre os blocos e o plano $\mu_k = 0{,}25$. Inicialmente a bala está se movendo em v_0 e os blocos A e C estão em repouso (Figura 1). Depois que a bala passa por meio de A, ela penetra em C e todos os três objetos param na posição mostrada na figura (Figura 2). Determine a velocidade inicial da bala v_0.

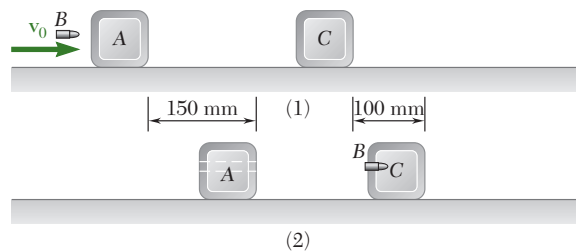



Figura P13.148

13.149 Duas esferas idênticas A e B, cada uma com massa m, estão conectadas por uma corda inextensível e não elástica de comprimento L, e em repouso a uma distância a uma da outra sobre uma superfície horizontal sem atrito. A esfera B recebe uma velocidade $\mathbf{v}_0$ em uma direção perpendicular à linha AB e se move sem atrito até atingir a posição B', quando a corda fica tensionada. Determine (a) a intensi-

dade da velocidade de cada esfera imediatamente depois que a corda fica tensionada, (b) a energia perdida quando a corda fica tensionada.

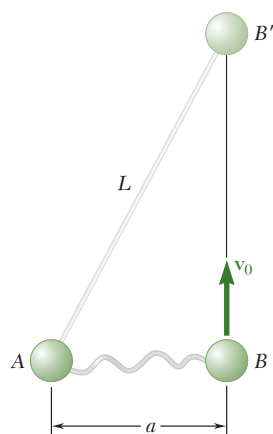



Figura P13.149

13.150 Dois nadadores A e B, com massas de 76 kg e 50 kg, respectivamente, estão em cantos diagonalmente opostos de um flutuador quando percebem que o flutuador soltou-se de seu ancoradouro. O nadador A imediatamente começa a andar em direção a B com velocidade de 0,6 m/s em relação ao flutuador. Sabendo que o flutuador tem massa de 120 kg, determine (a) a velocidade do flutuador caso B não se mova, (b) a velocidade com que B deve andar em direção a A para que o flutuador não se mova.

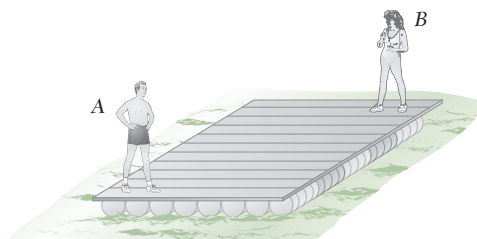



Figura P13.150

13.151 Uma bola de 125 g que se move a uma velocidade de 3 m/s atinge uma placa de 250 g sustentada por molas. Admitindo que não haja perda de energia no impacto, determine (a) a velocidade da bola imediatamente após o impacto, (b) o impulso da força exercida pela placa sobre a bola.

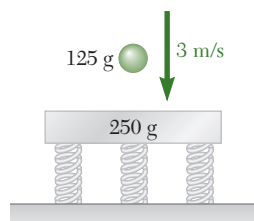



Figura P13.151

13.152 Uma bala de massa m é atirada com velocidade $\mathbf{v}_0$ formando um ângulo θ com a horizontal e se aloja em um bloco de madeira de massa M. O bloco pode rolar sem atrito no piso duro e é impedido por molas de atingir a parede. Determine os componentes horizontal e vertical do impulso da força exercida pelo bloco na bala.

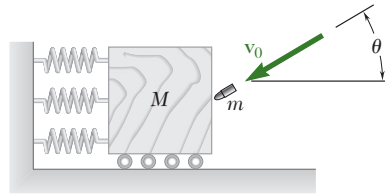



Figura P13.152

13.153 A fim de testar a resistência ao impacto de uma corrente, ela é suspensa por uma viga rígida de 120 kg apoiada em duas colunas. Uma barra presa no último elo é, então, golpeada por um bloco de 30 kg que cai a uma altura de 1,5 m. Determine o impulso inicial exercido sobre a corrente e a energia absorvida pela corrente, considerando que o bloco não dá rebote na barra e que as colunas de apoio da viga são (*a*) perfeitamente rígidas e (*b*) equivalentes a duas molas perfeitamente elásticas.

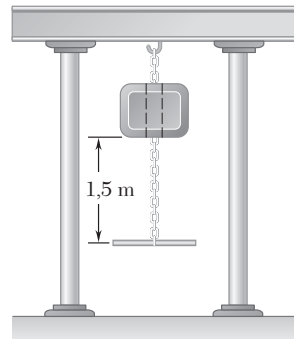



Figura *P13.153*

13.154 Um jogador de beisebol, ao pegar uma bola, pode amortecer o impacto levando sua mão para trás. Considerando que uma bola de 140 g atinge sua luva a 140 km/h e que o jogador puxa sua mão para trás durante o impacto a uma velocidade média de 9 m/s por uma distância de 150 mm, fazendo a bola parar, determine a força impulsiva média exercida sobre a mão do jogador.

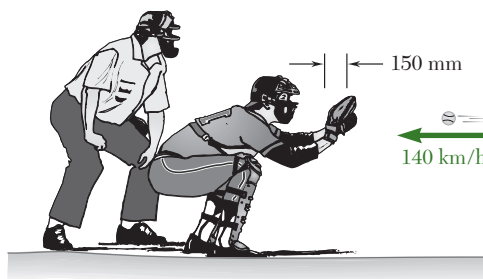



Figura *P13.154*

13.12 Impacto

Uma colisão entre dois corpos que ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno e durante o qual os dois corpos exercem forças relativamente grandes um sobre o outro é denominada *impacto.* A normal comum às superfícies em contato durante o impacto é denominada *linha de impacto.* Se os centros de massa dos dois corpos em colisão estão localizados sobre essa linha, o impacto é chamado de *impacto central.* Caso contrário, o impacto é dito *excêntrico.* Nosso estudo se limitará aqui ao impacto central de duas partículas. A análise do impacto excêntrico de dois corpos rígidos será considerada posteriormente, na Seção 17.12.

(*a*) Impacto central direto (*b*) Impacto central oblíquo

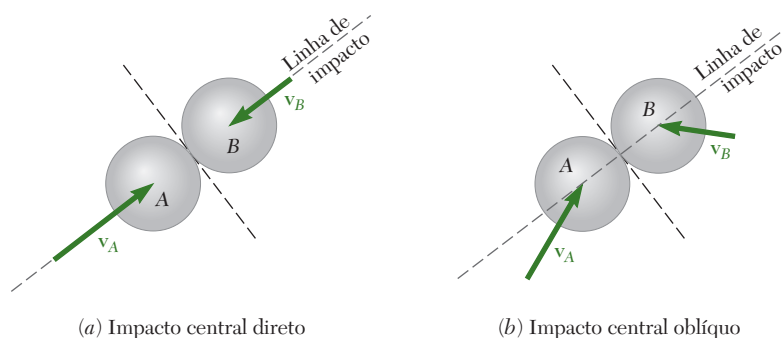



Figura 13.20

Se as velocidades das duas partículas são orientadas ao longo da linha de impacto, o impacto é denominado *impacto direto* (Fig. 13.20*a*); se uma ou ambas as partículas se inovem ao longo de outra linha que não a linha de impacto, é denominado *impacto oblíquo* (Fig. 13.20*b*).

13.13 Impacto central direto

Considere duas partículas A e B, de massas m_A e m_B que se movem na mesma linha reta e à direita com velocidades conhecidas $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ (Fig. 13.21*a*). Se $\mathbf{v}_A$ é maior que $\mathbf{v}_B$, a partícula A finalmente atingirá a partícula B. Sob o impacto, as duas partículas se *deformarão* e, ao final do período de deformação, elas terão a mesma velocidade $\mathbf{u}$ (Fig. 13.21*b*). Tem início, então, um período de *restituição,* ao final do qual, dependendo da intensidade das forças de impacto e dos materiais envolvidos, as duas partículas retomarão a sua forma original ou ficarão permanentemente deformadas. Nosso propósito aqui é determinar as velocidades $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$ das partículas ao final do período de restituição (Fig. 13.21*c*).

Considerando primeiro as duas partículas como um único sistema, notamos que não há força externa impulsiva. Logo, a quantidade de movimento total das duas partículas se conserva, e escrevemos

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$

Como todas as velocidades consideradas estão orientadas ao longo do mesmo eixo, podemos substituir a equação obtida pela seguinte relação envolvendo apenas componentes escalares

$$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B \tag{13.37}$$

(*a*) Antes do impacto

(*b*) Na deformação máxima

(*c*) Após o impacto

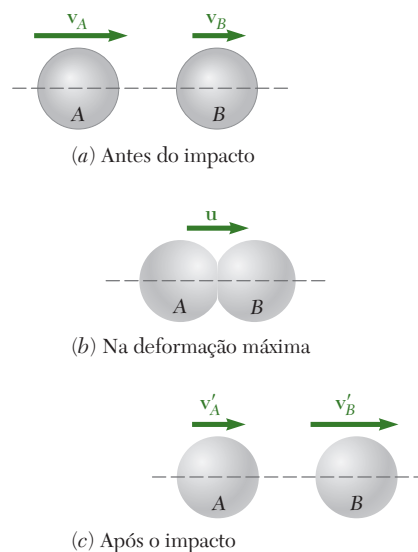



Figura 13.21

Um valor positivo para qualquer das grandezas escalares v_A, v_B, v'_A ou v'_B significa que o vetor correspondente é direcionado para a direita; um valor negativo indica que o vetor correspondente é direcionado para a esquerda.

Para obter as velocidades $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$, é necessário estabelecer uma segunda relação entre os escalares v'_A e v'_B. Com esse objetivo, consideremos o movimento da partícula A durante o período de deformação e apliquemos o princípio de impulso e quantidade de movimento. Desde que a única força impulsiva que age sobre A durante esse período é a força $\mathbf{P}$ exercida por B (Fig. 13.22*a*), escrevemos, usando de novo componentes escalares,

$$m_A v_A - \int P\,dt = m_A u \tag{13.38}$$

onde a integral se estende sobre o período de deformação. Considerando agora o movimento de A durante o período de restituição, e representando por $\mathbf{R}$ a força exercida por B sobre A durante esse período (Fig. 13.22*b*), escrevemos

$$m_A u - \int R\,dt = m_A v'_A \tag{13.39}$$

onde a integral se estende sobre o período de restituição.

(*a*) Período de deformação

(*b*) Período de restituição

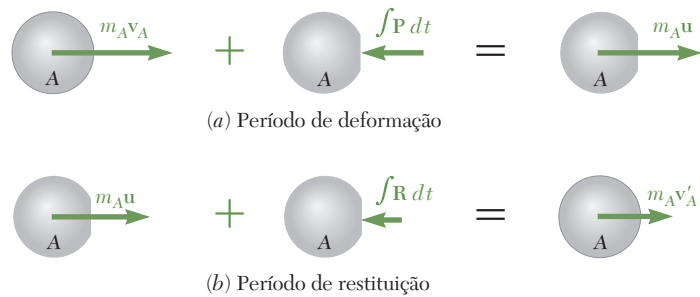



Figura 13.22

Em geral, a força $\mathbf{R}$ exercida sobre A durante o período de restituição é diferente da força $\mathbf{P}$ exercida durante o período de deformação e a intensidade $\int P\,dt$ do seu impulso é menor que a intensidade $\int P\,dt$ do impulso de $\mathbf{P}$. A razão entre as intensidades dos impulsos correspondentes, respectivamente, ao período de restituição e ao período de deformação é denominada *coeficiente de restituição* e é representada por e. Escrevemos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \tag{13.40}$$

O valor do coeficiente de restituição e está sempre entre 0 e 1. Ele depende em grande parte dos dois materiais envolvidos, mas também varia significativamente com a velocidade de impacto e com o formato e tamanho dos dois corpos em colisão.

Resolvendo as Eqs.(13.38) e (13.39) para os dois impulsos e substituindo na Eq. (13.40), escrevemos

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u} \tag{13.41}$$

Uma análise semelhante da partícula B conduz à relação

$$e = \frac{v'_B - u}{u - v_B} \tag{13.42}$$

Como os quocientes em (13.41) e (13.42) são iguais, eles também são iguais ao quociente obtido somando-se, respectivamente, seus numeradores e seus denominadores. Temos, então,

$$e = \frac{(u - v'_A) + (v'_B - u)}{(v_A - u) + (u - v_B)} = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B}$$

e

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \tag{13.43}$$

Uma vez que $v'_B - v'_A$ representa a velocidade relativa das duas partículas após o impacto e $v_A - v_B$ representa sua velocidade relativa antes do impacto, a Eq. (13.43) expressa que *a velocidade relativa das duas partículas após o impacto pode ser obtida multiplicando-se sua velocidade relativa antes do impacto pelo coeficiente de restituição.* Essa propriedade é usada para determinar experimentalmente o valor do coeficiente de restituição de dois materiais dados.

As velocidades de duas partículas após o impacto podem agora ser obtidas resolvendo as Eqs. (13.37) e (13.43) simultaneamente para v'_A e v'_B. Relembremos que a dedução das Eqs. (13.37) e (13.43) baseou-se na consideração de que a partícula B está localizada à direita de A e que ambas as partículas estão se movendo inicialmente para a direita. Se a partícula B se move inicialmente para a esquerda, o escalar v_B deve ser considerado negativo. A mesma convenção de sinais vale para as velocidades após o impacto: um sinal positivo para v'_A indicará que a partícula A move-se para a direita após o impacto e um sinal negativo indicará que ela se move para a esquerda.

Dois casos particulares de impacto são de especial interesse:

1. $e = 0$, *Impacto perfeitamente plástico.* Quando $e = 0$, a Eq. (13.43) fornece $v'_B = v'_A$. Não há período de restituição e ambas as partículas ficam juntas após o impacto. Substituindo $v'_B = v'_A = v'$ na Eq. (13.37), que expressa a conservação da quantidade de movimento total das partículas, escrevemos:

$$m_A v_A + m_B v_B = (m_A + m_B)v' \tag{13.44}$$

Essa equação pode ser resolvida para a velocidade comum v' das duas partículas após o impacto.

2. $e = 1$, *Impacto perfeitamente elástico.* Quando $e = 1$, a Eq. (13.43) reduz-se a

$$v'_B - v'_A = v_A - v_B \tag{13.45}$$

que expressa que as velocidades relativas antes e depois do impacto são iguais. Os impulsos recebidos pelas partículas durante o período de deformação e durante o período de restituição são iguais. As partículas movem-se para longe uma da outra após o impacto com

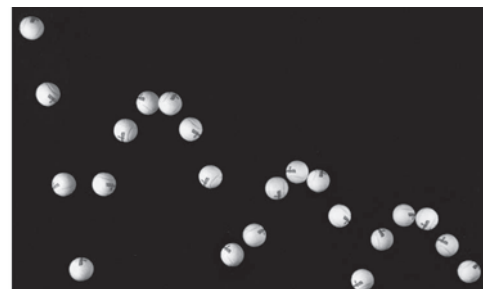



Foto 13.3 A altura que a bola de tênis quica decresce depois de cada impacto, porque seu coeficiente de restituição é menor que um e a energia é perdida a cada pulo.

a mesma velocidade relativa com que elas se aproximaram antes do impacto. As velocidades v'_A e v'_B podem ser obtidas resolvendo as Eqs. (13.37) e (13.45) simultaneamente.

Vale a pena notar que, *no caso de um impacto perfeitamente elástico, a energia total das duas partículas se conserva,* bem como sua quantidade de movimento total. As Eqs. (13.37) e (13.45) podem ser escritas como:

$$m_A(v_A - v'_A) = m_B(v'_B - v_B) \tag{13.37'}$$
$$v_A + v'_A = v_B + v'_B \tag{13.45'}$$

Multiplicando (13.37′) e (13.45′) membro a membro, temos

$$m_A(v_A - v'_A)(v_A + v'_A) = m_B(v'_B - v_B)(v'_B + v_B)$$
$$m_A v_A^2 - m_A(v'_A)^2 = m_B(v'_B)^2 - m_B v_B^2$$

Reordenando os termos da equação obtida e multiplicando por $\frac{1}{2}$, escrevemos

$$\tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}m_A(v'_A)^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v'_B)^2 \tag{13.46}$$

que expressa que a energia cinética das partículas se conserva. Todavia, deve-se notar que, *no caso geral de impacto,* isto é, quando e é diferente de 1, *a energia total das partículas não se conserva.* Isso pode ser verificado em qualquer caso comparando-se as energias cinéticas antes e depois do impacto. A perda de energia cinética é, em parte, transformada em calor e em parte gasta na geração de ondas elásticas dentro dos dois corpos em colisão.

13.14 Impacto central oblíquo

Consideremos agora o caso em que as velocidades das duas partículas em colisão *não* estão orientadas ao longo da linha de impacto (Fig. 13.23). Conforme indicado na Seção 13.12, o impacto é dito *oblíquo.* Como as velocidades $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$ das partículas após o impacto são desconhecidas tanto em direção quanto em intensidade, sua determinação requererá o uso de quatro equações independentes.

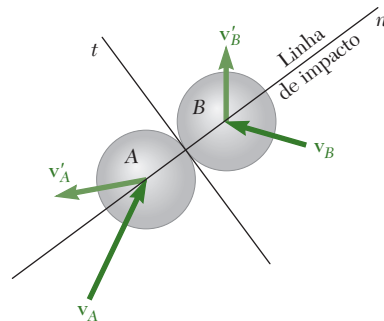



Figura 13.23

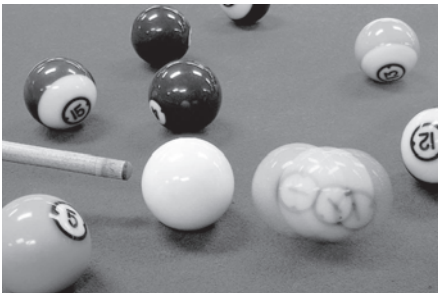



Foto 13.4 Quando uma bola de bilhar atinge outra há uma transferência de quantidade de movimento.

Escolhemos como eixos de coordenadas o eixo n ao longo da linha de impacto, isto é, ao longo da normal comum às superfícies em contato, e o eixo t ao longo de sua tangente comum. Admitindo que as partículas

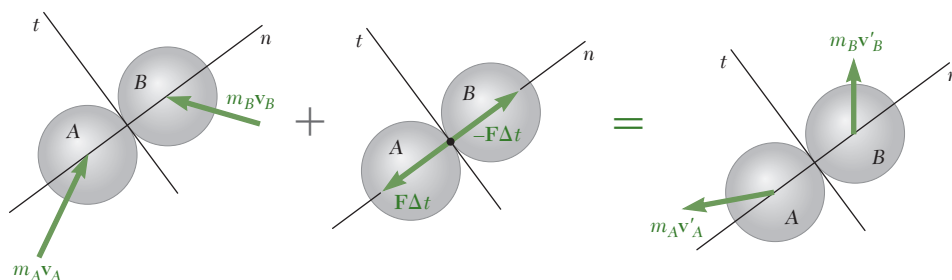



Figura 13.24

sejam perfeitamente *lisas e sem atrito,* observamos que os únicos impulsos exercidos sobre as partículas durante o impacto devem-se às forças internas orientadas ao longo da linha de impacto, isto é, ao longo do eixo n (Fig. 13.24). Segue-se que

1. o componente ao longo do eixo t da quantidade de movimento de cada partícula, considerada separadamente, conserva-se; portanto, o componente t da velocidade de cada partícula permanece inalterado. Escrevemos

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \qquad (v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.47}$$

2. O componente ao longo do eixo n da quantidade de movimento total das duas partículas conserva-se. Escrevemos

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \tag{13.48}$$

3. O componente ao longo do eixo n da velocidade relativa das duas partículas após o impacto é obtido multiplicando-se o componente n de sua velocidade relativa antes do impacto pelo coeficiente de restituição. De fato, uma dedução semelhante à dada na Seção 13.13 para o impacto central direto fornece

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

Logo, obtivemos quatro equações independentes que podem ser resolvidas para os componentes de velocidade de A e B após o impacto. Esse método de solução está exemplificado no Problema Resolvido 13.15.

Nossa análise do impacto central oblíquo de duas partículas baseou-se até agora na hipótese de que ambas as partículas moviam-se livremente antes e depois do impacto. Examinemos então o caso em que uma ou ambas as partículas em colisão estejam restringidas em seu movimento. Considere, por exemplo, a colisão entre o bloco A, que é obrigado a mover-se sobre uma superfície horizontal, e a bola B, que é livre para mover-se no plano da figura (Fig. 13.25). Considerando que não há atrito entre o bloco e a bola, ou entre o bloco e a superfície horizontal, notamos que os impulsos exercidos sobre o sistema consistem dos impulsos das forças internas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ orientados ao longo da linha de impacto, isto é, ao longo do eixo n, e do impulso da força externa $\mathbf{F}_{\text{ext}}$ exercida pela superfície horizontal sobre o bloco A e orientada ao longo da vertical (Fig. 13.26).

Figura 13.25

As velocidades do bloco A e da bola B imediatamente após o impacto são representadas por três incógnitas: a intensidade da velocidade $\mathbf{v}'_A$ do bloco A, que é conhecida como horizontal, e a intensidade e direção da

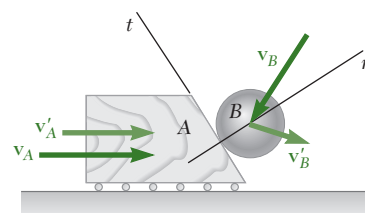
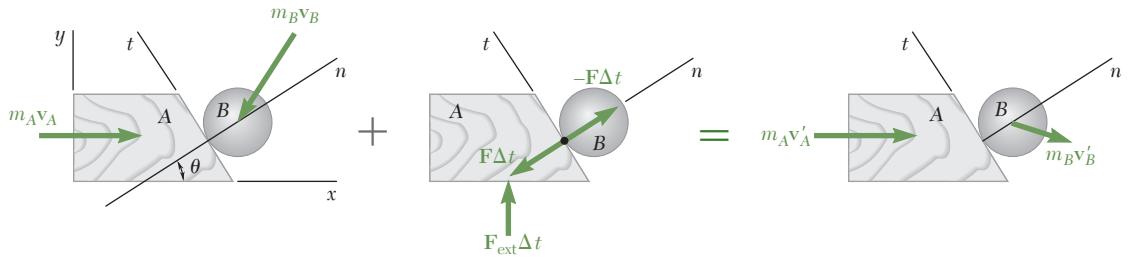



Figura 13.26

velocidade $\mathbf{v}'_B$ da bola B. Devemos, portanto, escrever três equações para expressar que

1. O componente ao longo do eixo t da quantidade de movimento da bola B conserva-se; logo, o componente t da velocidade da bola B permanece inalterado. Escrevemos

$$(v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.50}$$

2. O componente ao longo do eixo horizontal x da quantidade de movimento total do bloco A e da bola B conserva-se. Escrevemos

$$m_A v_A + m_B(v_B)_x = m_A v'_A + m_B(v'_B)_x \tag{13.51}$$

3. O componente ao longo do eixo n da velocidade relativa do bloco A e bola B após o impacto é obtido multiplicando-se o componente n de sua velocidade relativa antes do impacto pelo coeficiente de restituição. Novamente, escrevemos

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

Devemos notar, entretanto, que no caso aqui considerado, a validade da Eq. (13.49) não pode ser estabelecida por mera extensão da dedução apresentada na Seção 13.13 para o impacto central direto de duas partículas movendo-se em linha reta. De fato, essas partículas não estavam sujeitas a nenhum impulso externo, ao passo que o bloco A da presente análise está sujeito ao impulso exercido pela superfície horizontal. Para demonstrar que a Eq. (13.49) ainda é válida, aplicaremos antes o princípio de impulso e quantidade de movimento ao bloco A durante o período de deformação (Fig. 13.27). Considerando apenas os componentes horizontais, escrevemos

$$m_A v_A - (\textstyle\int P\,dt)\cos\theta = m_A u \tag{13.52}$$

onde a integral estende-se sobre o período de deformação e onde $\mathbf{u}$ representa a velocidade do bloco A ao final daquele período. Considerando agora o período de restituição, escrevemos de modo semelhante

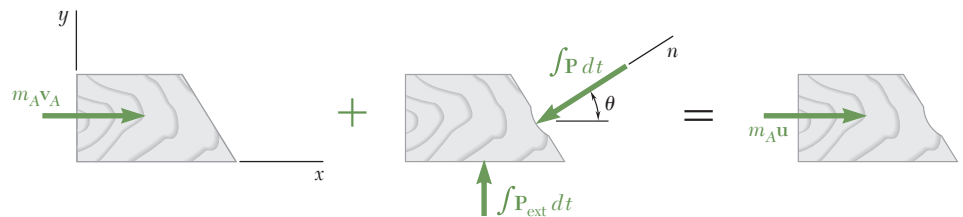



Figura 13.27

$$m_A u - \left(\int R\,dt\right)\cos\theta = m_A v'_A \qquad (13.53)$$

onde a integral estende-se sobre o período de restituição.

Relembrando da Seção 13.13 a definição do coeficiente de restituição, escrevemos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad (13.40)$$

Resolvendo as Eqs. (13.52) e (13.53) para as integrais $\int P\,dt$ e $\int R\,dt$ e substituindo na Eq. (13.40), obtemos, após reduções,

$$e = \frac{u - v'_A}{v_A - u}$$

ou, multiplicando todas as velocidades por cos θ para obter suas projeções sobre a linha de impacto:

$$e = \frac{u_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - u_n} \qquad (13.54)$$

Observamos que a Eq. (13.54) é idêntica à Eq. (13.41) da Seção 13.13, exceto pelos subscritos n que foram usados aqui para indicar que estamos considerando componentes de velocidade ao longo da linha de impacto. Como o movimento da bola B é irrestrito, a demonstração da Eq. (13.49) pode ser completada da mesma maneira que na dedução da Eq. (13.43) da Seção 13.13. Logo, concluímos que a relação (13.49) entre os componentes ao longo da linha de impacto das velocidades relativas de duas partículas em colisão permanece válida quando uma das partículas é restringida em seu movimento. A validade dessa relação é facilmente estendida ao caso em que ambas as partículas estão restringidas em seu movimento.

13.15 Problemas envolvendo energia e quantidade de movimento

Temos agora à nossa disposição três métodos diferentes para a solução de problemas de Cinética: a aplicação direta da segunda lei de Newton, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$; o método de trabalho e energia; e o método de impulso e quantidade de movimento. Para tirar o máximo proveito desses três métodos, você deve estar apto a escolher o mais adequado à solução de um dado problema. Você também deve estar preparado para usar diferentes métodos para a solução das várias partes de um problema quando tal procedimento parecer apropriado.

Você já observou que o método de trabalho e energia é, em muitos casos, mais rápido que a aplicação direta da segunda lei de Newton. Todavia, conforme indicado na Seção 13.4, o método de trabalho e energia tem limitações e deve ser frequentemente suplementado pelo uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Esse é o caso, por exemplo, quando você deseja determinar uma aceleração ou força normal.

Para a solução de problemas que não envolvam forças impulsivas, usualmente se concluirá que a equação $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ fornece uma solução tão rapidamente quanto o método de impulso e quantidade de movimento, e que o método de trabalho e energia, se aplicável, é mais rápido e mais conveniente. Em problemas de impacto, porém, o método de impulso e quantidade de movimento é o único praticável. Uma solução

baseada na aplicação direta de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ seria difícil, e o método de trabalho e energia não pode ser usado pois o impacto (com exceção do perfeitamente elástico) ocasiona uma perda de energia mecânica.

Muitos problemas envolvem apenas forças conservativas, exceto por uma curta fase de impacto durante a qual forças impulsivas atuam. A resolução de tais problemas pode ser dividida em várias partes. A parte correspondente à fase de impacto pede o uso do método de impulso e quantidade de movimento e das relações entre velocidades relativas, e as demais partes podem normalmente ser resolvidas pelo método de trabalho e energia. Todavia, se os problemas envolvem a determinação de uma força normal, o uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ é necessário.

Considere, por exemplo, um pêndulo A, de massa m_A e comprimento l, que é liberado sem velocidade de uma posição A_1 (Fig. 13.28*a*). O pêndulo oscila livremente em um plano vertical e bate em um segundo pêndulo B, de massa m_B e mesmo comprimento l, que está inicialmente em repouso. Após o impacto (com coeficiente de restituição e), o pêndulo B oscila de um ângulo θ que desejamos determinar.

A solução do problema pode ser dividida em três partes:

1. *Balanço do pêndulo A de A_1 até A_2.* O princípio de conservação de energia pode ser usado para determinar a velocidade $(\mathbf{v}_A)_2$ do pêndulo em A_2 (Fig. 13.28*b*).
2. *Batida do pêndulo A no pêndulo B.* Usando o fato de que a quantidade de movimento total dos dois pêndulos se conserva e da relação entre suas velocidades relativas, determinamos as velocidades $(\mathbf{v}_A)_3$ e $(\mathbf{v}_B)_3$ dois pêndulos após o impacto (Fig. 13.28*c*).
3. *Balanço do pêndulo B de B_3 até B_4.* Aplicando o princípio de conservação da energia ao pêndulo B, determinamos a elevação máxima y_4 alcançada por aquele pêndulo (Fig. 13.28*d*). O ângulo θ pode então ser determinado por trigonometria.

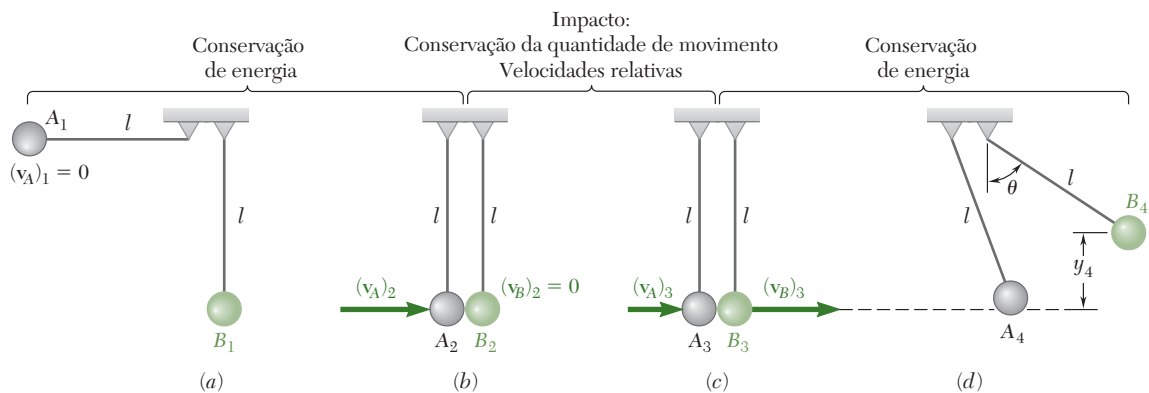



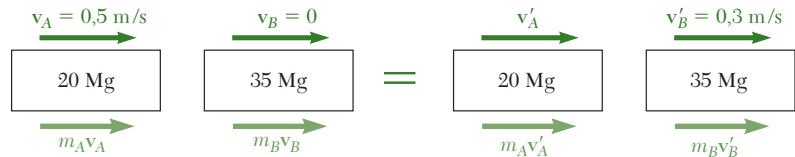
Figura 13.28

Observamos que, caso as tensões nas cordas que seguram os pêndulos tenham que ser determinadas, o método de solução descrito anteriormente deverá ser suplementado pelo uso de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$.

PROBLEMA RESOLVIDO 13.13

Um vagão ferroviário de 20 Mg move-se a uma velocidade de 0,5 m/s para a direita quando colide com um vagão de 35 Mg que está em repouso. Se após a colisão o vagão de 35 Mg é observado movendo-se para a direita a uma velocidade de 0,3 m/s, determine o coeficiente de restituição entre os vagões.

SOLUÇÃO

Expressamos que a quantidade de movimento total dos dois vagões se conserva.

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m_A\mathbf{v}'_A + m_B\mathbf{v}'_B$$
$$(20\text{ Mg})(+0{,}5\text{ m/s}) + (35\text{ Mg})(0) = (20\text{ Mg})v'_A + (35\text{ Mg})(+0{,}3\text{ m/s})$$
$$v'_A = -0{,}025\text{ m/s} \qquad \mathbf{v}'_A = 0{,}025\text{ m/s} \leftarrow$$

O coeficiente de restituição é obtido escrevendo-se

$$e = \frac{v'_B - v'_A}{v_A - v_B} = \frac{+0{,}3 - (-0{,}025)}{+0{,}5 - 0} = \frac{0{,}325}{0{,}5} \qquad e = 0{,}65 \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.14

Uma bola é arremessada contra uma parede vertical sem atrito. Logo antes que a bola atinja a parede, sua velocidade tem uma intensidade v e faz um ângulo de 30° com a horizontal. Sabendo-se que $e = 0{,}90$, determine a intensidade e a direção da velocidade da bola após o rebote na parede.

SOLUÇÃO

Decompomos a velocidade inicial da bola em componentes perpendicular e paralelo à parede, respectivamente:

$$v_n = v \cos 30° = 0{,}866v \qquad v_t = v \operatorname{sen} 30° = 0{,}500v$$

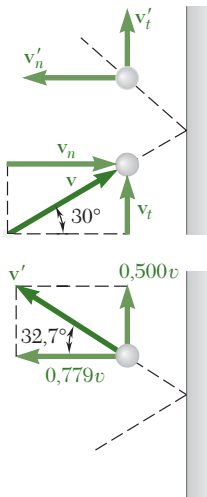
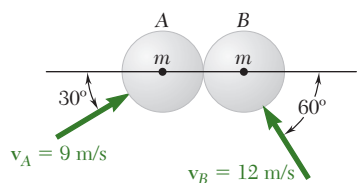
Movimento paralelo à parede. Como a parede é sem atrito, o impulso que ela exerce sobre a bola é perpendicular à parede. Logo, o componente paralelo à parede da quantidade de movimento da bola se conserva e temos

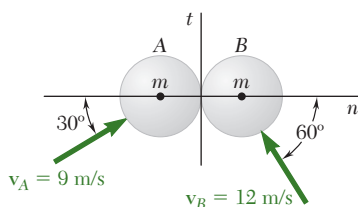
$$\mathbf{v}'_t = \mathbf{v}_t = 0{,}500v \uparrow$$

Movimento perpendicular à parede. Como a massa da parede (e da Terra) é essencialmente infinita, a expressão de que a quantidade de movimento total da bola e da parede se conserva não fornecerá informação útil. Usando a relação (13.49) entre as velocidades relativas, escrevemos

$$0 - v'_n = e(v_n - 0)$$
$$v'_n = -0{,}90(0{,}866v) = -0{,}779v \qquad \mathbf{v}'_n = 0{,}779v \leftarrow$$

Movimento resultante. Somando vetorialmente os componentes $\mathbf{v}'_n$ e $\mathbf{v}'_t$,

$$\mathbf{v}' = 0{,}926v \measuredangle 32{,}7° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.15

A intensidade e a direção das velocidades de duas bolas idênticas sem atrito antes de se chocarem estão mostradas na figura. Admitindo que $e = 0{,}90$, determine a intensidade e a direção da velocidade de cada bola após o impacto.

SOLUÇÃO

As forças impulsivas que as bolas exercem entre si durante o impacto estão orientadas ao longo da linha que liga os centros das bolas, denominada *linha de impacto*. Decompondo as velocidades em componentes orientados, respectivamente, ao longo da linha de impacto e ao longo da tangente comum às superfícies em contato, escrevemos

$$(v_A)_n = v_A \cos 30° = +7{,}79 \text{ m/s}$$
$$(v_A)_t = v_A \operatorname{sen} 30° = +4{,}5 \text{ m/s}$$
$$(v_B)_n = -v_B \cos 60° = -6 \text{ m/s}$$
$$(v_B)_t = v_B \operatorname{sen} 60° = +10{,}39 \text{ m/s}$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Nos esboços adjacentes, mostramos, em sequência, as quantidades iniciais de movimento, os impulsos e as quantidades de movimento finais.

Movimento ao longo da tangente comum. Considerando apenas os componentes em t, aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento a cada bola *separadamente*. Como as forças impulsivas estão orientadas ao longo da linha de impacto, o componente t da quantidade de movimento e, portanto, o componente t da velocidade de cada bola, permanece inalterado. Temos

$$(\mathbf{v}'_A)_t = 4{,}5 \text{ m/s} \uparrow \qquad (\mathbf{v}'_B)_t = 10{,}39 \text{ m/s} \uparrow$$

Movimento ao longo da linha de impacto. Na direção n, consideramos as duas bolas como um sistema único e notamos pela terceira lei de Newton que os impulsos internos são, respectivamente, $\mathbf{F}\,\Delta t$ e $-\mathbf{F}\,\Delta t$ e se cancelam. Escrevemos, então, que a quantidade de movimento total das bolas se conserva:

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$$
$$m(7{,}79) + m(-6) = m(v'_A)_n + m(v'_B)_n$$
$$(v'_A)_n + (v'_B)_n = 1{,}79 \qquad (1)$$

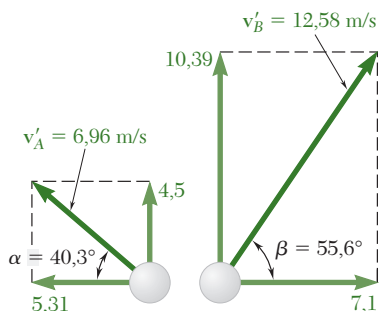
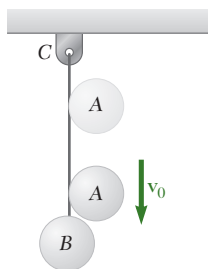
Usando a relação (13.49) entre velocidades relativas, escrevemos

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n]$$
$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (0{,}90)[7{,}79 - (-6)]$$
$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = 12{,}41 \qquad (2)$$

Resolvendo as Eqs. (1) e (2) simultaneamente, obtemos

$$(v'_A)_n = -5{,}31 \qquad (v'_B)_n = +7{,}1$$
$$(\mathbf{v}'_A)_n = 5{,}31 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (\mathbf{v}'_B)_n = 7{,}1 \text{ m/s} \rightarrow$$

Movimento resultante. Somando vetorialmente os componentes de velocidade de cada bola, obtemos

$$\mathbf{v}'_A = 6{,}96 \text{ m/s} \nwarrow 40{,}3° \qquad \mathbf{v}'_B = 12{,}58 \text{ m/s} \nearrow 55{,}6° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.16

A bola B está pendurada por uma corda inextensível BC. Uma bola idêntica A é liberada do repouso quando apenas toca na corda e adquire uma velocidade $\mathbf{v}_0$ antes de atingir a bola B. Considerando um impacto perfeitamente elástico ($e = 1$), sem atrito, determine a velocidade de cada bola imediatamente após o impacto.

SOLUÇÃO

Como a bola B está obrigada a se mover em um círculo de centro C, sua velocidade $\mathbf{v}_B$ após o impacto deve ser horizontal. Logo, o problema envolve três incógnitas: a intensidade v'_B da velocidade de B, a intensidade e a direção da velocidade $\mathbf{v}'_A$ de A após o impacto.

Princípio de impulso e quantidade de movimento: bola *A*

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A$$

$+\searrow$ componentes em t: $\quad mv_0 \text{ sen } 30° + 0 = m(v'_A)_t$

$$(v'_A)_t = 0{,}5v_0 \qquad (1)$$

Observamos que a equação usada expressa a conservação da quantidade de movimento da bola A ao longo da tangente comum às bolas A e B.

Princípio de impulso e quantidade de movimento: bolas *A* e *B*

$$m\mathbf{v}_A + \mathbf{T}\,\Delta t = m\mathbf{v}'_A + m\mathbf{v}'_B$$

$\overset{+}{\rightarrow}$ componentes em x: $\quad 0 = m(v'_A)_t \cos 30° - m(v'_A)_n \text{ sen } 30° - mv'_B$

Observamos que a equação obtida expressa a conservação da quantidade de movimento total na direção x. Substituindo $(v'_A)_t$ da Eq. (1) e reordenando os termos, escrevemos

$$0{,}5(v'_A)_n + v'_B = 0{,}433v_0 \qquad (2)$$

Velocidades relativas ao longo da linha de impacto. Como $e = 1$, a Eq. (13.49) fornece

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = (v_A)_n - (v_B)_n$$
$$v'_B \text{ sen } 30° - (v'_A)_n = v_0 \cos 30° - 0 \qquad (3)$$
$$0{,}5v'_B - (v'_A)_n = 0{,}866v_0$$

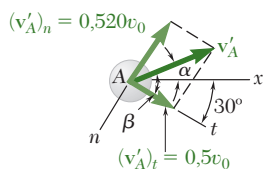
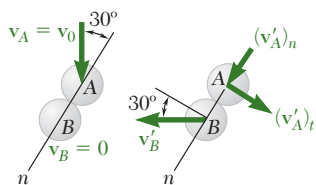
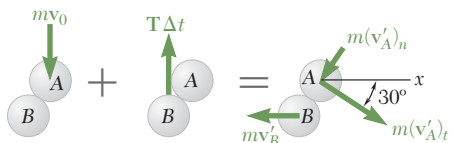
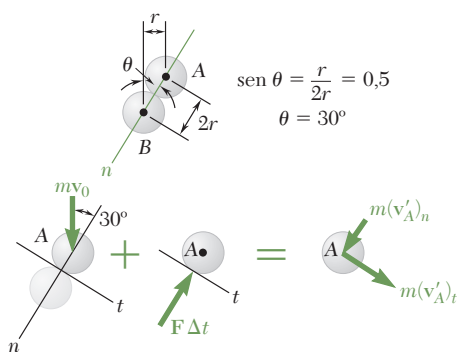
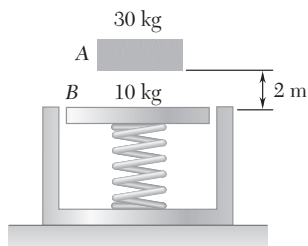
Resolvendo as Eqs. (2) e (3) simultaneamente, obtemos

$$(v'_A)_n = -0{,}520v_0 \qquad v'_B = 0{,}693v_0$$

$$\mathbf{v}'_B = 0{,}693v_0 \leftarrow \quad ◀$$

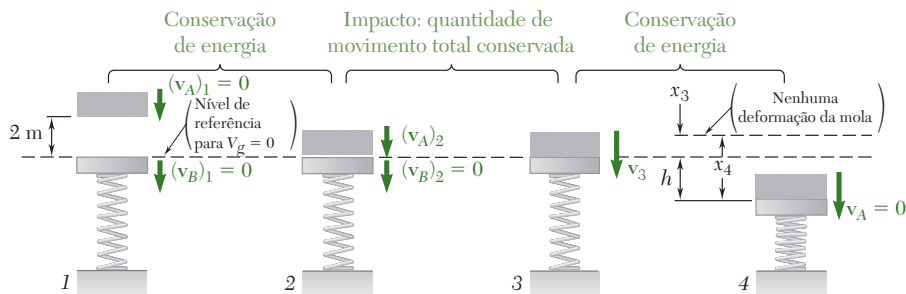
Retomando a Eq. (1), desenhamos o esboço adjacente e obtemos por trigonometria

$$v'_A = 0{,}721v_0 \qquad \beta = 46{,}1° \qquad \alpha = 46{,}1° - 30° = 16{,}1°$$

$$\mathbf{v}'_A = 0{,}721v_0 \measuredangle 16{,}1° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 13.17

Um bloco de 30 kg é solto de uma altura de 2 m sobre o prato de 10 kg de uma balança de mola. Considerando que o impacto seja perfeitamente plástico, determine a máxima deflexão do prato. A constante da mola é $k = 20$ kN/m.

SOLUÇÃO

O impacto entre o bloco e o prato *precisa* ser tratado separadamente; logo, dividimos a solução em três partes.

Conservação da energia. Bloco: $W_A = (30 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 294$ N

$$T_1 = \tfrac{1}{2} m_A (v_A)_1^2 = 0 \qquad V_1 = W_A y = (294 \text{ N})(2 \text{ m}) = 588 \text{ J}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2} m_A (v_A)_2^2 = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 \qquad V_2 = 0$$

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2: \qquad 0 + 588 \text{ J} = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg})(v_A)_2^2 + 0$$

$$(v_A)_2 = +6{,}26 \text{ m/s} \qquad (\mathbf{v}_A)_2 = 6{,}26 \text{ m/s} \downarrow$$

Impacto: conservação da quantidade de movimento. Como o impacto é perfeitamente plástico, $e = 0$; o bloco e o prato movem-se juntos após o impacto.

$$m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 = (m_A + m_B)v_3$$

$$(30 \text{ kg})(6{,}26 \text{ m/s}) + 0 = (30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})v_3$$

$$v_3 = +4{,}70 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_3 = 4{,}70 \text{ m/s} \downarrow$$

Conservação da energia. Inicialmente, a mola sustenta o peso W_B do prato; logo, a deflexão inicial da mola é

$$x_3 = \frac{W_B}{k} = \frac{(10 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = \frac{98{,}1 \text{ N}}{20 \times 10^3 \text{ N/m}} = 4{,}91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

Representando por x_4 a deflexão máxima total da mola, escrevemos

$$T_3 = \tfrac{1}{2}(m_A + m_B)v_3^2 = \tfrac{1}{2}(30 \text{ kg} + 10 \text{ kg})(4{,}70 \text{ m/s})^2 = 442 \text{ J}$$

$$V_3 = V_g + V_e = 0 + \tfrac{1}{2}kx_3^2 = \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)(4{,}91 \times 10^{-3})^2 = 0{,}241 \text{ J}$$

$$T_4 = 0$$

$$V_4 = V_g + V_e = (W_A + W_B)(-h) + \tfrac{1}{2}kx_4^2 = -(392)h + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

Notando que o deslocamento do prato é $h = x_4 - x_3$, escrevemos

$$T_3 + V_3 = T_4 + V_4:$$

$$442 + 0{,}241 = 0 - 392(x_4 - 4{,}91 \times 10^{-3}) + \tfrac{1}{2}(20 \times 10^3)x_4^2$$

$$x_4 = 0{,}230 \text{ m} \qquad h = x_4 - x_3 = 0{,}230 \text{ m} - 4{,}91 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$h = 0{,}225 \text{ m} \qquad h = 225 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta lição trata do *impacto de dois corpos,* isto é, da colisão que ocorre em um intervalo de tempo muito pequeno. Você resolverá diversos problemas sobre impacto expressando que a quantidade de movimento total dos dois corpos se conserva e observando a relação que existe entre as velocidades relativas dos dois corpos antes e depois do impacto.

1. Como primeiro passo em sua resolução você deve selecionar e desenhar os seguintes eixos de coordenadas: o eixo t, tangente às superfícies de contato dos dois corpos em colisão, e o eixo n, normal às superfícies de contato e que define a *linha de impacto.* Em todos os problemas desta lição, a linha de impacto passa pelo centro de massa dos corpos em colisão e o impacto é referido como um *impacto central.*

2. Em seguida, você desenhará um diagrama mostrando as quantidades de movimento dos corpos antes do impacto, os impulsos exercidos sobre os corpos durante o impacto e as quantidades de movimento finais dos corpos após o impacto (Fig. 13.24). Você observará, então, se o impacto é um *impacto central direto* ou um *impacto central oblíquo.*

3. Impacto central direto. Ocorre quando as velocidades dos corpos A e B antes do impacto estão *ambas orientadas ao longo da linha de impacto* (Fig. 13.20*a*).

a. Conservação da quantidade de movimento. Como as forças impulsivas são internas ao sistema, você pode escrever que a *quantidade de movimento total de A e B se conserva,*

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \tag{13.37}$$

onde v_A e v_B representam as velocidades dos corpos A e B antes do impacto e v'_A e v'_B representam suas velocidades após o impacto.

b. Coeficiente de restituição. Você também pode escrever a seguinte relação entre as *velocidades relativas* dos dois corpos antes e depois do impacto.

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \tag{13.43}$$

onde e representa o coeficiente de restituição entre os dois corpos.

Note que as Eqs. (13.37) e (13.43) são equações escalares que podem ser resolvidas para duas incógnitas. Além disso, preste atenção para adotar uma convenção de sinais que seja consistente para todas as velocidades.

4. Impacto central oblíquo. Ocorre quando *uma ou ambas* as velocidades iniciais dos dois corpos *não estão orientadas* ao longo da linha de impacto (Fig. 13.20*b*). Para resolver problemas deste tipo, você deve *primeiro obter os componentes* ao longo do eixo t e do eixo n das quantidades de movimento e impulsos mostrados em seu diagrama.

(*continua*)

a. Conservação da quantidade de movimento. Como as forças impulsivas agem ao longo da linha de impacto, isto é, ao longo do eixo n, os componentes ao longo do eixo t da quantidade de movimento *de cada corpo* se conserva. Logo, você pode escrever para cada corpo que os componentes em t de sua velocidade antes e depois do impacto são iguais,

$$(v_A)_t = (v'_A)_t \qquad (v_B)_t = (v'_B)_t \tag{13.47}$$

Do mesmo modo, o componente ao longo do eixo n da *quantidade de movimento total* do sistema se conserva,

$$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n \tag{13.48}$$

b. Coeficiente de restituição. A relação entre as velocidades relativas dos dois corpos antes e depois do impacto pode ser escrita apenas na direção n

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{13.49}$$

Você tem agora quatro equações que pode resolver para quatro incógnitas. Note que, após encontrar todas as velocidades, você pode determinar o impulso exercido pelo corpo A sobre o corpo B desenhando um diagrama de impulso e quantidade de movimento para B sozinho e equacionando os componentes na direção n.

c. Quando o movimento de um dos corpos em colisão é restringido, você deve incluir os impulsos das forças externas em seu diagrama. Você então observará que algumas das relações anteriores não valem. Entretanto, no exemplo mostrado na Fig. 13.26, a quantidade de movimento total do sistema conserva-se em uma direção perpendicular ao impulso externo. Você deve notar também que, quando um corpo A dá um rebote em uma superfície fixa B, a única equação de conservação de quantidade de movimento que pode ser usada é a primeira das Eqs. (13.47) [Problema Resolvido 13.14].

5. Lembre-se de que há perda de energia durante a maioria dos impactos. A única exceção é para os impactos *perfeitamente elásticos* ($e = 1$), onde a energia se conserva. Portanto, no caso geral de impacto, onde $e < 1$, a energia não se conserva. Logo, preste atenção para *não aplicar* o princípio de conservação da energia em uma situação de impacto. Em vez disso, aplique o princípio separadamente dos movimentos que precedem e seguem o impacto [Problema Resolvido 13.17].

PROBLEMAS

13.155 O coeficiente de restituição entre dois colares é 0,80, determine (*a*) suas velocidades após o impacto, (*b*) a energia perdida durante o impacto.

Figura P13.155

13.156 Os colares *A* e *B*, de mesma massa *m*, movem-se um em direção ao outro com as velocidades mostradas na figura. Sabendo que o coeficiente de restituição entre os colares é 0 (impacto plástico), mostre que após o impacto (*a*) a velocidade comum dos colares é igual à metade diferença entre suas velocidades antes do impacto, (*b*) a perda de energia cinética é $\frac{1}{4}m(v_A + v_B)^2$.

Figura P13.156

13.157 Dois blocos de aço estão deslizando em uma superfície horizontal sem atrito com as velocidades mostradas na figura. Sabendo que após o impacto a velocidade de *B* observada é de 3,1 m/s para a direita, determine o coeficiente de restituição entre os dois blocos.

13.158 Dois blocos de aço estão deslizando em uma superfície horizontal sem atrito com as velocidades mostradas na figura. Sabendo que o coeficiente de restituição entre os dois blocos é 0,75, determine (*a*) a velocidade de cada bloco após cada impacto, (*b*) a energia cinética perdida devida ao impacto.

Figura P13.157 e P13.158

13.159 Dois carros idênticos *A* e *B* estão em repouso em um pátio portuário de carga com os freios livres. Um carro *C*, de estilo um pouco diferente, mas de mesma massa, foi empurrado por estivadores e bate no carro *B* com uma velocidade de 1,5 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição é de 0,8 entre *B* e *C* e de 0,5 entre *A* e *B*, determine a velocidade de cada carro após a ocorrência de todas as colisões.

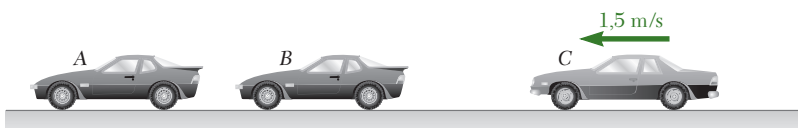



Figura P13.159

13.160 Três esferas de aço de massas iguais estão suspensas no teto por cordas de comprimentos iguais colocadas a uma distância ligeiramente superior ao diâmetro das esferas. Após ser puxada para trás e liberada, a esfera *A* bate na esfera *B* que por sua vez bate na esfera *C*. Representando por *e* o coeficiente de restituição entre as esferas e por $\mathbf{v}_0$ a velocidade de *A* imediatamente antes de bater em *B*, determine (*a*) as velocidades de *A* e *B* imediatamente após a primeira colisão, (*b*) as velocidades de *B* e *C* imediatamente após a segunda colisão. (*c*) Considerando agora que *n* esferas estão suspensas no teto e que a primeira esfera é puxada para trás e liberada como descrito anteriormente, determine a velocidade da última esfera após sofrer a primeira batida. (*d*) Use o resultado da parte *c* para obter a velocidade da última esfera quando $n = 6$ e $e = 0{,}95$.

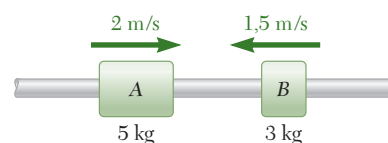
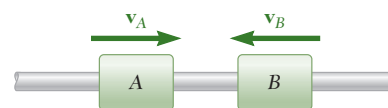
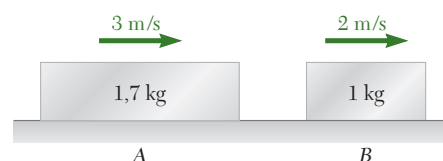
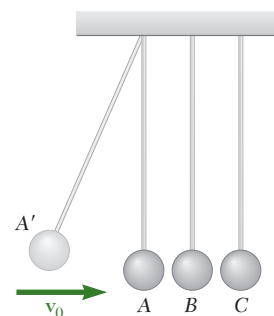



Figura P13.160

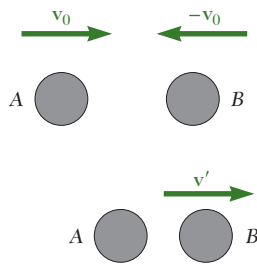



Figura *P13.161*

13.161 Dois discos deslizam sobre um plano horizontal sem atrito com velocidades de sentidos opostos e de mesma intensidade v_0 e batem de frente. Sabe-se que o disco *A* tem uma massa de 3 kg e observa-se que ele tem velocidade nula após o impacto. Determine (*a*) a massa do disco *B*, sabendo que o coeficiente de restituição entre os dois discos é 0,5 e (*b*) a faixa de valores possíveis da massa de *B* se o coeficiente de restituição entre os dois discos é desconhecido.

13.162 Em uma fornecedora de peças de automóvel, pacotes são transportados para o terminal de carga sendo empurrados ao longo de uma esteira de roletes com muito pouco atrito. No instante mostrado na figura, os pacotes *B* e *C* estão em repouso e o pacote *A* tem uma velocidade de 2 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição entre os pacotes é de 0,3, determine (*a*) a velocidade do pacote *C* depois que *A* bate em *B* e *B* bate em *C*, (*b*) a velocidade de *A* depois que ele bate em *B* pela segunda vez.

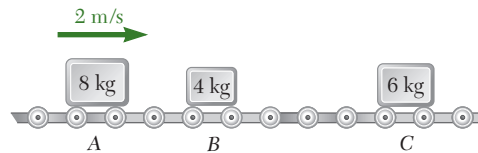



Figura *P13.162*

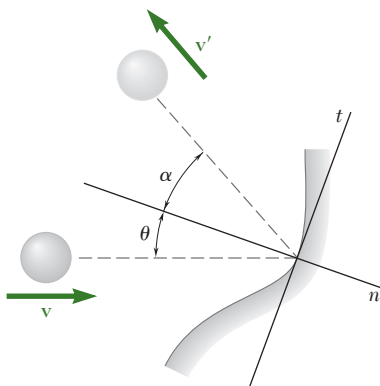



Figura P13.164

13.163 Um dos requisitos para as bolas de tênis serem usadas em competições oficiais é que, quando caem em uma superfície rígida de uma altura de 2,5 m, a altura do primeiro rebote da bola deve estar na faixa de 1,325 m $\leq h \leq$ 1,45 m. Determine a faixa do coeficiente de restituição da bola de tênis para satisfazer esse requisito.

13.164 Mostre que para a bola que atinge uma superfície fixa sem atrito, $\alpha > \theta$. Mostre que a percentagem perdida da energia cinética devido ao impacto é $100(1 - e^2)\cos^2\theta$.

13.165 Uma bola *A* de 600 g move-se com velocidade de 6 m/s de intensidade quando é atingida por uma bola *B* de 1 kg que tem velocidade de 4 m/s de intensidade. Sabendo que o coeficiente de restituição é 0,8 e desprezando o atrito, determine a velocidade de cada bola após o impacto.

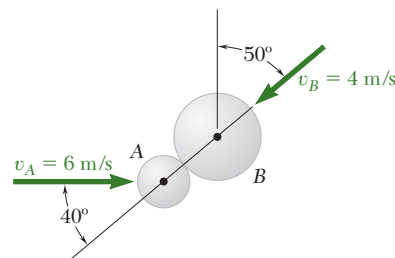



Figura P13.165

13.166 Dois discos de hóquei idênticos movem-se sobre uma pista de hóquei a uma mesma velocidade de 3 m/s em sentidos paralelos e opostos quando se chocam do modo que é mostrado na figura. Admitindo um coeficiente de restituição $e = 1$, determine a intensidade e a direção da velocidade de cada disco após o impacto.

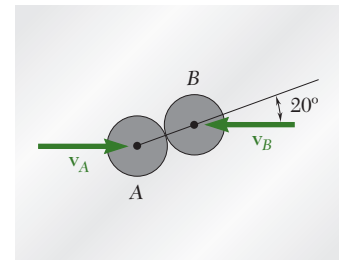



Figura P13.166

13.167 Duas bolas de bilhar idênticas de 47,4 mm de diâmetro podem mover-se livremente em uma mesa de bilhar. A bola B está em repouso e a bola A tem uma velocidade inicial $\mathbf{v} = v_0\mathbf{i}$. ($a$) Sabendo que $b = 40$ mm e $e = 0{,}7$, determine a velocidade de cada bola após o impacto. (b) Mostre que, se $e = 1$, as velocidades finais das bolas formam um ângulo reto para todos os valores de b.

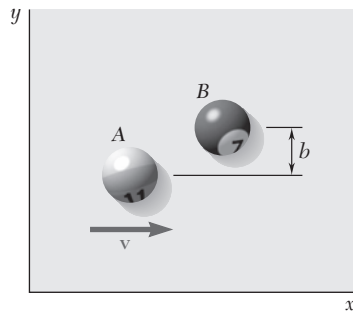



Figura P13.167

13.168 O coeficiente de restituição é 0,9 entre as duas bolas de bilhar A e B, de 60 mm de diâmetro. A bola A move-se na direção mostrada na figura, com velocidade de 1 m/s, quando bate na bola B, que está em repouso. Sabendo que, após o impacto, a bola B move-se na direção x, determine (a) o ângulo θ, (b) a velocidade de B após o impacto.

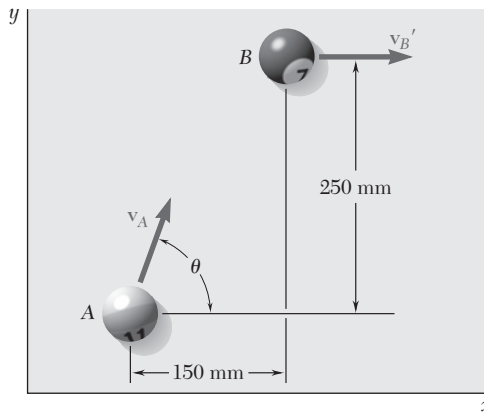



Figura P13.168

13.169 Um rapaz localizado no ponto A, na metade da distância entre o centro O da parede semicircular e a própria parede, joga uma bola na parede em uma direção que forma um ângulo de 45° com OA. Sabendo que, depois de atingir a parede, a bola ricocheteia em uma direção paralela a OA, determine o coeficiente de restituição entre a bola e a parede.

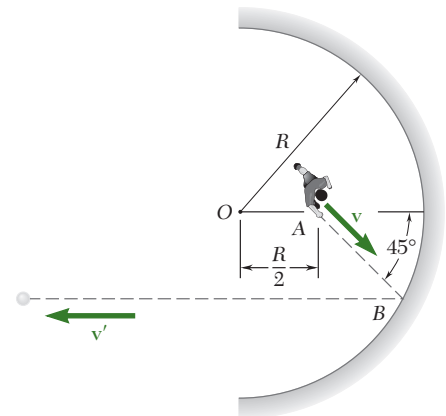



Figura P13.169

13.170 Uma garota arremessa uma bola contra uma parede inclinada a uma altura de 1,2 m. A bola bate na parede em A com uma velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$ de intensidade 15 m/s. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a bola e a parede é de 0,9 e desprezando o atrito, determine a distância d da base da parede ao ponto B, no chão, onde a bola quicará depois do rebote na parede.

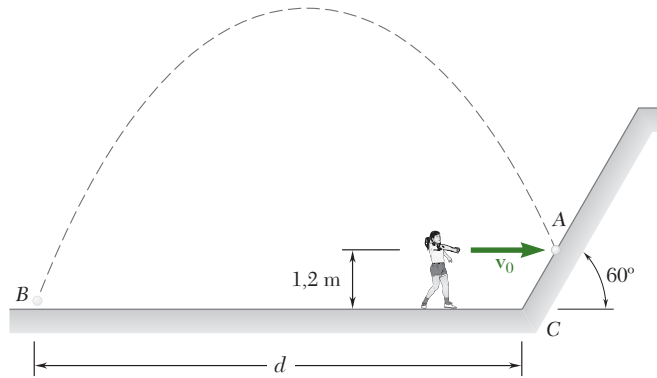



Figura P13.170

13.171 Uma bola bate no chão em A com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ de 16 m/s a um ângulo de 60° com a horizontal. Sabendo que $e = 0{,}6$ entre a bola e o chão e que após o rebote a bola alcança o ponto B com uma velocidade horizontal, determine (a) as distâncias h e d, (b) a velocidade da bola quando ela alcança B.

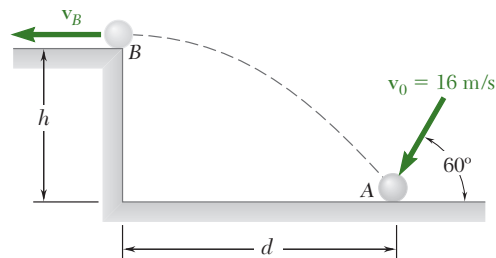



Figura *P13.171*

13.172 Uma esfera dá o rebote mostrado na figura após atingir um plano inclinado com uma velocidade vertical $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 15$ m/s. Sabendo que $\alpha = 30°$ e $e = 0{,}8$ entre a esfera e o plano, determine a altura h alcançada pela esfera.

13.173 Uma esfera ricocheteia, como mostrado na figura, após atingir um plano inclinado com uma velocidade vertical $\mathbf{v}_0$ de intensidade v_0. Determine o valor de α que maximize a distância horizontal que a bola viaja antes de alcançar sua máxima altura h considerando que o coeficiente de restituição entre a bola e o chão é (a) $e = 1$, (b) $e = 0{,}8$.

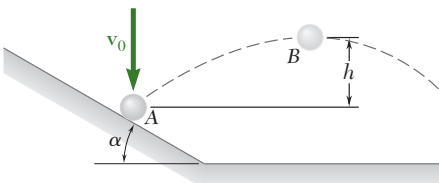



Figura *P13.172* e P13.173

13.174 Um bloco B de 1 kg move-se com velocidade $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 2$ m/s quando bate na esfera A de 0,5 kg, que está em repouso e pendurada por uma corda presa em O. Sabendo que $\mu_k = 0{,}6$ entre o bloco e a superfície horizontal e que $e = 0{,}8$ entre o bloco e a esfera, determine, após o impacto, (*a*) a altura máxima h alcançada pela esfera, (*b*) a distância x percorrida pelo bloco.

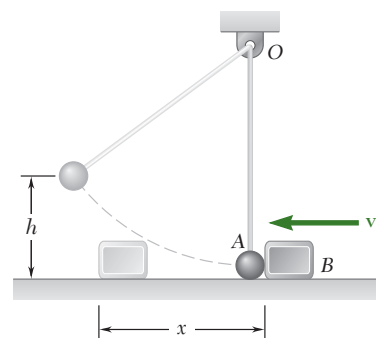



Figura P13.174

13.175 Um bloco B de 1,5 kg está preso a uma mola indeformada de constante $k = 80$ N/m e repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito, quando é atingido por um bloco A idêntico movendo-se a uma velocidade de 5 m/s. Considerando, sucessivamente, os casos em que o coeficiente de restituição entre os dois blocos é (1) $e = 1$, (2) $e = 0$, determine (*a*) a deflexão máxima da mola, (*b*) a velocidade final do bloco A.

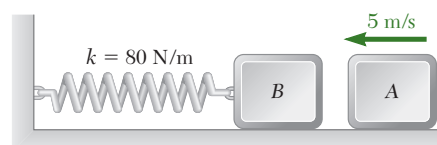



Figura P13.175

13.176 O bloco A é liberado do repouso e desliza para baixo na superfície de B sem atrito até atingir um batente na extremidade direita de B. O bloco A tem uma massa de 10 kg e o objeto B de massa de 30 kg pode correr livremente no solo. Determine as velocidades de A e B imediatamente após o impacto quando (*a*) $e = 0$, (*b*) $e = 0{,}7$.

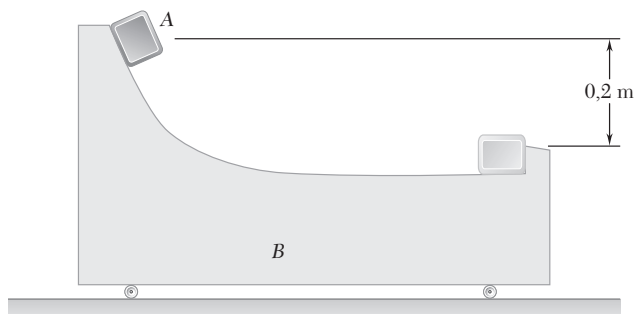



Figura P13.176

13.177 Uma bola de 90 g arremessada com uma velocidade horizontal $\mathbf{v}_0$ atinge uma placa de 720 g alojada em uma parede vertical a uma altura de 900 mm acima do chão. Observa-se que, após o rebote, a bola bate no chão a uma distância de 480 mm da parede quando a placa está rigidamente alojada na parede (Fig. 1) e a uma distância de 220 mm quando uma camada de borracha é colocada entre a placa e a parede (Fig. 2). Determine (*a*) o coeficiente de restituição entre a bola e a placa, (*b*) a velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ da bola.

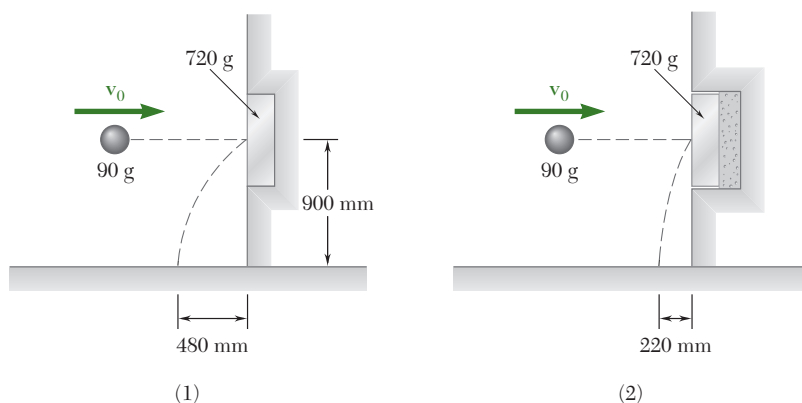



Figura P13.177

13.178 Uma esfera A de 1 kg é solta de uma altura de 5,909 m sobre uma placa B de 2 kg, que é suportada por um conjunto acondicionado de molas e que inicialmente está em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a esfera e a placa é $e = 0{,}8$, determine (a) a altura h alcançada pela esfera após o rebote, (b) a constante k de uma única mola equivalente ao dado conjunto se a máxima deflexão observada da placa é igual a $3h$.

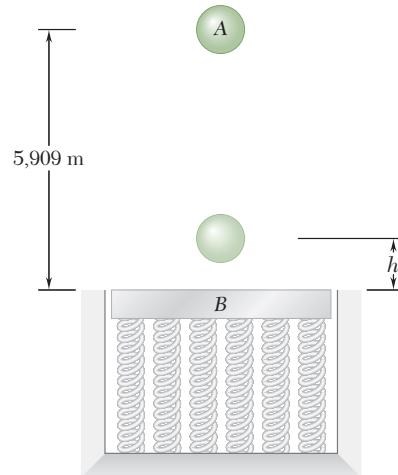



Figura P13.178 e P13.179

13.179 Uma esfera A de 1 kg é solta de uma altura de 5,909 m sobre uma placa B de 2 kg, que é suportada por um conjunto acondicionado de molas e que inicialmente está em repouso. Sabendo que o conjunto de molas é equivalente a uma única mola de $k = 150$ N/m, determine (a) o valor do coeficiente de restituição entre a esfera e a placa para que a altura h alcançada pela esfera após o rebote seja máxima, (b) o valor correspondente de h, (c) o valor correspondente da deflexão máxima da placa.

13.180 Dois carros de mesma massa batem de frente em C. Após a colisão, os carros derrapam com os freios travados e param na posição mostrada na parte inferior da figura. Sabendo que a velocidade do carro A logo antes do impacto era de 8 km/h e que o coeficiente de atrito cinético entre o pavimento e os pneus de ambos os carros é de 0,30, determine (a) a velocidade do carro B logo após o impacto, (b) o coeficiente de restituição efetivo entre os dois carros.

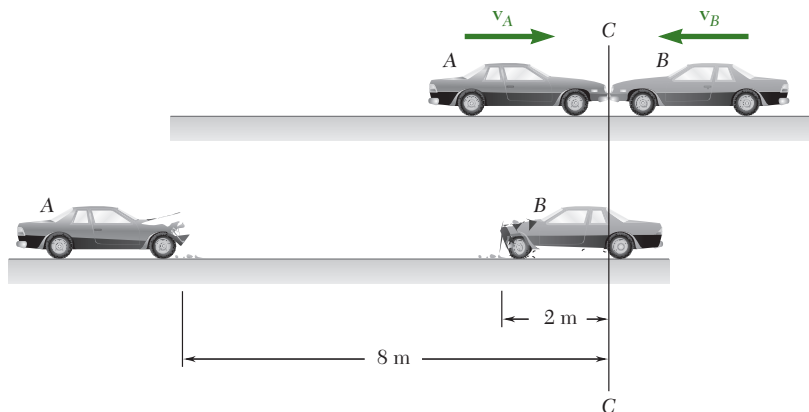



Figura *P13.180*

13.181 Os blocos A e B têm massa de 0,5 kg cada, e o bloco C de 1,5 kg. O coeficiente de atrito entre os blocos e o plano é $\mu_k = 0{,}30$. Inicialmente, o bloco A move-se a uma velocidade $v_0 = 4$ m/s e os blocos B e C estão em repouso (Fig. 1). Depois que A bate em B e B bate em C, todos os três blocos param nas posições mostradas (Fig. 2). Determine (*a*) os coeficientes de restituição entre A e B e entre B e C, (*b*) o deslocamento x do bloco C.

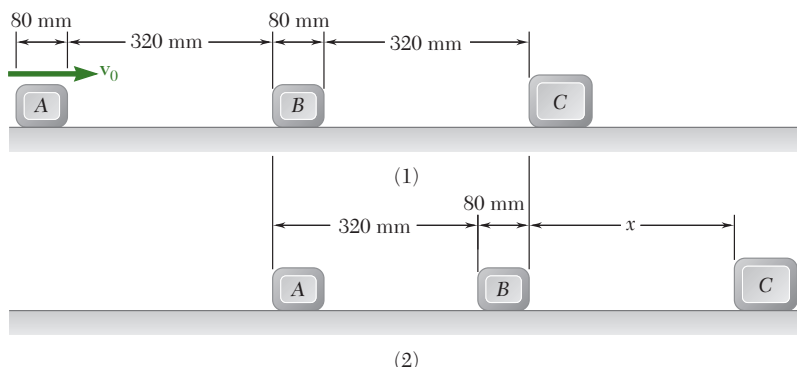



Figura *P13.181*

Figura *P13.182*

13.182 Os três blocos mostrados na figura são idênticos. Os blocos B e C estão em repouso quando o bloco B é atingido pelo bloco A, que se move com uma velocidade $\mathbf{v}_A$ de 3 m/s. Após o impacto, considerado perfeitamente plástico ($e = 0$), a velocidade dos blocos A e B diminui devido ao atrito, enquanto o bloco C adquire velocidade até que os três blocos acabam se movendo com a mesma velocidade $\mathbf{v}$. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre todas as superfícies é $\mu_k = 0{,}20$, determine (*a*) o tempo necessário para os três blocos alcançarem a mesma velocidade, (*b*) a distância total que cada bloco percorre durante esse tempo.

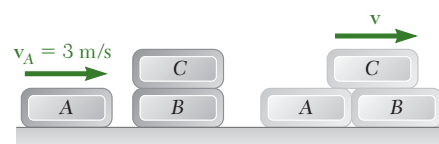
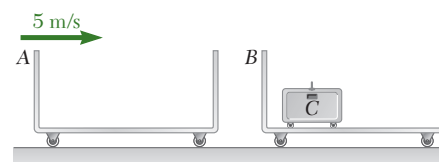



Figura P13.183

13.183 Depois de ser empurrado pelo funcionário de uma companhia aérea, um carrinho de bagagem A vazio de 40 kg bate com uma velocidade de 5 m/s em um carrinho idêntico B contendo uma mala de 15 kg equipada com rodas. O impacto faz com que a mala role para a parede esquerda do carrinho B. Sabendo que o coeficiente de restituição entre os dois carrinhos é de 0,80 e que o coeficiente de restituição entre a mala e a parede do carrinho é de 0,30, determine (*a*) a velocidade do carrinho B depois que a mala bate na sua parede pela primeira vez, (*b*) a energia total perdida no impacto.

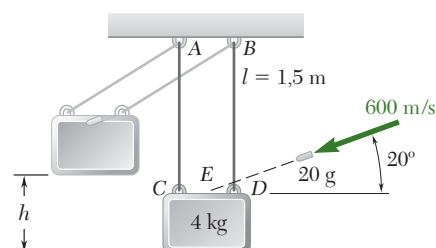



Figura P13.184

13.184 Uma bala de 20 g, disparada contra um bloco de madeira de 4 kg suspenso pelas cordas AC e BD, penetra no bloco no ponto E, a meio caminho entre C e D, sem atingir a corda BD. Determine (*a*) a altura máxima h até onde o bloco e a bala alojada irão oscilar após o impacto e (*b*) o impulso total exercido sobre os blocos pelas duas cordas durante o impacto.

Figura P13.185

13.185 Uma bola B de 70 g é largada de uma altura $h_0 = 1{,}5$ m e alcança uma altura $h_2 = 0{,}25$ m após dois quiques em placas idênticas de 210 g. A placa A repousa diretamente no chão duro, ao passo que a placa C repousa sobre uma camada de borracha. Determine (*a*) o coeficiente de restituição entre a bola e as placas, (*b*) a altura h_1 do primeiro quique da bola.

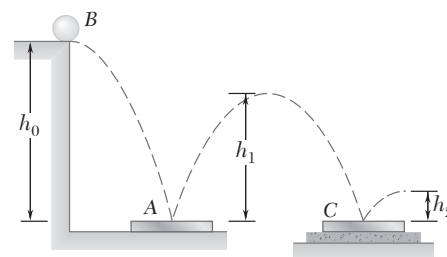



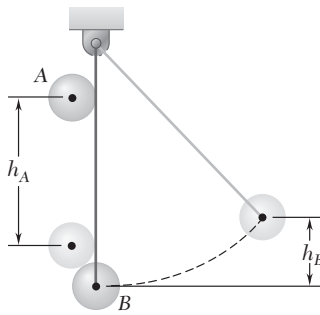
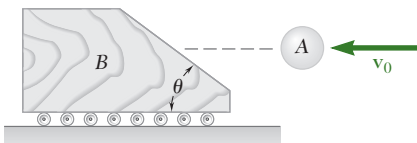
Figura P13.186

13.186 A bola B é suspensa por uma corda inextensível. Uma bola A idêntica é liberada do repouso quando está justamente tocando a corda e cai de uma distância vertical $h_A = 200$ mm antes de bater na bola B. Considerando $e = 0{,}9$ e nenhum atrito, determine o deslocamento vertical resultante h_B da bola B.

Figura P13.187

13.187 Uma esfera A de 700 g, movendo-se com velocidade $\mathbf{v}_0$ paralela ao chão, atinge a face inclinada de uma cunha B de 2,1 kg, inicialmente em repouso, que pode rolar livremente sobre o chão. Após o impacto, é observado que a esfera está se movendo do chão diretamente para cima. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a esfera e a cunha é $e = 0{,}6$, determine (a) o ângulo θ entre a face inclinada da cunha e a horizontal, (b) a perda de energia devido ao impacto.

13.188 Quando a corda está a um ângulo de $\alpha = 30°$ a esfera A de 1 kg tem uma velocidade $\mathbf{v}_0 = 0{,}6$ m/s. O coeficiente de restituição entre A e cunha B de 2 kg é 0,8 e o comprimento da corda $l = 1$ m. A constante da mola tem um valor 1.500 N/m e $\theta = 20°$. Determine a velocidade de A e B imediatamente após o impacto.

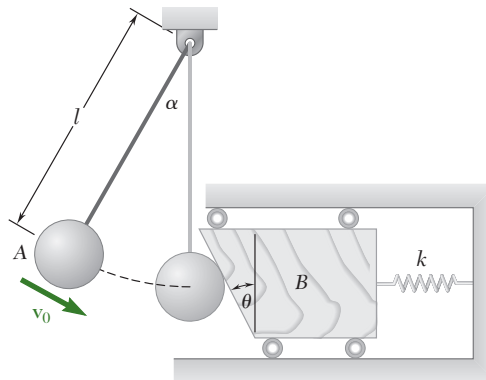



Figura P13.188

13.189 Quando a corda está a um ângulo de $\alpha = 30°$, a esfera A de 0,5 kg tem uma velocidade $\mathbf{v}_0 = 1{,}2$ m/s. O coeficiente de restituição entre A e cunha B de 0,9 kg é 0,7 e o comprimento da corda $l = 0{,}8$ m. A constante da mola tem um valor 500 N/m e $\theta = 20°$. Determine a velocidade de A e B imediatamente após o impacto.

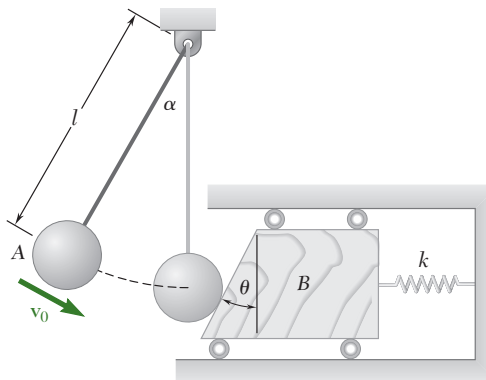



Figura P13.189

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado ao método de trabalho e energia e ao método de impulso e quantidade de movimento. Na primeira parte do capítulo, estudamos o método de trabalho e energia e suas aplicações à análise do movimento de partículas.

Trabalho de uma força

Consideramos primeiro uma força **F** agindo sobre uma partícula A e definimos o *trabalho de* **F** *correspondente ao pequeno deslocamento* $d\mathbf{r}$ [Seção 13.2] como sendo a grandeza

$$dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.1}$$

ou, relembrando da definição do produto escalar de dois vetores,

$$dU = F\, ds \cos \alpha \tag{13.1'}$$

Figura 13.29

onde α é o ângulo entre **F** e $d\mathbf{r}$ (Fig. 13.29). O trabalho de **F** durante um deslocamento finito de A_1 até A_2, representado por $U_{1\to2}$, foi obtido por integração da Eq. (13.1) ao longo da trajetória descrita pela partícula:

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{13.2}$$

Para uma força definida por seus componentes retangulares, escrevemos

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} (F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz) \tag{13.2''}$$

Trabalho de um peso

O trabalho do peso **W** de um corpo, quando seu centro de gravidade move-se da elevação y_1 até y_2 (Fig. 13.30), foi obtido substituindo de $F_x = F_z = 0$ e $F_y = -W$ na Eq. (13.2″) e integrando-os. Encontramos

$$U_{1\to2} = -\int_{y_1}^{y_2} W\, dy = Wy_1 - Wy_2 \tag{13.4}$$

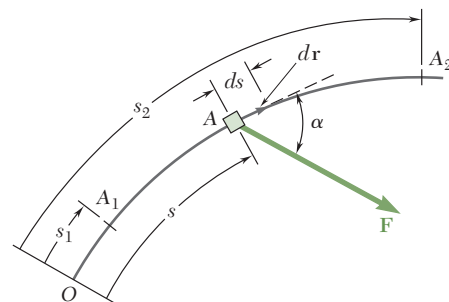
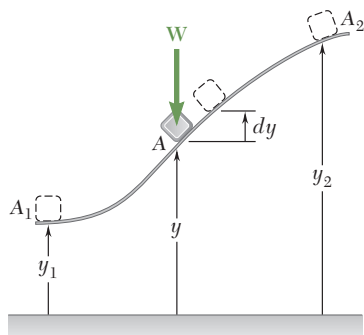
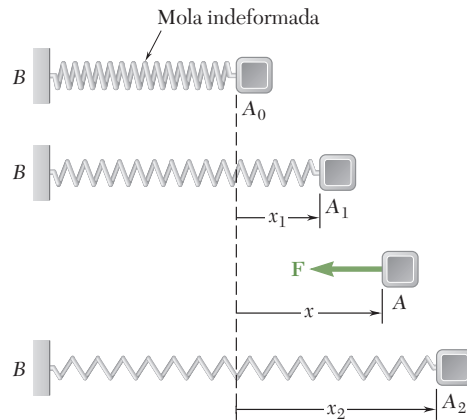



Figura 13.30

Figura 13.31

Trabalho da força exercida por uma mola

O trabalho de uma força **F** exercida por uma mola sobre um corpo A durante um deslocamento finito do corpo (Fig. 13.31) desde $A_1(x = x_1)$ até $A_2(x = x_2)$ foi obtido escrevendo

$$dU = -F\,dx = -kx\,dx$$

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{x_1}^{x_2} kx\,dx = \tfrac{1}{2}kx_1^2 - \tfrac{1}{2}kx_2^2 \qquad (13.6)$$

Portanto, o trabalho de **F** é positivo *quando a mola está retornando à sua posição indeformada.*

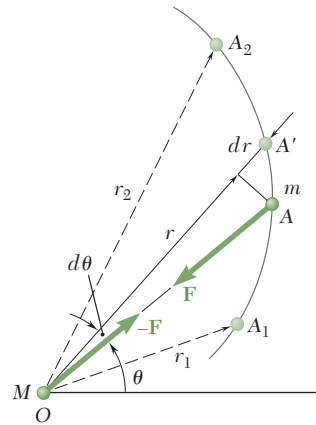



Figura 13.32

Trabalho da força gravitacional

O *trabalho da força gravitacional* **F** exercida por uma partícula de massa M localizada em O sobre uma partícula de massa m, quando a última se desloca de A_1 até A_2 (Fig. 13.32), foi obtido retomando da Seção 12.10 a expressão para a intensidade de **F** e escrevendo

$$U_{1\rightarrow 2} = -\int_{r_1}^{r_2} \frac{GMm}{r^2}\,dr = \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1} \qquad (13.7)$$

Energia cinética de uma partícula

A *energia cinética de uma partícula* de massa m movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$ [Seção 13.3] foi definida como sendo a grandeza escalar

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \tag{13.9}$$

Princípio de trabalho e energia

Da segunda lei de Newton, deduzimos o *princípio de trabalho e energia*, que afirma que *a energia cinética da partícula em A_2 pode ser obtida adicionando-se à sua energia cinética em A_1 o trabalho realizado durante o deslocamento de A_1 até A_2 pela força* $\mathbf{F}$ *exercida sobre a partícula.*

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \tag{13.11}$$

Método de trabalho e energia

O método de trabalho e energia simplifica a solução de muitos problemas que lidam com forças, deslocamentos e velocidades, pois não requer a determinação de acelerações [Seção 13.4]. Observamos também que ele envolve apenas grandezas escalares e que as forças que não realizam trabalho não precisam ser consideradas [Problemas Resolvidos 13.1 e 13.3]. Todavia, esse método precisa ser suplementado pela aplicação direta da segunda lei de Newton para determinar-se a força normal à trajetória da partícula [Problema Resolvido 13.4].

Potência e eficiência mecânica

A potência desenvolvida por uma máquina e sua eficiência mecânica foram discutidas na Seção 13.5. A potência foi definida como sendo a taxa temporal de realização de trabalho

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \qquad \text{(13.12 e 13.13)}$$

onde $\mathbf{F}$ é a força exercida sobre a partícula e $\mathbf{v}$ a velocidade da partícula [Problema Resolvido 13.5]. A *eficiência mecânica,* representada por η, foi expressa como

$$\eta = \frac{\text{trabalho de saída}}{\text{trabalho de entrada}} \tag{13.15}$$

Força conservativa. Energia potencial

Quando o trabalho de uma força $\mathbf{F}$ é independente da trajetória percorrida [Seções 13.6 e 13.7], a força $\mathbf{F}$ é denominada *força conservativa* e seu trabalho é igual a *menos a variação da energia potencial* V associada a $\mathbf{F}$:

$$U_{1\rightarrow 2} = V_1 - V_2 \tag{13.19$'$}$$

As seguintes expressões foram obtidas para a energia potencial associada a cada uma das forças consideradas anteriormente:

Força da gravidade (peso): $$V_g = Wy \tag{13.16}$$

Força gravitacional: $$V_g = -\frac{GMm}{r} \tag{13.17}$$

Força elástica exercida por uma mola: $$V_e = \tfrac{1}{2}kx^2 \tag{13.18}$$

Substituindo $U_{1\to2}$ da Eq. (13.19′) na Eq. (13.11) e reordenando os termos [Seção 13.8], obtivemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{13.24}$$

Princípio de conservação de energia

Este é o *princípio de conservação da energia,* que afirma que quando uma partícula se desloca sob a ação de forças conservativas, *a soma de suas energias cinética e potencial permanece constante.* A aplicação desse princípio facilita a solução de problemas que envolvem apenas forças conservativas [Problemas Resolvidos 13.6 e 13.7].

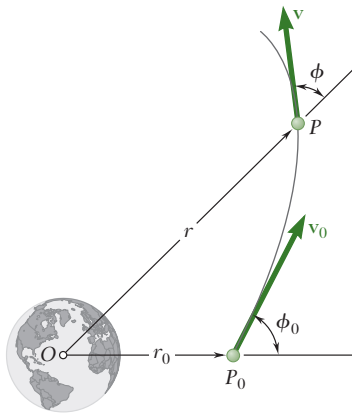
Movimento sob uma força gravitacional

Relembrando da Seção 12.9 que quando uma partícula se desloca sob uma força central **F** sua quantidade de movimento angular em torno do centro da força O permanece constante, observamos [Seção 13.9] que, se a força central **F** também é conservativa, os princípios de conservação da quantidade de movimento angular e de conservação da energia podem ser usados em conjunto para analisar o movimento da partícula [Problema Resolvido 13.8]. Uma vez que a força gravitacional exercida pela Terra sobre um veículo espacial é tanto central como conservativa, essa abordagem foi usada no estudo do movimento de tais veículos [Problema Resolvido 13.9] e verificou-se que ela é particularmente efetiva no caso de um *lançamento oblíquo.* Considerando a posição inicial P_0 e uma posição arbitrária P do veículo (Fig. 13.33), escrevemos

Figura 13.33

$$(H_O)_0 = H_O: \qquad r_0 m v_0 \operatorname{sen} \phi_0 = rmv \operatorname{sen} \phi \tag{13.25}$$

$$T_0 + V_0 = T + V: \qquad \tfrac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GMm}{r_0} = \tfrac{1}{2} m v^2 - \frac{GMm}{r} \tag{13.26}$$

onde m era a massa do veículo e M a massa da Terra.

Princípio de impulso e quantidade de movimento de uma partícula

A segunda parte do capítulo foi dedicada ao método de impulso e quantidade de movimento e sua aplicação à solução de vários tipos de problemas envolvendo o movimento de partículas.

A *quantidade de movimento linear de uma partícula* foi definida [Seção 13.10] como o produto $m\mathbf{v}$ da massa m da partícula e de sua velocidade $\mathbf{v}$. Da segunda lei de Newton, $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, deduzimos a relação

$$m\mathbf{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 \tag{13.28}$$

onde $m\mathbf{v}_1$ e $m\mathbf{v}_2$ representam a quantidade de movimento da partícula em um tempo t_1 e em um tempo t_2, respectivamente, e onde a integral define o *impulso linear da força* **F** durante o intervalo de tempo correspondente. Escrevemos, portanto,

$$m\mathbf{v}_1 + \mathbf{Imp}_{1\to2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.30}$$

que expressa o princípio de impulso e de quantidade de movimento para uma partícula.

Quando a partícula considerada está sujeita a diversas forças, a soma dos impulsos dessas forças deve ser usada; obtivemos

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\, \mathbf{Imp}_{1\to 2} = m\mathbf{v}_2 \tag{13.32}$$

Como as Eqs. (13.30) e (13.32) envolvem *grandezas vetoriais*, é necessário considerar seus componentes x e y separadamente ao aplicá-las à solução de um dado problema [Problemas Resolvidos 13.10 e 13.11].

Movimento impulsivo

O método de impulso e de quantidade de movimento é particularmente efetivo no estudo do *movimento impulsivo* de uma partícula, quando forças muito grandes chamadas *forças impulsivas,* são aplicadas durante um intervalo de tempo muito pequeno Δt, pois o método envolve os impulsos $\mathbf{F}\,\Delta t$ das forças em lugar das próprias forças [Seção 13.11]. Desprezando o impulso de qualquer força não impulsiva, escrevemos

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\mathbf{v}_2 \tag{13.35}$$

No caso do movimento impulsivo de diversas partículas, obtivemos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = \Sigma m\mathbf{v}_2 \tag{13.36}$$

onde o segundo termo envolve apenas forças impulsivas externas [Problema Resolvido 13.12].

No caso particular em que *a soma dos impulsos das forças externas é nula,* a Eq. (13.36) reduz-se a $\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$; ou seja, *a quantidade de movimento total das partículas se conserva.*

Impacto central direto

Nas Seções de 13.12 a 13.14, consideramos o *impacto central* de dois corpos em colisão. No caso de um *impacto central direto* [Seção 13.13], os dois corpos em colisão A e B moviam-se ao longo da *linha de impacto* com velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, respectivamente (Fig. 13.34). Duas equações podiam ser usadas para determinar suas velocidades $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$ após o impacto.

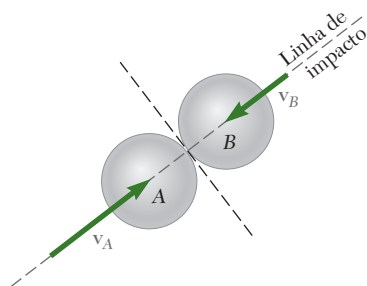



Figura 13.34

A primeira expressava a conservação da quantidade de movimento dos dois corpos,

$$m_A v_A + m_B v_B = m_A v'_A + m_B v'_B \quad (13.37)$$

onde um sinal positivo indica que a velocidade correspondente está orientada para a direita, ao passo que a segunda relacionava as *velocidades relativas* dos dois corpos antes e depois do impacto,

$$v'_B - v'_A = e(v_A - v_B) \quad (13.43)$$

A constante e é conhecida como *coeficiente de restituição*; seu valor fica entre 0 e 1 e depende em grande parte dos materiais envolvidos. Quando $e = 0$, o impacto é dito *perfeitamente plástico*; quando $e = 1$, é dito *perfeitamente elástico* [Problema Resolvido 13.13].

Impacto central oblíquo

No caso de um *impacto central oblíquo* [Seção 13.14], as velocidades dos dois corpos em colisão antes e depois do impacto foram decompostas em componentes n, ao longo da linha de impacto, e em componentes t, ao longo da tangente comum às superfícies em contato (Fig. 13.35). Observamos que o componente da velocidade em t de cada corpo permanecia inalterado, ao passo que os componentes em n satisfaziam equações similares às Eqs. (13.37) e (13.43) [Problemas Resolvidos 13.14 e 13.15]. Mostrou-se que, embora esse método tenha sido desenvolvido para corpos que se move livremente antes e depois do impacto, ele poderia ser estendido ao caso em que um ou ambos os corpos em colisão estão restritos em seu movimento [Problema Resolvido 13.16].

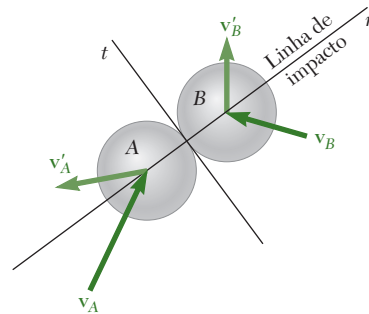



Figura 13.35

Uso dos três métodos fundamentais de análise cinética

Na Seção 13.15 discutimos as vantagens relativas dos três métodos fundamentais apresentados neste capítulo e no capítulo anterior, a saber, a segunda lei de Newton, trabalho e energia, e impulso e quantidade de movimento. Observamos que o método de trabalho e energia e o método de impulso e quantidade de movimento podem ser combinados para resolver problemas que envolvem uma fase curta de impacto durante a qual as forças impulsivas devem ser levadas em consideração [Problema Resolvido 13.17].

PROBLEMAS DE REVISÃO

13.190 Uma bolinha de 50 g atirada verticalmente por uma pistola de mola na superfície da Terra atinge a altura de 100 m. A mesma bolinha atirada pela mesma pistola na superfície da Lua atinge a altura de 680 m. Determine a energia dissipada pelo arraste aerodinâmico quando a bolinha é atirada na superfície da Terra. (A aceleração da gravidade na superfície da Lua é 0,165 vezes daquela na superfície da Terra.)

13.191 Um cabo elástico é projetado para *bungee jumping* em uma torre de 40 m. As especificações indicam que o cabo deve ter 25 m quando estiver indeformado e esticar até um comprimento total de 30 m quando um peso de 3 kN é preso nele e cai da torre. Determine (*a*) a constante da mola k do cabo necessária, (*b*) o quão próximo do chão um homem de 90 kg ficará se ele usar o cabo e pular da torre.

Figura P13.191

13.192 Uma esfera de aço de 50 g é presa a uma corda de 200 mm que pode balançar em volta do ponto O no plano vertical. Ela está sujeita a seu próprio peso e a uma força **F** exercida por um pequeno ímã incorporado ao chão. A intensidade dessa força, expressa em newtons, é $F = 0{,}00024/r^2$, onde r é a distância entre o ímã e a esfera expressa em milímetros. Sabendo que a esfera é liberada do repouso em A, determine sua velocidade quando ela passa pelo ponto B.

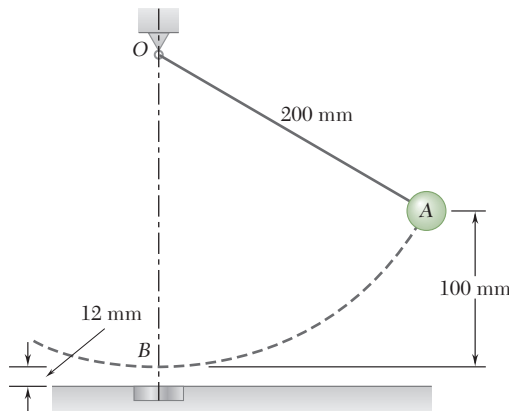



Figura *P13.192*

13.193 Um satélite descreve uma órbita elíptica sobre um planeta de massa M. Os valores mínimos e máximos da distância r do centro do satélite ao planeta são, respectivamente, r_0 e r_1. Use os princípios de conservação de energia e conservação da quantidade de movimento angular para deduzir a relação

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = \frac{2GM}{h^2}$$

onde h é a quantidade de movimento angular por unidade de massa do satélite e G é a constante de gravidade.

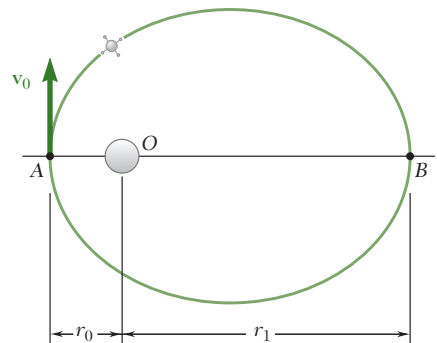



Figura P13.193

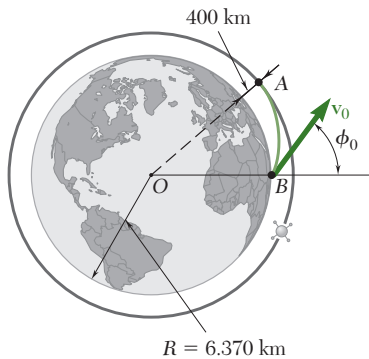



Figura P13.194

13.194 Um ônibus espacial está indo de encontro a uma estação espacial que está em órbita circular a uma altitude de 400 km acima da Terra. O ônibus deve alcançar uma altitude de 60 km, quando seus motores são desligados no ponto B. Sabendo que nesse instante a velocidade $\mathbf{v}_0$ do veículo espacial forma um ângulo $\phi_0 = 55°$ com a vertical, determine (a) a intensidade da velocidade $\mathbf{v}_0$ necessária se a trajetória do ônibus deve ser tangente à órbita da estação espacial em A.

13.195 Uma bala de aço de 25 g revestida é atirada horizontalmente com uma velocidade de 600 m/s e ricocheteia em uma placa de aço, seguindo a trajetória CD com velocidade 400 m/s. Sabendo que a bala deixa um risco de 10 mm na placa e considerando que sua velocidade média é 500 m/s enquanto ela está em contato com a placa, determine a intensidade e direção da força média impulsiva exercida pela bala na placa.

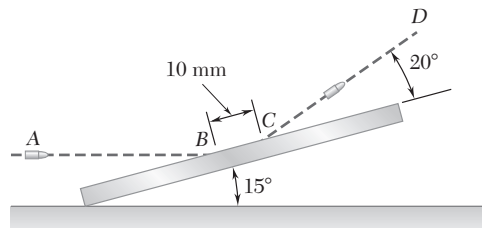



Figura P13.195

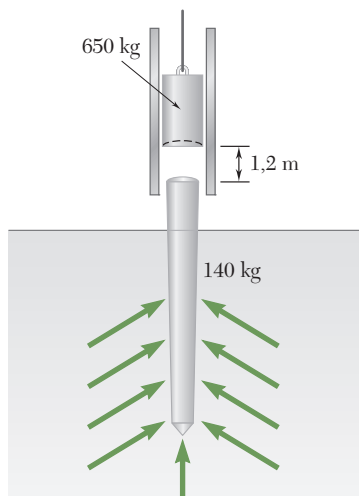



Figura P13.196

13.196 Um martelo de 650 kg de um bate-estaca cai de uma altura de 1,2 m sobre o topo de uma estaca de construção de 140 kg, movendo-se 110 mm no chão. Considerando um impacto plástico perfeito ($e = 0$), determine a resistência média à penetração do chão.

13.197 Uma pequena esfera B de massa m é presa em uma corda inextensível de comprimento $2a$, que passa em torno da cavilha A e é presa no suporte fixo O. A esfera é mantida próxima ao suporte O e liberada com velocidade inicial nula. Ela cai livremente até o ponto C, onde a corda fica esticada, e gira em um plano vertical, primeiro sobre A e depois sobre O. Determine a distância vertical da linha OD até o ponto mais alto C'' que a esfera alcançará.

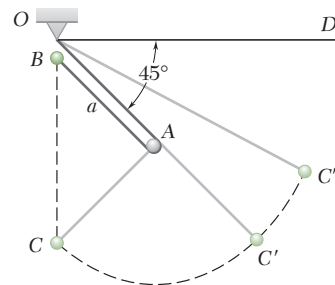



Figura P13.197

13.198 Os discos A e B com massas m_A e m_B, respectivamente, podem deslizar livremente em uma superfície horizontal sem atrito. O disco B está em repouso quando é atingido pelo disco A que está em movimento com a velocidade $\mathbf{v}_0$ em uma direção que forma um ângulo θ com a linha de impacto. Representa por e o coeficiente de restituição entre os dois discos, mostre que a componente n da velocidade de A depois do impacto é (a) positiva se $m_A > em_B$, (b) negativa se $m_A < em_B$, (c) zero se $m_A = em_B$.

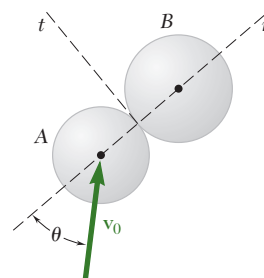



Figura P13.198

13.199 Dois blocos A e B estão conectados por uma corda que passa pelas roldanas e por meio de um colar C. O sistema é liberado do repouso quando $x = 1{,}7$ m. Como o bloco A sobe, ele bate no colar C com impacto plástico perfeito ($e = 0$). Após o impacto, os dois blocos e o colar se mantêm movendo até que param e revertem seus movimentos. Como A e C se movem para baixo, C atinge o ressalto e os blocos A e B se mantêm em movimento até que param novamente. Determine (a) a velocidade dos blocos e do colar imediatamente após A atingir C, (b) a distância que os blocos e colar se movem após o impacto antes de parar, (c) o valor de x no final de um ciclo completo.

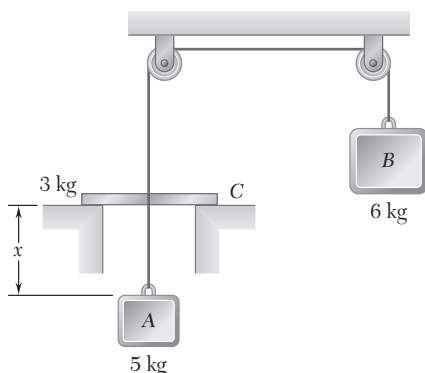



Figura P13.199

13.200 Uma pequena esfera A presa a uma corda AC é liberada do repouso na posição mostrada na figura e atinge uma esfera idêntica B suspensa pela corda vertical BD. Se o máximo ângulo θ_B formado pela corda BD com a vertical no movimento subsequente da esfera B deve ser igual ao ângulo θ_A, determine o valor necessário da razão l_B/l_A dos comprimentos das duas cordas em termos do coeficiente de restituição e entre as duas esferas.

Figura P13.200

13.201 Um bloco A de 2 kg é empurrado contra uma mola comprimindo-a na distância $x = 0{,}1$ m. O bloco é então liberado do repouso e desliza num declive de 20° até atingir uma esfera B de 1 kg que está suspensa por uma corda inextensível de 1 m. A constante da mola $k = 800$ N/m, o coeficiente de atrito entre A e o chão é de 0,2, a distância que A desliza após o comprimento indeformado da mola é $d = 1{,}5$ m e o coeficiente entre A e B é 0,8. Quando $\alpha = 40°$, determine (a) a velocidade de B, (b) a tração na corda.

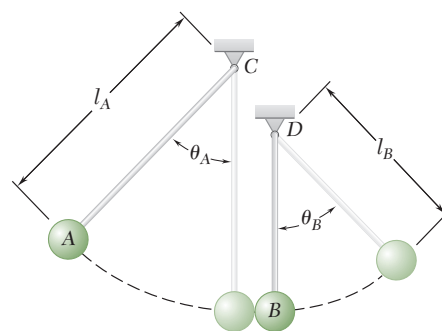
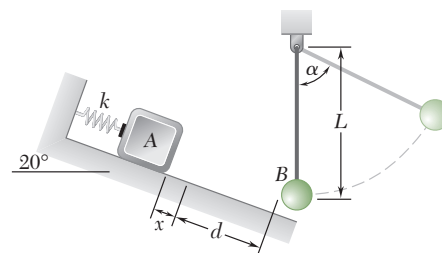



Figura P13.201

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

13.C1 Um colar de 6 kg está preso a uma mola fixada no ponto C e pode deslizar sobre uma barra sem atrito que faz um ângulo de 30° com a vertical. A mola tem constante k e não está deformada quando o colar encontra-se em A. Sabendo que o colar é liberado do repouso em A, use um programa de computador para calcular a velocidade do colar no ponto B para valores de k entre 20 e 400 N/m.

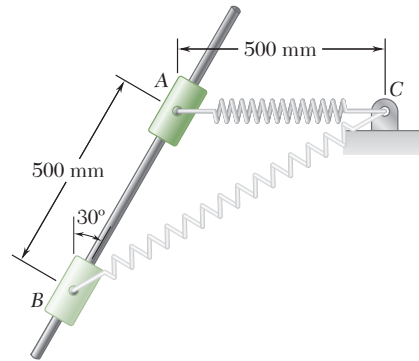



Figura P13.C1

13.C2 Marcas de derrapagem em uma pista de disputa de arrancadas indicam que as rodas traseiras (de tração) de um carro de 1.000 kg derrapam durante os primeiros 20 m dos 500 m da trilha. O carro é guiado com deslizamento iminente de 60% de seu peso nas rodas traseiras pelos 480 m restantes da corrida. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético e estático são 0,60 e 0,85, respectivamente, e que a força devido ao arrasto aerodinâmico é $F_d = 0{,}544v^2$, onde a velocidade v é expressa em m/s e a força F_d em N, use um programa de computador para determinar o tempo decorrido e a velocidade do carro ao longo de vários pontos da trilha, (a) considerando a força F_d, (b) ignorando a força F_d. Use um programa de computador com incrementos de $\Delta x = 0{,}025$ m nos cálculos e estabeleça seus resultados a cada 2 m para os primeiros 20 m e a cada 20 m para os 480 m. (*Dica:* O tempo Δt_i necessário para o carro mover-se por meio do incremento de distância Δx_i pode ser obtido dividindo Δx_i pela velocidade média $\frac{1}{2}(v_i + v_{i+1})$ do carro sobre Δx_i se a aceleração do carro permanecer constante sobre Δx).

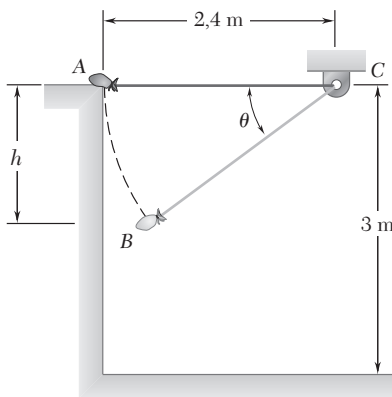



Figura P13.C3

13.C3 Um saco de 5 kg é empurrado suavemente do topo de um muro e oscila em um plano vertical na extremidade de uma corda de 2,4 m que pode resistir a uma tração máxima F_m antes de se romper. Para F_m entre 40 N a 140 N, usando um programa de computador, determine (a) a diferença de elevação h entre o ponto A e o ponto B onde a corda irá se romper, (b) a distância d do muro ao ponto onde o saco atingirá o piso.

13.C4 Usando um programa da computador, determine (a) o tempo necessário para o sistema do Problema 13.199 completar dez ciclos sucessivos de movimento descritos neste problema, iniciando com x =1,7 m, (b) o valor de x no final do décimo ciclo.

13.C5 Uma bola B de 700 g está pendurada por uma corda inextensível presa a um suporte C. Uma bola A de 350 g atinge B com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ a um ângulo de θ_0 com a vertical. Considerando que não há atrito e representando e como o coeficiente de restituição, usando um programa de computador determine as intensidades v'_A e v'_B das velocidades das bolas imediatamente após o impacto e a percentagem de energia perdida com a colisão para $v_0 = 6$ m/s e para θ_0 de 20° a 150°, considerando (*a*) $e = 1$, (*b*) $e = 0{,}75$, (*c*) $e = 0$.

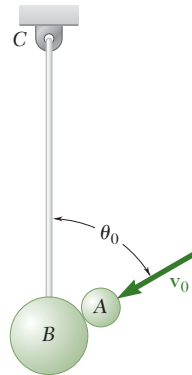



Figura P13.C5

13.C6 No Problema 13.109, um veículo espacial encontra-se em órbita circular a uma altitude de 360 km acima da Terra. Para retornar à Terra, ele diminui sua velocidade quando passa por A, acionando seu motor por um curto intervalo de tempo em sentido oposto ao de seu movimento. Sua velocidade resultante é alcançada no ponto B a uma altitude de 60 km, formando um ângulo $\phi_B = 60°$ com a vertical. Uma estratégia alternativa para tirar o veículo espacial fora de sua órbita circular seria dar a volta, de modo que seu motor fosse apontado para longe da Terra, e então dar um incremento de velocidade $\Delta\mathbf{v}_A$ dirigida para o centro O da Terra. Isso provavelmente exigirá um melhor consumo de energia quando o motor for acionado em A, mas poderá resultar numa descida mais rápida em B. Considerando que a estratégia é aplicada, use um programa de computador para determinar os valores de ϕ_B e v_B para um consumo variando de 5 a 100% do necessário no Problema 13.109.

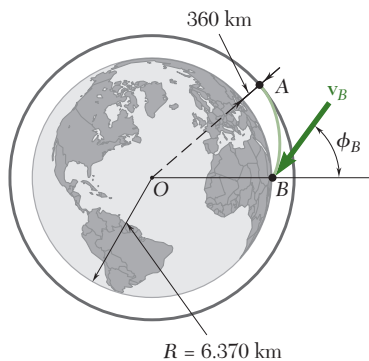



Figura P13.C6

O impulso para o motor deste protótipo XR-5M15 é produzido por partículas de gás ejetadas em alta velocidade. A determinação das forças na bancada de teste é baseada na análise do movimento de um *sistema variável de partículas*, ou seja, o movimento de um grande número de partículas de ar em conjunto, e não separadamente.

CAPÍTULO 14

Sistemas de partículas

14 Sistemas de partículas

14.1 Introdução

Neste capítulo você vai estudar o movimento de *sistemas de partículas*, isto é, o movimento de um grande número de partículas consideradas em conjunto. A primeira parte do capítulo é dedicada a sistemas constituídos de partículas bem definidas; a segunda parte considera o movimento de sistemas variáveis, isto é, sistemas que estão continuamente ganhando ou perdendo partículas, ou fazendo ambas as coisas ao mesmo tempo.

Na Seção 14.2, a segunda lei de Newton será aplicada primeiramente a cada partícula do sistema. Definindo a *força efetiva* de uma partícula como o produto $m_i\mathbf{a}_i$ de sua massa m_i por sua aceleração $\mathbf{a}_i$ vamos mostrar que as *forças externas* que atuam sobre as várias partículas formam um sistema equipolente ao sistema de forças efetivas, ou seja, ambos os sistemas têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante em relação a qualquer ponto dado. Além disso, na Seção 14.3 será mostrado que a resultante e o momento resultante das forças externas são iguais, respectivamente, à taxa de variação da quantidade de movimento linear total e da quantidade de movimento angular total das partículas do sistema.

Na Seção 14.4, o *centro de massa* de um sistema de partículas é definido e o movimento desse ponto é descrito, enquanto na Seção 14.5 o movimento das partículas em torno de seu centro de massa é analisado. As condições nas quais a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular de um sistema de partículas se conservam são discutidas na Seção 14.6, e os resultados obtidos nessa seção são aplicados à solução de vários problemas.

As Seções 14.7 e 14.8 tratam da aplicação do princípio de trabalho e energia a um sistema de partículas e a Seção 14.9, da aplicação do princípio de impulso e quantidade de movimento. Essas seções contêm também diversos problemas de interesse prático.

Deve-se observar que, embora as derivações dadas na primeira parte deste capítulo tenham sido feitas para um sistema de partículas independentes, elas permanecem válidas quando as partículas do sistema estão rigidamente ligadas entre si, isto é, quando elas formam um corpo rígido. De fato, os resultados aqui obtidos vão formar a base de nossa discussão da cinética de corpos rígidos nos Capítulos 16 a 18.

A segunda parte deste capítulo é dedicada ao estudo de sistemas variáveis de partículas. Na Seção 14.11 você vai considerar fluxos permanentes de partículas, tais como uma corrente de água desviada por uma pá fixa ou o escoamento de ar por meio de um motor a jato, e vai aprender a determinar a força exercida pelo fluxo sobre a pá e o empuxo desenvolvido pelo motor. Finalmente, na Seção 14.12, você vai aprender como analisar sistemas que ganham massa pela absorção contínua de partículas ou que perdem massa pela expulsão contínua de partículas. Entre as várias aplicações práticas dessa análise está a determinação da força de propulsão desenvolvida por um motor de foguete.

14.2 Aplicação das leis de Newton ao movimento de um sistema de partículas. Forças efetivas

Para deduzir as equações de movimento de um sistema de n partículas, vamos começar escrevendo a segunda lei de Newton para cada partícula individual do sistema. Considere a partícula P_i, onde $1 \leq i \leq n$. Seja m_i a massa de P_i e a sua aceleração em relação ao sistema de referência newtonia $Oxyz$. A força exercida sobre P_i por uma outra partícula P_j do sistema

(Fig. 14.1), chamada de *força interna,* será representada por $\mathbf{f}_{ij}$. A resultante das forças internas exercidas sobre P_i, por todas as outras partículas do sistema é, então $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij}$ (onde $\mathbf{f}_{ii}$ não tem significado físico e é considerado nulo). Por outro lado, considerando $\mathbf{F}_i$ a resultante de todas as *forças externas* que atuam sobre P_i, escrevemos a segunda lei de Newton para a partícula P_i como se segue:

$$\mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = m_i \mathbf{a}_i \tag{14.1}$$

Figura 14.1

Representado por $\mathbf{r}_i$ o vetor de posição de P_i e tomando os momentos em relação a O dos vários termos da Eq. (14.1), também escrevemos

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i + \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i \tag{14.2}$$

Repetindo esse procedimento para cada partícula P_i do sistema, obtemos n equações do tipo (14.1) e n equações do tipo (14.2), onde i toma sucessivamente os valores 1, 2, ..., n. Os vetores $m_i\mathbf{a}_i$ são chamados de *forças efetivas* das partículas.* Portanto, as equações obtidas expressam o fato de que as forças externas $\mathbf{F}_i$ e as forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ que atuam sobre as várias partículas formam um sistema equivalente ao sistema das forças efetivas $m_i\mathbf{a}_i$ (isto é, um sistema pode ser substituído pelo outro) (Fig. 14.2).

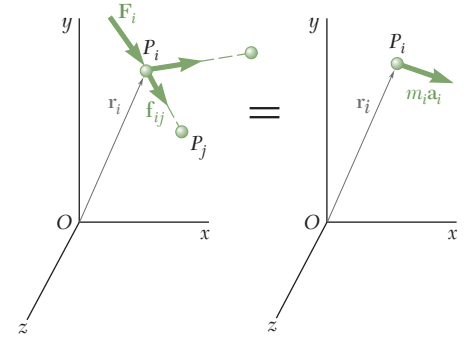
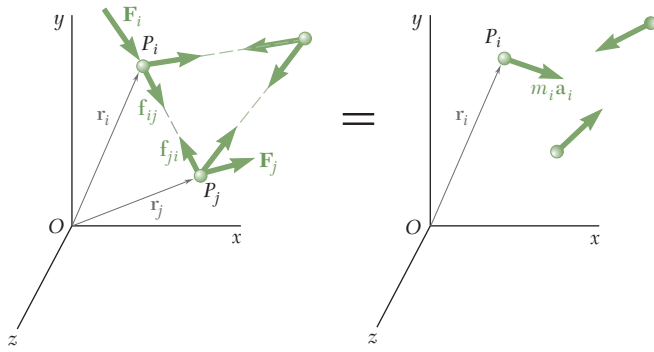



Figura 14.2

Antes de prosseguirmos com nossa derivação, examinaremos as forças internas $\mathbf{f}_{ij}$. Notamos que essas forças ocorrem em pares $\mathbf{f}_{ij}$, $\mathbf{f}_{ji}$, onde $\mathbf{f}_{ij}$ representa a força exercida pela partícula P_j sobre a partícula P_i e $\mathbf{f}_{ji}$ representa a força exercida por P_i sobre P_j (Fig. 14.2). Agora, de acordo com a terceira lei de Newton (Seção 6.1), quando estendida pela sua lei de gravitação para partículas que atuam à distância (Seção 12.10), as forças $\mathbf{f}_{ij}$ e $\mathbf{f}_{ji}$ são iguais e opostas, e têm a mesma linha de ação. Sua soma é, portanto, $\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji} = 0$, e a soma de seus momentos em relação a O é

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{f}_{ji} = \mathbf{r}_i \times (\mathbf{f}_{ij} + \mathbf{f}_{ji}) + (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \times \mathbf{f}_{ji} = 0$$

* Como esses vetores representam as resultantes das forças que atuam sobre as várias partículas do sistema, eles podem realmente ser considerados como forças.

pois os vetores $\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$ e $\mathbf{f}_{ij}$ no último termo são colineares. Adicionando todas as forças internas do sistema e somando seus momentos em relação a O, obtemos as equações

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{f}_{ij} = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_{ij}) = 0 \tag{14.3}$$

que expressam o fato de que a resultante e o momento resultante das forças internas do sistema são iguais a zero.

Retomando agora às n equações (14.1), onde $i = 1, 2, ..., n,$ somamos seus membros do lado esquerdo e seus membros do lado direito. Levando em conta a primeira das Eqs. (14.3), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{a}_i \tag{14.4}$$

Procedendo do mesmo modo com as Eqs. (14.2) e levando em conta a segunda das Eqs. (14.3), temos

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) \tag{14.5}$$

As Eqs. (14.4) e (14.5) expressam o fato de que o sistema de forças externas $\mathbf{F}_i$ e o sistema de forças efetivas $m_i\mathbf{a}_i$ têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante. Referindo à definição dada na Seção 3.19 para dois sistemas equipolentes de vetores, podemos, portanto, afirmar que *o sistema de forças externas que atuam sobre as partículas e o sistema de forças efetivas dessas partículas são equipolentes** (Fig. 14.3).

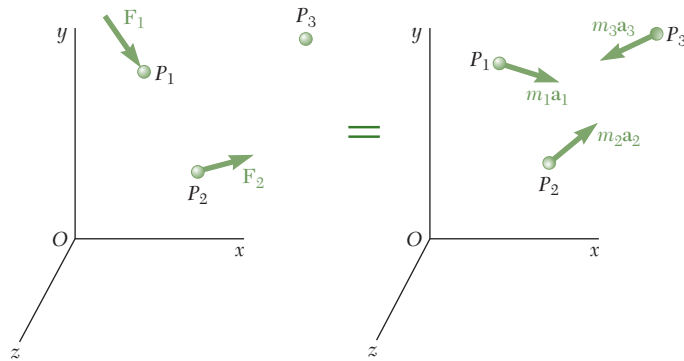



Figura 14.3

* O resultado que acabamos de obter é muitas vezes chamado de *princípio de d'Alembert*, em homenagem ao matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783). No entanto, o enunciado original de d'Alembert se refere ao movimento de um sistema de corpos ligados, com $\mathbf{f}_{ij}$ representando forças de vínculos que, se aplicadas por si mesmas, não produzirão movimento no sistema. Como, conforme será mostrado agora, este não é o caso geral de forças internas que atuam sobre um sistema de partículas livres, adiaremos o exame do princípio de d'Alembert para quando estivermos considerando o movimento de corpos rígidos (Capítulo 16).

As Eqs. (14.3) expressam o fato de que o sistema das forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ é equipolente a zero. Observe, entretanto, que *não* resulta disso que as forças internas não tenham efeito sobre as partículas em consideração. De fato, as forças gravitacionais que o Sol e os planetas exercem uns sobre os outros são internas ao Sistema Solar e equipolentes a zero. Contudo, essas forças sozinhas são responsáveis pelo movimento dos planetas em torno do Sol.

Analogamente, não resulta das Eqs. (14.4) e (14.5) que dois sistemas de forças externas, de mesma resultante e o mesmo momento resultante produzirão o mesmo efeito sobre um dado sistema de partículas. Claramente, os sistemas mostrados nas Figs. 14.4*a* e 14.4*b* têm a mesma resultante, e o mesmo momento resultante; contudo, o primeiro sistema acelera a partícula *A* e não afeta a partícula *B*, enquanto o segundo acelera *B* e não afeta *A*. É importante recordar que, quando estabelecemos na Seção 3.19 que dois sistemas equipolentes de forças que atuam sobre um corpo rígido também são equivalentes, observamos especificamente que esta propriedade *não* poderia ser estendida a um sistema de forças que atuam sobre um conjunto de partículas independentes tais como as consideradas neste capítulo.

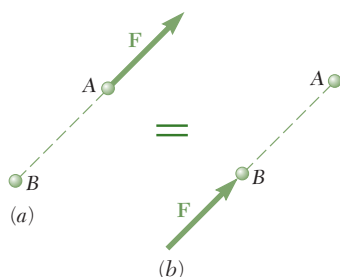



Figura 14.4

A fim de evitar qualquer confusão, sinais de igualdade verde são usados para ligar sistemas de vetores equipolentes, como os mostrados nas Figs. 14.3 e 14.4. Esses sinais indicam que os dois sistemas de vetores têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante. Os sinais de igualdade em preto continuarão a ser usados para indicar que dois sistemas de vetores são equivalentes, isto é, que um sistema pode verdadeiramente ser substituído pelo outro (Fig. 14.2).

14.3 Quantidade de movimento linear e angular de um sistema de partículas

As Eqs. (14.4) e (14.5), obtidas na seção precedente para o movimento de um sistema de partículas, podem ser expressas de forma mais condensada se introduzirmos a quantidade de movimento linear e a angular do sistema de partículas. Definindo a quantidade de movimento linear **L** do sistema de partículas como a soma das quantidades de movimento linear das várias partículas do sistema (Seção 12.3), escrevemos

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \tag{14.6}$$

Definindo a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ em relação a O do sistema de partículas de um modo similar (Seção 12.7), temos

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.7}$$

Diferenciando ambos os membros das Eqs. (14.6) e (14.7) em relação a t, escrevemos

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\dot{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \tag{14.8}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_O &= \sum_{i=1}^{n} (\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\dot{\mathbf{v}}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{v}_i \times m_i\mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i)\end{aligned}$$

que se reduz a

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \tag{14.9}$$

visto que os vetores $\mathbf{v}_i$ e $m_i\mathbf{v}_i$ são colineares.

Observamos que os membros do lado direito das Eqs. (14.S) e (14.9) são, respectivamente, idênticos aos membros do lado direito das Eqs. (14.4) e (14.5). Segue-se que os membros do lado esquerdo dessas equações são respectivamente iguais. Recordando que o membro do lado esquerdo da Eq. (14.5) representa a soma dos momentos $\mathbf{M}_O$ em relação a O das forças externas que atuam sobre as partículas do sistema, e omitindo o índice i das somas, escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \tag{14.10}$$

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{14.11}$$

Essas equações expressam que *a resultante e o momento resultante em relação ao ponto fixo O das forças externas são respectivamente iguais às taxas de variação da quantidade de movimento linear e da quantidade de movimento angular em relação a O do sistema de partículas.*

14.4 Movimento do centro de massa de um sistema de partículas

A Eq. (14.10) pode ser escrita de forma alternativa se o *centro de massa* do sistema de partículas for considerado. O centro de massa do sistema é o ponto G definido pelo vetor de posição $\bar{\mathbf{r}}$, que satisfaz a relação

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i \qquad (14.12)$$

onde m representa a massa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ das partículas. Decompondo os vetores de posição $\bar{\mathbf{r}}$ e $\mathbf{r}_i$ em coordenadas retangulares, obtemos as três equações escalares seguintes, que podem ser usadas para determinar as coordenadas $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ do centro de massa:

$$m\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i \qquad m\bar{y} = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i \qquad m\bar{z} = \sum_{i=1}^{n} m_i z_i \qquad (14.12')$$

Como $m_i g$ representa o peso da partícula P_i e mg o peso total das partículas, G é também o centro de gravidade do sistema de partículas. Entretanto, para evitar qualquer confusão, G será chamado de *centro de massa* do sistema de partículas, quando propriedades associadas à *massa* das partículas forem discutidas, e de *centro de gravidade* do sistema, quando propriedades associadas ao *peso* das partículas forem consideradas. Partículas localizadas fora do campo gravitacional da Terra, por exemplo, têm uma determinada massa, mas nenhum peso. Podemos então nos referir propriamente a seus centros de massa, mas obviamente não a seus centros de gravidade.*

Diferenciando ambos os membros da Eq. (14.12) em relação a t, escrevemos

$$m\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\mathbf{r}}_i$$

ou

$$m\bar{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \qquad (14.13)$$

onde $\bar{\mathbf{v}}$ representa a velocidade do centro de massa G do sistema de partículas. Mas o membro do lado direito da Eq. (14.13) é, por definição, a quantidade de movimento linear $\mathbf{L}$ do sistema (Seção 14.3). Temos, portanto

$$\mathbf{L} = m\bar{\mathbf{v}} \qquad (14.14)$$

e, diferenciando ambos os membros em relação a t,

$$\dot{\mathbf{L}} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad (14.15)$$

* Também pode-se argumentar que o centro de massa e o centro de gravidade de um sistema de partículas não coincidem exatamente, pois os pesos das partículas são dirigidos para o centro da Terra e, portanto, não formam verdadeiramente um sistema de forças paralelas.

onde $\overline{\mathbf{a}}$ representa a aceleração do centro de massa G. Substituindo o valor de $\dot{\mathbf{L}}$ da (14.15) na (14.10), escrevemos a equação

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{14.16}$$

que define o movimento do centro de massa G do sistema de partículas.

Notamos que a Eq. (14.16) é idêntica à equação que teríamos obtido para uma partícula de massa m igual à massa total das partículas do sistema, sobre a qual atuam todas as forças externas. Dizemos, portanto, que *o centro de massa de um sistema de partículas se move como se a massa total do sistema e todas as forças externas estivessem concentradas nesse ponto.*

Esse princípio é mais bem ilustrado pelo movimento de uma granada ao explodir. Sabemos que, se a resistência do ar for desprezada, pode-se assumir que a granada descreverá uma trajetória parabólica. Após sua explosão, o centro de massa G dos fragmentos dessa granada continuará a percorrer a mesma trajetória. Na verdade, o ponto G deve se mover como se a massa e o peso de todos os fragmentos estivessem concentrados em G; ele deve, portanto, se mover como se a granada não tivesse explodido.

Deve-se notar que a dedução precedente não envolve os momentos das forças externas. Portanto, *seria errado assumir* que as forças externas são equipolentes a um vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado ao centro de massa G. Esse não é geralmente o caso, pois, como você verá na próxima seção, a soma dos momentos em relação a G das forças externas não *é* geralmente igual a zero.

14.5 Quantidade de movimento angular de um sistema de partículas em relação ao seu centro de massa

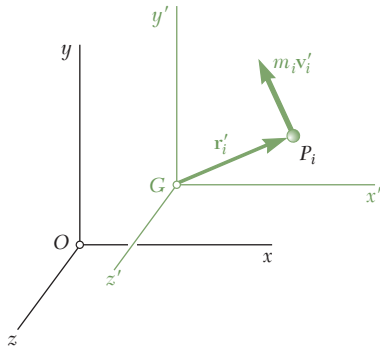



Figura 14.5

Em algumas aplicações (por exemplo, na análise do movimento de um corpo rígido), é conveniente considerar o movimento das partículas do sistema em relação a um sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$, que se move em translação em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$ (Fig. 14.5). Embora um sistema ligado ao centro de massa não seja, usualmente, um sistema de referência newtoniana, será visto que a relação fundamental (14.11) permanece válida quando o sistema de referência $Oxyz$ é substituído por $Gx'y'z'$.

Representando, respectivamente, por $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i$ o vetor de posição e a velocidade da partícula P_i em relação ao sistema de referência móvel $Gx'y'z'$, definimos a *quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}'_G$ do sistema de partículas *em relação ao centro de massa G* como segue:

$$\mathbf{H}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.17}$$

Agora diferenciamos ambos os membros da Eq. (14.17) em relação a t. Essa operação é similar àquela efetuada na Seção 14.3 para a Eq. (14.7), portanto escrevemos

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}'_i) \tag{14.18}$$

onde $\mathbf{a}'_i$ representa a aceleração de P_i relativa ao sistema móvel de referência. Referindo à Seção 11.12, escrevemos

$$\mathbf{a}_i = \overline{\mathbf{a}} + \mathbf{a}'_i$$

onde $\mathbf{a}_i$ e $\overline{\mathbf{a}}$ representam, respectivamente, as acelerações de P_i e G relativas ao sistema $Oxyz$. Resolvendo para $\mathbf{a}'_i$ e substituindo em (14.18), temos

$$\dot{\mathbf{H}}'_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{a}_i) - \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \overline{\mathbf{a}} \tag{14.19}$$

Mas, pela Eq. (14.12), a segunda soma da Eq. (14.19) é igual a $m\overline{\mathbf{r}}'$ e, portanto, igual a zero, pois o vetor de posição $\overline{\mathbf{r}}'$ de G em relação ao sistema $Gx'y'z'$ é claramente zero. Por outro lado, como $\mathbf{a}_i$ representa a aceleração de P_i em relação a um sistema newtoniano, podemos usar a Eq. (14.1) e substituir $m_i\mathbf{a}_i$ pela soma das forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ e da resultante $\mathbf{F}_i$ das forças externas que atuam sobre P_i. Mas um argumento semelhante àquele usado na Seção 14.2 mostra que o momento resultante em relação a G das forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ de todo o sistema é zero. A primeira soma da Eq. (14.19) se reduz, portanto, ao momento resultante em relação a G das forças externas que atuam sobre as partículas do sistema, e escrevemos

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}'_G \tag{14.20}$$

que expressa que *o momento resultante em relação a G das forças externas é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular em relação a G do sistema de partículas.*

Deve-se notar que na Eq. (14.17) definimos a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}'_G$ como a soma dos momentos em relação a G das quantidades de movimento das partículas $m_i\mathbf{v}'_i$ *em seus movimentos em relação a um sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$*. Podemos querer, algumas vezes, calcular a soma $\mathbf{H}_G$ dos momentos em relação a G das quantidades de movimento das partículas $m_i\mathbf{v}_i$ *em seus movimentos absolutos,* isto é, em seus movimentos como observados a partir do sistema de referência newtoniano $Oxyz$ (Fig. 14.6):

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) \tag{14.21}$$

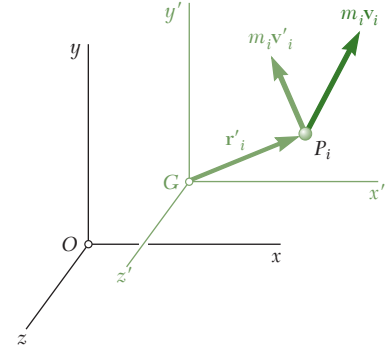
Figura 14.6

Em particular, as quantidades de movimento angulares $\mathbf{H}'_G$ e $\mathbf{H}_G$ são exatamente iguais. Isso pode ser verificado recorrendo-se à Seção 11.12 e escrevendo

$$\mathbf{v}_i = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \tag{14.22}$$

Substituindo o valor de $\mathbf{v}_i$ da Eq. (14.22) na Eq. (14.21), temos

$$\mathbf{H}_G = \left(\sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}'_i\right) \times \overline{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i)$$

Mas, como observado anteriormente, a primeira soma é igual a zero. Portanto, $\mathbf{H}_G$ se reduz à segunda soma, que, por definição, é igual a $\mathbf{H}'_G$.*

* Note que esta propriedade é característica do sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$ mas que, em geral, não é válida para outros sistemas de referência (ver Problema 14.29).

Levando em conta a propriedade que acabamos de estabelecer, simplificamos nossa notação retirando o apóstrofo (′) da Eq. (14.20) e escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{14.23}$$

onde se entende que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ pode ser calculada tomando-se os momentos em relação a G das quantidades de movimento das partículas em seus movimentos, seja em relação ao sistema de referência newtoniana $Oxyz$ ou ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$.

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.24}$$

14.6 Conservação da quantidade de movimento para um sistema de partículas

Se nenhuma força externa atua sobre as partículas de um sistema, os membros do lado esquerdo das Eqs. (14.10) e (14.11) são iguais a zero, e essas equações se reduzem a $\dot{\mathbf{L}} = 0$ e $\dot{\mathbf{H}}_O = 0$. Concluímos que

$$\mathbf{L} = \text{constante} \qquad \mathbf{H}_O = \text{constante} \tag{14.25}$$

As equações obtidas expressam que a quantidade de movimento linear do sistema de partículas e sua quantidade de movimento angular em relação ao ponto fixo O se conservam.

Em algumas aplicações, como os problemas que envolvem forças centrais, o momento em relação a um ponto fixo O de cada uma das forças externas pode ser zero sem que nenhuma delas seja zero. Em tais casos, a segunda das Eqs. (14.25) ainda é verdadeira; a quantidade de movimento angular do sistema de partículas em relação a O se conserva.

Foto 14.1 Se não existirem forças externas atuando nos dois estágios deste foguete, as quantidades de movimento linear e angular serão conservadas.

O conceito de conservação da quantidade de movimento também pode ser aplicado à análise do movimento do centro de massa G de um sistema de partículas e à análise do movimento do sistema em relação a G. Por exemplo, se a soma das forças externas é zero, a primeira da Eq. (14.25) se aplica. Recordando a Eq. (14.14), escrevemos

$$\overline{\mathbf{v}} = \text{constante} \tag{14.26}$$

que expressa que o centro de massa G do sistema se move em uma linha reta e a uma velocidade constante. Por outro lado, se a soma dos momentos em relação a G das forças externas é zero, segue-se da Eq. (14.23) que a quantidade de movimento angular do sistema em relação a seu centro de massa é conservada

$$\mathbf{H}_G = \text{constante} \tag{14.27}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 14.1

Um veículo espacial de 200 kg é observado em $t = 0$ ao passar pela origem de um sistema de referência newtoniano $Oxyz$ com velocidade $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$ em relação ao sistema. Como resultado da detonação de cargas explosivas, o veículo se separa em três partes A, B e C, de massas de 100 kg, 60 kg e 40 kg, respectivamente. Sabendo que, em $t = 2{,}5$ s, as posições das partes A e B observadas são $A(555, -180, 240)$ e $B(255, 0, -120)$, sendo as coordenadas expressas em metros, determine a posição da parte C nesse instante.

SOLUÇÃO

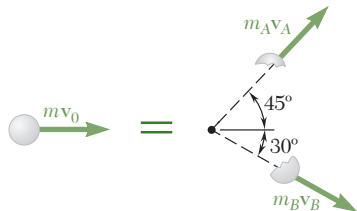
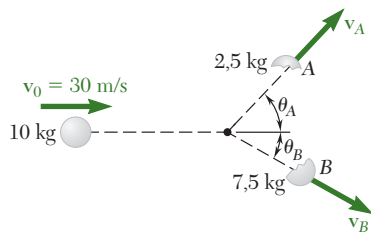
Como não há força externa, o centro de massa G do sistema se move com velocidade constante $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$. Em $t = 2{,}5$ s, sua posição é

$$\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_0 t = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}(2{,}5 \text{ s}) = (375 \text{ m})\mathbf{i}$$

Recordando a Eq. (14.12), escrevemos

$$m\bar{\mathbf{r}} = m_A\mathbf{r}_A + m_B\mathbf{r}_B + m_C\mathbf{r}_C$$

$$(200 \text{ kg})(375 \text{ m})\mathbf{i} = (100 \text{ kg})[(555 \text{ m})\mathbf{i} - (180 \text{ m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}]$$
$$+ (60 \text{ kg})[(255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}] + (40 \text{ kg})\mathbf{r}_C$$

$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k}$$ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 14.2

Um projétil de 10 kg se move com uma velocidade de 30 m/s quando explode em dois fragmentos, A e B, de massas 2,5 kg e 7,5 kg, respectivamente. Sabendo que imediatamente após a explosão os fragmentos A e B se movem em direções definidas respectivamente por $\theta_A = 45°$ e $\theta_B = 30°$, determine a velocidade de cada fragmento.

SOLUÇÃO

Como não há forças externas, a quantidade de movimento linear do sistema se conserva, e escrevemos

$$m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B = m\mathbf{v}_0$$
$$2{,}5\,\mathbf{v}_A + 7{,}5\,\mathbf{v}_B = 10\,\mathbf{v}_0$$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad 2{,}5 v_A \cos 45° + 7{,}5 v_B \cos 30° = 10(30)$

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad 2{,}5 v_A \operatorname{sen} 45° - 7{,}5 v_B \operatorname{sen} 30° = 0$

Resolvendo simultaneamente as duas equações para v_A e v_B, temos

$$v_A = 62{,}2 \text{ m/s} \qquad v_B = 29{,}3 \text{ m/s}$$

$\mathbf{v}_A = 62{,}2$ m/s ⦨ 45° $\qquad \mathbf{v}_B = 29{,}3$ m/s ⦩ 30° ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Este capítulo trata do movimento de *sistemas de partículas,* isto é, de movimento de um grande número de partículas consideradas em conjunto, em vez de separadamente. Nesta primeira lição você aprendeu a calcular a *quantidade de movimento linear* e a *quantidade de movimento angular* de um sistema de partículas. Definimos a quantidade de movimento linear **L** de um sistema de partículas como a soma das quantidades de movimentos lineares das partículas e definimos a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema como a soma das quantidades de movimentos angulares das partículas em relação a *O:*

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i \qquad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i) \qquad (14.6,\ 14.7)$$

Nesta lição, você vai resolver uma série de problemas práticos, seja observando que a quantidade de movimento linear de um sistema de partículas se conserva ou considerando o movimento do centro de massa de um sistema de partículas.

1. Conservação da quantidade de movimento linear de um sistema de partículas. Isso ocorre *quando a resultante das forças externas que agem sobre as partículas do sistema é igual a zero.* Você pode encontrar tal situação nos seguintes tipos de problema.

a. Problemas envolvendo o movimento retilíneo de objetos como automóveis e vagões ferroviários que colidem entre si. Depois de verificar que a resultante das forças externas é igual a zero, iguale as somas algébricas das quantidades de movimento iniciais e finais para obter uma equação que possa ser resolvida para uma incógnita.

b. Problemas envolvendo o movimento bidimensional ou tridimensional de objetos como granadas explosivas, ou de aviões, automóveis e bolas de bilhar que colidem entre si. Depois de verificar que a resultante das forças externas é igual a zero, some vetorialmente as quantidades de movimento iniciais dos objetos, faça o mesmo com suas quantidades de movimento finais e iguale as duas somas para obter uma equação vetorial que expresse a conservação da quantidade de movimento linear do sistema.

No caso de um movimento bidimensional, essa equação pode ser substituída por duas equações escalares que podem ser resolvidas para duas incógnitas, enquanto no caso de um movimento tridimensional, ela pode ser substituída por três equações escalares que podem ser resolvidas para três incógnitas.

2. Movimento do centro de massa de um sistema de partículas. Você observou na Seção 14.4 que *o centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa do sistema e todas as forças externas estivessem concentradas nesse ponto.*

a. No caso de um corpo que explode em movimento, segue-se que o centro de massa dos fragmentos resultantes se movimenta como o corpo propriamente dito se moveria se a explosão não tivesse ocorrido. Problemas desse tipo podem ser resolvidos escrevendo-se a equação de movimento do centro de massa do sistema em forma vetorial e expressando o vetor de posição do centro de massa em termos dos vetores de posição dos vários fragmentos [Eq. (14.12)]. Você pode então reescrever a equação vetorial como duas ou três equações escalares e resolver essas equações para um número equivalente de incógnitas.

b. No caso da colisão de vários corpos em movimento, segue-se que o movimento do centro de massa dos vários corpos não é afetado pela colisão. Problemas desse tipo podem ser resolvidos escrevendo-se a equação de movimento do centro de massa do sistema em forma vetorial e expressando seu vetor de posição antes e depois da colisão em termos dos vetores de posição dos corpos relevantes [Eq. (14.12)]. Você pode então reescrever a equação vetorial como duas ou três equações escalares e solucionar essas equações para um número equivalente de incógnitas.

PROBLEMAS

14.1 Um empregado de companhia aérea coloca rapidamente duas malas de viagem, de massas iguais a 15 kg e 20 kg, respectivamente, sobre um carrinho de transporte de bagagem cuja massa é 25 kg. Sabendo que o carrinho está inicialmente em repouso e que o empregado imprime uma velocidade horizontal de 3 m/s à mala de 15 kg e uma velocidade horizontal de 2 m/s à mala de 20 kg, determine a velocidade final do carrinho de bagagem se a primeira mala posta sobre o carrinho é (*a*) a mala de 15 kg e (*b*) a mala de 20 kg.

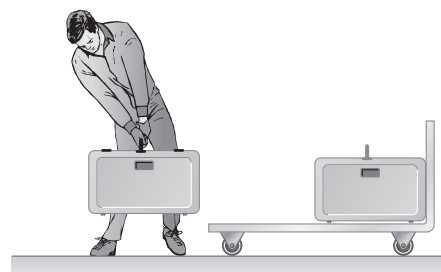



Figura P14.1 e P14.2

14.2 Um empregado de companhia aérea arruma rapidamente duas malas de viagem com uma velocidade horizontal de 2,4 m/s, sobre um carrinho de transporte de bagagem cuja massa é 25 kg e que está inicialmente em repouso. (*a*) Sabendo que a velocidade final do carrinho de bagagem é 1,2 m/s e que a primeira mala posta pelo empregado sobre o carrinho possui peso igual a 15 kg, determine o peso da outra mala. (*b*) Qual seria a velocidade final do carrinho se o funcionário tivesse invertido a ordem de colocação das malas?

14.3 Um homem de 90 kg e uma mulher de 60 kg estão lado a lado na mesma extremidade de um barco de 150 kg, prontos para mergulhar, cada um com uma velocidade de 5 m/s em relação ao barco. Determine a velocidade do barco após os dois terem mergulhado, se (*a*) a mulher mergulha primeiro e (*b*) o homem mergulha primeiro.

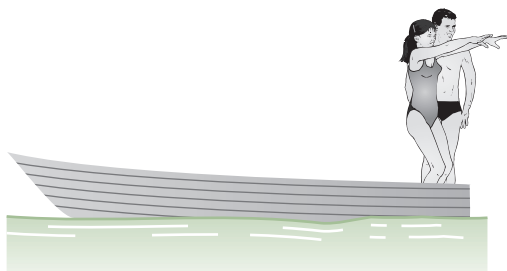
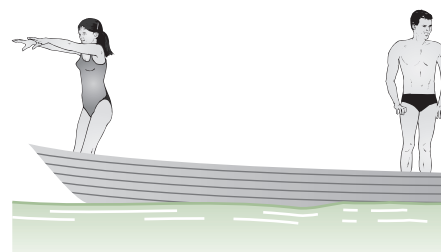



Figura P14.3

Figura P14.4

14.4 Um homem de 90 kg e uma mulher de 60 kg estão em extremidades opostas de um barco de 150 kg, prontos para mergulhar, cada um com uma velocidade de 5 m/s em relação ao barco. Determine a velocidade do barco após os dois terem mergulhado, se (*a*) a mulher mergulha primeiro e (*b*) o homem mergulha primeiro.

14.5 Um projétil é disparado com uma velocidade horizontal de 450 m/s por meio de um bloco *A* de 3 kg de massa e fica incrustado em um bloco *B* de 2,5 kg. Sabendo que os blocos *A* e *B* iniciam seus movimentos com velocidades de 1,5 m/s e 2,7 m/s, respectivamente, determine (*a*) a massa do projétil e (*b*) sua velocidade ao se deslocar do bloco *A* para o bloco *B*.

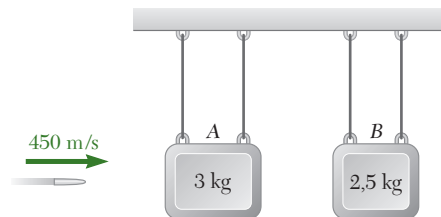



Figura *P14.5*

14.6 Um vagão *A* de massa de 45.000 kg move-se em um pátio de manobras ferroviário com uma velocidade de 10 km/h em direção aos vagões *B* e *C*, ambos em repouso com os freios liberados e a curta distância um do outro. O vagão prancha *B* é de 25.000 kg e transporta um contêiner de 30.000 kg e o vagão *C* é de 40.000 kg. À medida que os vagões batem um no outro, eles são automaticamente e firmemente acoplados. Determine a velocidade do vagão *A* imediatamente após os dois acoplamentos, considerando que o contêiner (*a*) não desliza sobre o

vagão prancha, (*b*) desliza após o primeiro acoplamento, mas atinge o repouso antes que o segundo acoplamento ocorra, (*c*) desliza e atinge o repouso apenas após o segundo acoplamento ter ocorrido.

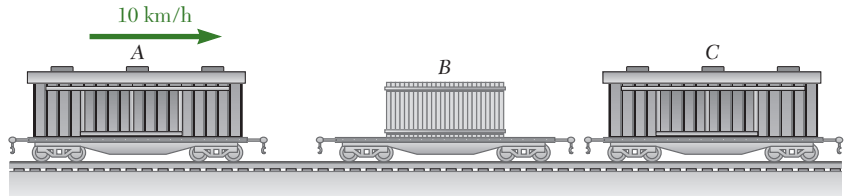



Figura *P14.6*

14.7 Em um parque de diversões há carros bate-bate *A*, *B* e *C* de 200 kg com pilotos com massas de 40 kg, 60 kg e 35 kg respectivamente. O carro *A* está se movendo para a direita com a velocidade $\mathbf{v}_A = 2$ m/s e o carro *C* tem a velocidade $\mathbf{v}_C = 1{,}5$ m/s para a esquerda, mas o carro *B* está inicialmente em repouso. O coeficiente de restituição entre cada carro é 0,8. Determine a velocidade final de cada carro, após todos os impactos, considerando que (*a*) o carro *A* e o carro *C* atingem o carro *B* ao mesmo tempo, (*b*) o carro *A* atinge o carro *B* antes do carro *C* atingir o carro *B*.

14.8 Em um parque de diversões há carros bate-bate *A*, *B* e *C* de 200 kg com pilotos com massas de 40 kg, 60 kg e 35 kg, respectivamente. O carro *A* está se movendo para a direita com velocidade $\mathbf{v}_A = 2$ m/s quando atinge o carro *B* parado. O coeficiente de restituição entre cada carro é 0,8. Determine a velocidade do carro *C*, de modo que, após o carro *B* colidir com o carro *C*, a velocidade do carro *B* é nula.

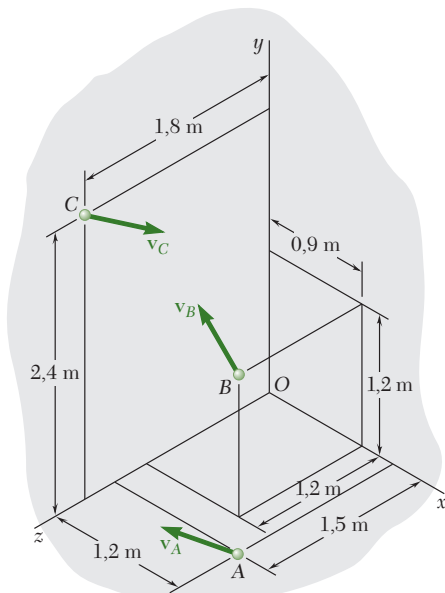
Figura P14.7 e P14.8

14.9 Um sistema consiste de três partículas, *A*, *B* e *C*. Sabemos que $m_A = 3$ kg, $m_B = 4$ kg e $m_C = 5$ kg e que as velocidades das partículas, expressas em m/s são, respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = -6\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a *O*.

14.10 Para o sistema de partículas do Problema 14.9, determine (*a*) o vetor de posição $\overline{\mathbf{r}}$ do centro de massa *G* do sistema, (*b*) a quantidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ do sistema, (*c*) a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do sistema em relação a *G*. Verifique também que as respostas encontradas para este problema e para o Problema 14.9 satisfazem a equação dada no Problema 14.27.

Figura P14.9 e *P14.11*

14.11 Um sistema consiste de três partículas, *A*, *B* e *C*. Sabemos que $m_A = 3$ kg, $m_B = 4$ kg e $m_C = 5$ kg e que as velocidades das partículas, expressas em m/s, são respectivamente, $\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_C = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$. Determine (*a*) os compo-

nentes v_x e v_y da velocidade da partícula B para a qual a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a O é paralelo ao eixo z, (b) o valor correspondente de $\mathbf{H}_O$.

14.12 Para o sistema de partículas do Problema 14.11, determine (a) os componentes v_x e v_y da velocidade da partícula B para a qual a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a O é paralelo ao eixo y, (b) o valor correspondente de $\mathbf{H}_O$.

14.13 Um sistema consiste de três partículas, A, B e C. Sabemos que $m_A = 2{,}5$ kg, $m_B = 2$ kg e $m_C = 1{,}5$ kg e que as velocidades das partículas, expressas em m/s, são respectivamente, $\mathbf{v}_A = \mathbf{i} + 1{,}5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{v}_B = v_x\mathbf{i} + \mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}_C = -1{,}5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 0{,}5\mathbf{k}$. Determine ($a$) os componentes v_x e v_y da velocidade da partícula B para a qual a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a O é paralelo ao eixo x, (b) o valor de $\mathbf{H}_O$.

Figura P14.13

14.14 Para o sistema de partículas do Problema 14.13, determine (a) os componentes v_x e v_z da velocidade da partícula B para a qual a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a O é paralelo ao eixo z, (b) o valor de $\mathbf{H}_O$.

14.15 Um veículo espacial de 450 kg está viajando com uma velocidade $\mathbf{v}_0 = (360 \text{ m/s})\mathbf{i}$ passa pela origem O no instante $t = 0$. Cargas explosivas separam o veículo em três partes, A, B e C, de 225 kg, 150 kg e 75 kg, respectivamente. Sabendo que no instante $t = 4$ s as posições observadas das partes A e B são A (1.200 m, -300 m, -600 m) e B (1.300 m, 350 m, 800 m), determine a correspondente posição da parte C. Despreze o efeito da gravidade.

14.16 Um projétil de 15 kg passa pela origem O com uma velocidade $\mathbf{v}_0 = (40 \text{ m/s})\mathbf{i}$ quando explode em dois fragmentos A e B, de 6 kg e 9 kg, respectivamente. Sabendo que 3 s depois a posição do fragmento A é (100 m, 10 m, -20 m), determine a posição do fragmento B no mesmo instante. Considere $a_y = -g = -9{,}81 \text{ m/s}^2$ e despreze a resistência do ar.

14.17 Observa-se um pequeno avião de 1.500 kg de peso e um helicóptero de 3.000 kg de peso voando a uma altitude de 1.200 m preste a colidir diretamente acima de uma torre localizada em O em uma área arborizada. Quatro minutos antes, o helicóptero tinha sido visto 8,4 km diretamente a oeste da torre, e o avião 16 km a oeste e 12 km ao norte da torre. Como resultado da colisão, o helicóptero se dividiu em duas partes, H_1 e H_2, com massa $m_1 = 1.000$ kg e $m_2 = 2.000$ kg, respectivamente; o avião permaneceu em uma peça única até cair no solo. Sabendo que os dois fragmentos do helicóptero foram localizados nos pontos H_1 (500 m, -100 m) e H_2 (600 m, -500 m), respectivamente, e considerando que todas as partes atingiram o solo no mesmo instante, determine as coordenadas do ponto A onde os destroços do avião serão encontrados.

14.18 No Problema 14.17, sabendo que os destroços do pequeno avião foram encontrados no ponto A (1.200 m, 80 m) e o fragmento de 1.000 kg do helicóptero no ponto H_1 (400 m, -200 m), e considerando que todas as partes atingiram o solo no mesmo instante, determine as coordenadas do ponto H_2 onde o outro fragmento do helicóptero será encontrado.

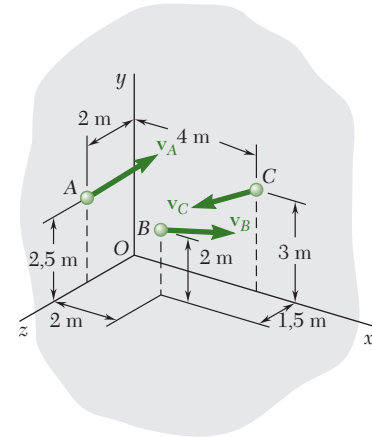
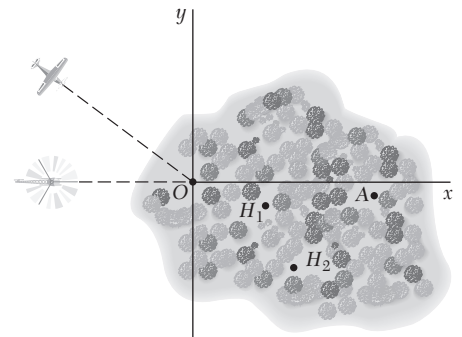



Figura P14.17

14.19 e 14.20 O carro A estava viajando para o leste em alta velocidade quando colidiu no ponto O com o carro B, que estava viajando para o norte a 72 km/h. O carro C, que estava viajando para o oeste a 90 km/h, quando estava a 10 m a leste e 3 m ao norte do ponto O houve a colisão. Devido ao pavimento estar molhado, o motorista do carro C não pode impedir que seu carro deslizasse na direção dos outros dois carros e os três carros, presos, continuaram deslizando até que eles atingissem o poste P. Sabendo que as massas dos carros A, B e C são, respectivamente, 1.500 kg, 1.300 kg e 1.200 kg, e desprezando as forças nos carros pelo pavimento molhado resolva os problemas indicados

14.19 Sabendo que as coordenadas do poste são x_p = 18 m e y_p = 13,9 m, determine (a) o tempo decorrido desde a primeira colisão até a parada em P, (b) a velocidade do carro A.

14.20 Sabendo que a velocidade do carro A era de 129,6 km/h e que o tempo decorrido desde a primeira colisão até a parada em P foi 2,4 s, determine as coordenadas do poste P.

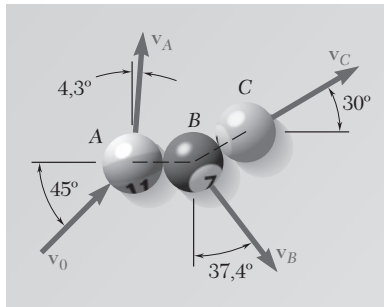
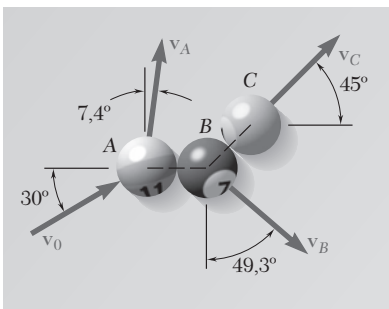
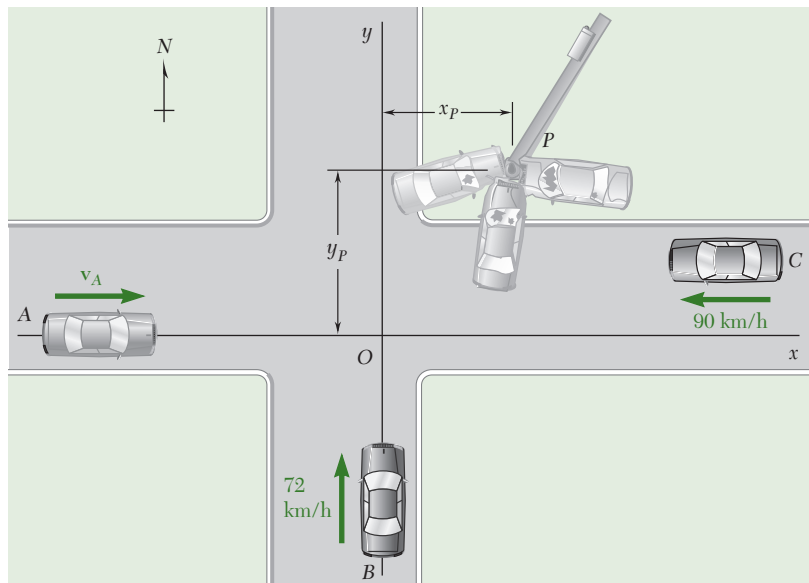



Figura P14.19, P14.20

Figura P14.21

14.21 e 14.22 Em um jogo de bilhar, a bola A se move com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ quando ela atinge as bolas B e C, que estão em repouso e alinhadas conforme mostrado na figura. Sabendo que após a colisão as três bolas se movem nas direções indicadas e que v_0 = 4 m/s e v_0 = 2 m/s, determine a intensidade da velocidade (a) da bola A e (b) da bola B.

Figura P14.22

14.23 Um arqueiro demonstra sua habilidade em atingir uma bola de tênis jogada por seu assistente. A bola de tênis de 58 g tem velocidade de (10 m/s)$\mathbf{i}$ − (2 m/s)$\mathbf{j}$ e está a 10 m do chão quando é atingida por uma flecha de 40 g viajando com a velocidade de (50 m/s)$\mathbf{j}$ + (70 m/s)$\mathbf{k}$ onde $\mathbf{j}$ é dirigida para cima. Determine a posição P onde a bola e a flecha atingiram o chão, em relação ao ponto O localizado diretamente abaixo do ponto de impacto.

14.24 Em um experimento de dispersão de partículas, uma partícula alfa A é projetada com velocidade $\mathbf{u}_0 = -(600 \text{ m/s})\mathbf{i} + (750 \text{ m/s})\mathbf{j} - (800 \text{ m/s})\mathbf{k}$ no interior de uma corrente de núcleos de átomos de oxigênio que se movem com uma velocidade comum $\mathbf{v}_0 = (600 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Após colidir sucessivamente com os núcleos B e C, observa-se que a partícula A se move ao longo da trajetória definida pelos pontos A_1 (280, 240, 120) e A_2 (360, 320, 160), enquanto os núcleos B e C se movem ao longo das trajetórias definidas, respectivamente, por B_1 (147, 220, 130) e B_2 (114, 290, 120), e por C_1 (240, 232, 90) e C_2 (240, 280, 75). Todas as trajetórias formam segmentos de reta e todas as coordenadas estão expressas em milímetros. Sabendo que a massa de um núcleo de oxigênio é quatro vezes a massa de uma partícula alfa, determine a velocidade de cada uma das três partículas após as colisões.

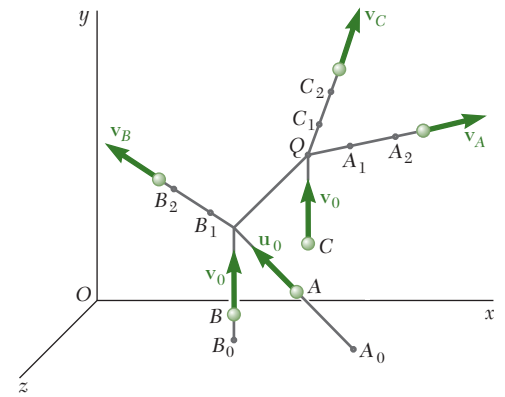



Figura P14.24

14.25 Uma ogiva de 6 kg que se move a uma velocidade $\mathbf{v}_0 = (12 \text{ m/s})\mathbf{i} - (10 \text{ m/s})\mathbf{j} - (400 \text{ m/s})\mathbf{k}$ explode no ponto D em três fragmentos, A, B e C, que têm massa de, respectivamente, 2,5 kg, 2 kg e 1,5 kg. Sabendo que os fragmentos atingem a parede vertical nos pontos indicados, determine a velocidade de cada fragmento imediatamente após a explosão.

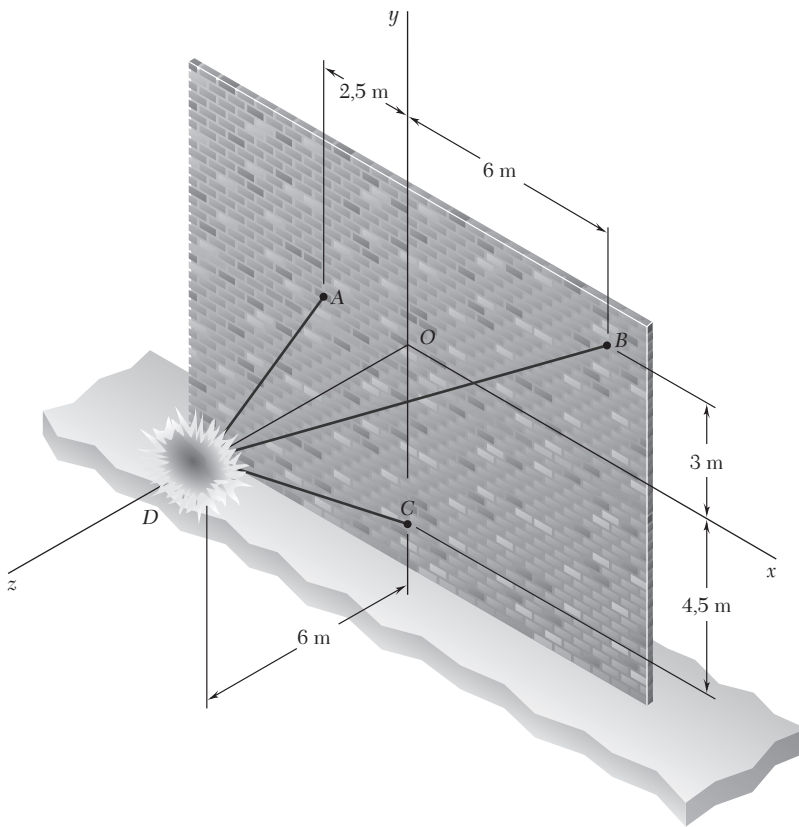



Figura P14.25 e P14.26

14.26 Uma ogiva de 6 kg que se move a uma velocidade $\mathbf{v}_0 = (12 \text{ m/s})\mathbf{i} - (10 \text{ m/s})\mathbf{j} - (400 \text{ m/s})\mathbf{k}$ explode no ponto D em três fragmentos, A, B e C, que têm massa de, respectivamente, 2 kg, 1,5 kg e 2,5 kg. Sabendo que os fragmentos atingem a parede vertical nos pontos indicados, determine a velocidade de cada fragmento imediatamente após a explosão.

14.27 Deduza a relação

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G$$

entre as quantidades de movimento angulares $\mathbf{H}_O$ e $\mathbf{H}_G$ definidas nas equações (14.7) e (14.24), respectivamente. Os vetores $\bar{\mathbf{r}}$ e $\bar{\mathbf{v}}$ definem, respectivamente, a posição e a velocidade do centro de massa G do sistema de partículas em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$, e m representa a massa total do sistema.

14.28 Mostre que a Eq. (14.23) pode ser derivada diretamente da Eq. (14.11) substituindo por $\mathbf{H}_O$ a expressão dada no Problema 14.27.

Figura P14.29

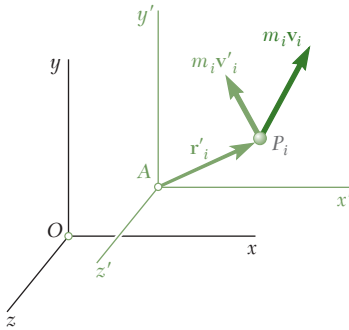
14.29 Considere o sistema de referência $Ax'y'z'$ em translação em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$. Definimos a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}'_A$ de um sistema de n partículas em relação a A como a soma

$$\mathbf{H}'_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i \qquad (1)$$

dos momentos em relação a A das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}'_i$ das partículas em seus movimentos relativos ao sistema de referência $Ax'y'z'$. Representando por $\mathbf{H}_A$ a soma

$$\mathbf{H}_A = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i \qquad (2)$$

dos momentos em relação a A das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}_i$ das partículas em seu movimento relativo ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$, mostre que $\mathbf{H}_A = \mathbf{H}'_A$ em um dado instante se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita nesse instante: (*a*) A tem velocidade nula em relação ao sistema de referência $Oxyz$, (*b*) A coincide com o centro de massa G do sistema e (*c*) a velocidade $\mathbf{v}_A$ relativa a $Oxyz$ está dirigida ao longo da linha AG.

14.30 Mostre que a relação $\Sigma\mathbf{M}_A = \dot{\mathbf{H}}'_A$, onde $\mathbf{H}'_A$ é definido pela Eq. (1) do Problema 14.29 e $\Sigma\mathbf{M}_A$ representa a soma dos momentos em relação a A das forças externas que atuam sobre o sistema de partículas, é válida se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita: (*a*) o sistema de referência $Ax'y'z'$ é, ele próprio, um sistema newtoniano de referência, (*b*) A coincide com o centro de massa G e (*c*) a aceleração $\mathbf{a}_A$ de A relativa a $Oxyz$ está dirigida ao longo da linha AG.

14.7 Energia cinética de um sistema de partículas

A energia cinética T de um sistema de partículas é definida como a soma das energias cinéticas das várias partículas do sistema. Referindo-nos à Seção 13.3, escrevemos, portanto

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (14.28)$$

Usando um sistema de referência ligado ao centro de massa. É frequentemente conveniente, ao calcular a energia cinética de um sistema com um grande número de partículas (como no caso de um

corpo rígido), considerar separadamente o movimento do centro de massa G do sistema e o movimento do sistema em relação a um sistema de referência móvel ligado a G.

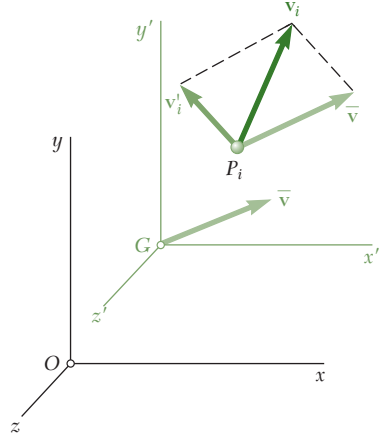



Figura 14.7

Seja P_i uma partícula do sistema, $\mathbf{v}_i$ sua velocidade relativa ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$ e $\mathbf{v}'_i$ sua velocidade relativa ao sistema de referência móvel $Gx'y'z'$ que está em translação em relação a $Oxyz$ (Fig. 14.7). Recordamos da seção precedente que

$$\mathbf{v}_i = \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i \qquad (14.22)$$

onde $\overline{\mathbf{v}}$ representa a velocidade do centro de massa G em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$. Observando que v_i^2 é igual ao produto escalar $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$, expressamos a energia cinética T do sistema em relação ao sistema newtoniano $Oxyz$ como segue:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

ou, substituindo o valor de $\mathbf{v}_i$ da Eq. (14.22),

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [m_i(\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i) \cdot (\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'_i)]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right)\overline{v}^2 + \overline{\mathbf{v}} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}'_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2$$

A primeira soma representa a massa total m do sistema. Recordando a Eq. (14.13), notamos que a segunda soma é igual a $m\overline{\mathbf{v}}'$ e, portanto, igual a zero, pois $\overline{\mathbf{v}}'$, que representa a velocidade de G relativa ao sistema de referência $Gx'y'z'$, é claramente igual a zero. Portanto, escrevemos

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \qquad (14.29)$$

Esta equação mostra que a energia cinética T de um sistema de partículas pode ser obtida *pela adição da energia cinética do centro de massa* G (considerando toda a massa concentrada em G) *à energia cinética do sistema em seu movimento relativo ao sistema* $Gx'y'z'$.

14.8 Princípio de trabalho e energia. Conservação de energia para um sistema de partículas

O princípio de trabalho e energia pode ser aplicado para cada partícula P_i de um sistema de partículas. Escrevemos

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \tag{14.30}$$

para cada partícula P_i, onde $U_{1\rightarrow 2}$ representa o trabalho realizado pelas forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ e pela força resultante externa $\mathbf{F}_i$ que atua sobre P_i. Adicionando as energias cinéticas das várias partículas do sistema e considerando o trabalho de todas as forças envolvidas, podemos aplicar a Eq. (14.30) para todo o sistema. As quantidades T_1 e T_2 representam agora a energia cinética de todo o sistema e podem ser calculadas seja pela Eq. (14.28) ou pela Eq. (14.29). A quantidade $U_{1\rightarrow 2}$ representa o trabalho de todas as forças que atuam sobre as partículas do sistema. Observe que, apesar das forças internas $\mathbf{f}_{ij}$ e $\mathbf{f}_{ji}$ serem iguais e opostas, o trabalho delas não vai, em geral, se cancelar, visto que as partículas P_i e P_j sobre as quais elas atuam sofrem, em geral, deslocamentos diferentes. Portanto, no cálculo de $U_{1\rightarrow 2}$, *devemos considerar o trabalho das forças internas* $\mathbf{f}_{ij}$, *bem como o trabalho das forças externas* $\mathbf{F}_i$.

Se todas as forças que atuam sobre as partículas do sistema são conservativas, a Eq. (14.30) pode ser substituída por

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{14.31}$$

onde V representa a energia potencial associada às forças internas e externas que atuam sobre as partículas do sistema. A Eq. (14.31) expressa o princípio de *conservação de energia* para o sistema de partículas.

Foto 14.2 Quando uma bola de golfe é atirada para fora da caixa de areia, parte da quantidade de movimento do taco é transferida para a bola de golfe e parte para a areia que é atingida.

14.9 Princípio de impulso e quantidade de movimento para um sistema de partículas

Integrando as Eqs. (14.10) e (14.11) em t de t_1 a t_2, escrevemos

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 - \mathbf{L}_1 \tag{14.32}$$

$$\sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1 \tag{14.33}$$

Recordando a definição do impulso linear de uma força dada na Seção 13.10, observamos que as integrais da Eq. (14.32) representam os impulsos lineares das forças externas que atuam sobre as partículas do sistema. Devemos nos referir, de modo semelhante, às integrais da Eq. (14.33) como *impulsos angulares* em relação a O das forças externas. Portanto, a Eq. (14.32) expressa que a soma dos impulsos lineares das forças externas que atuam sobre o sistema é igual à variação da quantidade de movimento linear do sistema. Analogamente, a Eq. (14.33) expressa que a soma dos impulsos angulares em relação a O das forças externas é igual à variação da quantidade de movimento angular do sistema em relação a O.

Para tornar claro o significado físico das Eqs. (14.32) e (14.33), reordenamos os termos dessas equações e escrevemos

$$\mathbf{L}_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = \mathbf{L}_2 \tag{14.34}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.35}$$

Nas partes *a* e *c* da Fig. 14.8, esboçamos as quantidades de movimento das partículas do sistema nos tempos t_1 e t_2, respectivamente. Na parte *b*, mostramos um vetor igual à soma dos impulsos lineares das forças externas e um binário de momento igual à soma dos impulsos angulares em relação a O das forças externas.

Para maior simplicidade, assumimos que as partículas se movem no plano da figura, mas a presente discussão permanece válida no caso de partículas que se movem no espaço. Recordando da Eq. (14.6), que $\mathbf{L}$, por definição, é a resultante das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}_i$, observamos que a Eq. (14.34) expressa que a resultante dos vetores mostrados nas partes *a* e *b* da Fig. 14.8 é igual à resultante dos vetores mostrados na parte *c* da mesma figura. Recordando da Eq. (14.7), que $\mathbf{H}_O$ é o momento resultante das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}_i$, observamos que a Eq. (14.35) expressa analogamente que o momento resultante dos vetores nas partes *a* e *b* da Fig. 14.8 é igual ao momento resultante dos vetores na parte *c*. Juntas, as Eqs. (14.34) e (14.35) expressam, portanto, que *as quantidades de movimento das partículas no instante* t_1 *e os impulsos das forças externas de* t_1 *a* t_2 *formam um sistema de vetores equipolentes ao sistema das quantidades de movimento das partículas no instante* t_2. Isto foi indicado na Fig. 14.8 pela utilização da cor verde nos sinais de adição e igualdade.

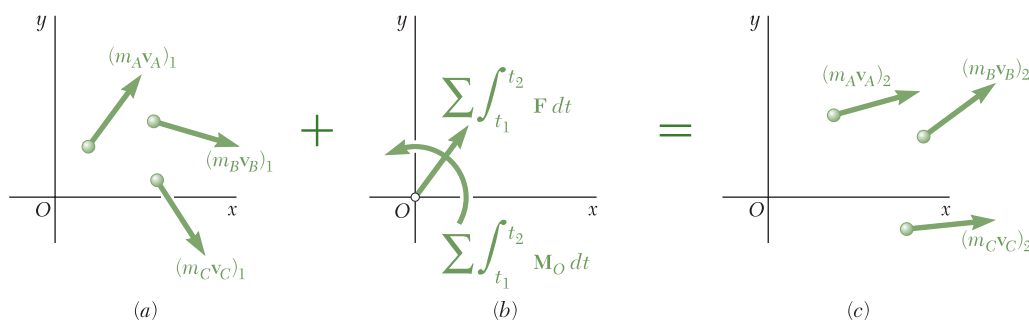



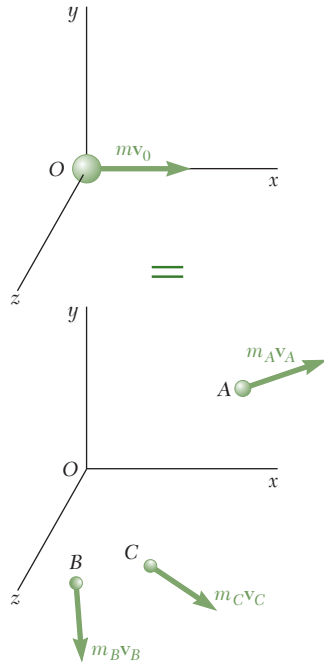
Figura 14.8

Se nenhuma força externa age sobre as partículas do sistema, as integrais nas Eqs. (14.34) e (14.35) são zero, e essas equações se reduzem a

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \tag{14.36}$$
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{14.37}$$

Verificamos, portanto, o resultado obtido na Seção 14.6: se nenhuma força externa atua sobre as partículas de um sistema, a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular em relação a O do sistema de partículas se conservam. O sistema das quantidades de movimento inicial é equipolente ao sistema das quantidades de movimento final, e segue-se que a quantidade de movimento angular do sistema de partículas em relação a *qualquer* ponto fixo se conserva.

PROBLEMA RESOLVIDO 14.3

Para o veículo espacial de 200 kg considerado no Problema Resolvido 14.1, sabe-se que em $t = 2{,}5$ s, a velocidade da parte A é $\mathbf{v}_A = (270 \text{ m/s})\mathbf{i} - (120 \text{ m/s})\mathbf{j} + (160 \text{ m/s})\mathbf{k}$ e a velocidade da parte B é paralela ao plano xz. Determine a velocidade da parte C.

SOLUÇÃO

Como não há força externa, a quantidade de movimento inicial $m\mathbf{v}_0$ é equipolente ao sistema das quantidades finais de movimento. Igualando primeiramente as somas dos vetores em ambas as partes da figura ao lado e, em seguida, as somas de seus momentos em relação a O, escrevemos

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2: \qquad m\mathbf{v}_0 = m_A\mathbf{v}_A + m_B\mathbf{v}_B + m_C\mathbf{v}_C \tag{1}$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2: \qquad 0 = \mathbf{r}_A \times m_A\mathbf{v}_A + \mathbf{r}_B \times m_B\mathbf{v}_B + \mathbf{r}_C \times m_C\mathbf{v}_C \tag{2}$$

Recordando do Problema Resolvido 14.1 que $\mathbf{v}_0 = (150 \text{ m/s})\mathbf{i}$,

$$m_A = 100 \text{ kg} \qquad m_B = 60 \text{ kg} \qquad m_C = 40 \text{ kg}$$
$$\mathbf{r}_A = (555 \text{ m})\mathbf{i} - (180\text{m})\mathbf{j} + (240 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_B = (255 \text{ m})\mathbf{i} - (120 \text{ m})\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_C = (105 \text{ m})\mathbf{i} + (450 \text{ m})\mathbf{j} - (420 \text{ m})\mathbf{k}$$

e usando a informação dada no enunciado deste problema, reescrevemos as Eqs. (1) e (2) como se segue:

$$200(150\mathbf{i}) = 100(270\mathbf{i} - 120\mathbf{j} + 160\mathbf{k}) + 60[(v_B)_x\mathbf{i} + (v_B)_z\mathbf{k}] + \\ + 40[(v_C)_x\mathbf{i} + (v_C)_y\mathbf{j} + (v_C)_z\mathbf{k}] \tag{1'}$$

$$0 = 100\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 555 & -180 & 240 \\ 270 & -120 & 160 \end{vmatrix} + 60\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 255 & 0 & -120 \\ (v_B)_x & 0 & (v_B)_z \end{vmatrix} \\ + 40\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 105 & 450 & -420 \\ (v_C)_x & (v_C)_y & (v_C)_z \end{vmatrix} \tag{2'}$$

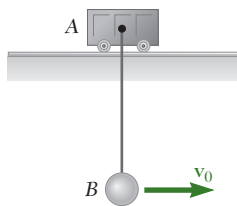
Igualando a zero o coeficiente de $\mathbf{j}$ em (1′) e os coeficientes de $\mathbf{i}$ e $\mathbf{k}$ em (2′), obtemos, após simplificações, as três equações escalares

$$(v_C)_y - 300 = 0$$
$$450(v_C)_z + 420(v_C)_y = 0$$
$$105(v_C)_y - 450(v_C)_x - 45.000 = 0$$

que resultam, respectivamente, em

$$(v_C)_y = 300 \qquad (v_C)_z = -280 \qquad (v_C)_x = -30$$

A velocidade da parte C é, portanto,

$$\mathbf{v}_C = -(30 \text{ m/s})\mathbf{i} + (300 \text{ m/s})\mathbf{j} - (280 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 14.4

A bola B, de massa m_B, está suspensa por uma corda de comprimento l presa ao carrinho A, de massa m_A, que pode rolar livremente sobre uma pista horizontal sem atrito. Se é dada à bola B uma velocidade inicial horizontal $\mathbf{v}_0$ enquanto o carrinho está em repouso, determine (*a*) a velocidade de B quando ela atinge sua elevação máxima e (*b*) a distância vertical máxima h que B vai subir. (Considera-se que $v_0^2 < 2gl$.)

SOLUÇÃO

O princípio de impulso e quantidade de movimento e o princípio de conservação da energia serão aplicados ao sistema de carrinho-bola entre sua posição inicial *1* e a posição *2*, quando B atinge sua elevação máxima.

Velocidades ***Posição 1:*** $(\mathbf{v}_A)_1 = 0 \qquad (\mathbf{v}_B)_1 = \mathbf{v}_0 \qquad (1)$

Posição 2: Quando a bola B atinge sua elevação máxima, sua velocidade $(\mathbf{v}_{B/A})_2$ relativa a seu suporte A é zero. Portanto, nesse instante, sua velocidade absoluta é

$$(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 + (\mathbf{v}_{B/A})_2 = (\mathbf{v}_A)_2 \qquad (2)$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Observando que os impulsos externos consistem de $\mathbf{W}_At$, $\mathbf{W}_Bt$ e $\mathbf{R}t$, onde $\mathbf{R}$ é a reação da pista sobre o carrinho, e com as equações (1) e (2), desenhamos o diagrama de impulso e quantidade de movimento e escrevemos

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 + \Sigma \textbf{Ext Imp}_{1\to 2} = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad m_Bv_0 = (m_A + m_B)(v_A)_2$

que expressa que a quantidade de movimento linear do sistema se conserva na direção horizontal. Resolvendo para $(v_A)_2$:

$$(v_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B}v_0 \qquad (\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \frac{m_B}{m_A + m_B}v_0 \rightarrow \quad ◀$$

Conservação de energia

Posição 1: ***Energia potencial:*** $V_1 = m_Agl$
Energia cinética: $T_1 = \frac{1}{2}m_Bv_0^2$
Posição 2: ***Energia potencial:*** $V_2 = m_Agl + m_Bgh$
Energia cinética: $T_2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2$

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$: $\quad \frac{1}{2}m_Bv_0^2 + m_Agl = \frac{1}{2}(m_A + m_B)(v_A)_2^2 + m_Agl + m_Bgh$

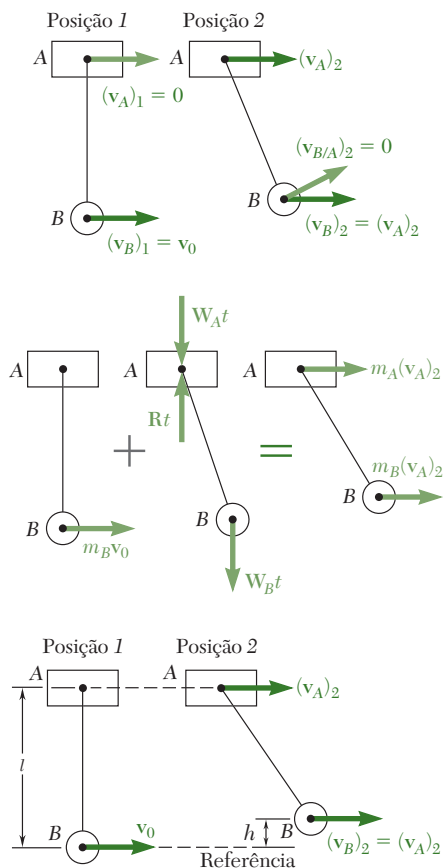
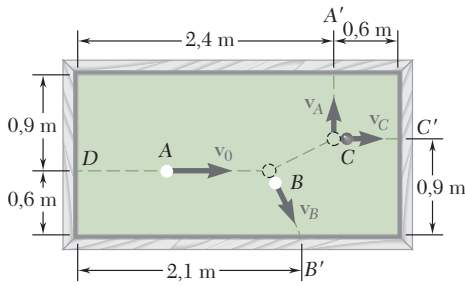
Resolvendo para h, temos

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_A + m_B}{m_B}\frac{(v_A)_2^2}{2g}$$

ou, substituindo para $(v_A)_2$ a expressão obtida anteriormente

$$h = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{m_B}{m_A + m_B}\frac{v_0^2}{2g} \qquad h = \frac{m_A}{m_A + m_B}\frac{v_0^2}{2g} \quad ◀$$

Comentários. (1) Recordando que $v_0^2 < 2gl$, segue-se da última equação que $h < l$; verificamos, portanto, que B permanece abaixo de A, como considerado em nossa solução.

(2) Para $m_A \gg m_B$, as respostas obtidas se reduzem a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = 0$ e $h = v_0^2/2g$; B oscila como um pêndulo simples com A fixo. Para $m_A \ll m_B$, elas se reduzem a $(\mathbf{v}_B)_2 = (\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{v}_0$ e $h = 0$; A e B se movem com a mesma velocidade constante $\mathbf{v}_0$.

PROBLEMA RESOLVIDO 14.5

Em um jogo de bilhar, foi dada à bola A uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 3$ m/s ao longo da linha DA paralela ao eixo da mesa. Ela atinge a bola B e em seguida a bola C, ambas em repouso. Sabendo que A e C atingem os lados da mesa perpendicularmente nos pontos A' e C', respectivamente; que B atinge o lado obliquamente em B' e considerando as superfícies sem atrito e impactos perfeitamente elásticos, determine as velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$ com que as bolas atingem os lados da mesa. (*Observação*: neste e em vários dos problemas que se seguem, assume-se que as bolas de bilhar são partículas que se movem livremente em um plano horizontal em vez das esferas que rolam e deslizam, o que elas realmente são.)

SOLUÇÃO

Conservação da quantidade de movimento. Como não há força externa, a quantidade de movimento inicial $m\mathbf{v}_0$ é equipolente ao sistema das quantidades de movimento após as duas colisões (e antes que qualquer uma das bolas atinja o lado da mesa). Referindo-nos ao esboço adjacente, escrevemos

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad m(3 \text{ m/s}) = m(v_B)_x + mv_C \quad (1)$

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad 0 = mv_A - m(v_B)_y \quad (2)$

$+\circlearrowleft$ momentos em relação a O: $\quad -(0,6 \text{ m})m(3 \text{ m/s}) = (2,4 \text{ m})mv_A - (2,1 \text{ m})m(v_B)_y - (0,9 \text{ m})mv_C \quad (3)$

Resolvendo as três equações para v_A, $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ em termos de v_C,

$$v_A = (v_B)_y = 3v_C - 6 \qquad (v_B)_x = 3 - v_C \qquad (4)$$

Conservação de energia. Como as superfícies são sem atrito e os impactos perfeitamente elásticos, a energia cinética inicial $\frac{1}{2}mv_0^2$ é igual à energia cinética final do sistema:

$$\tfrac{1}{2}mv_0^2 = \tfrac{1}{2}m_A v_A^2 + \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 + \tfrac{1}{2}m_C v_C^2$$

$$v_A^2 + (v_B)_x^2 + (v_B)_y^2 + v_C^2 = (3 \text{ m/s})^2 \qquad (5)$$

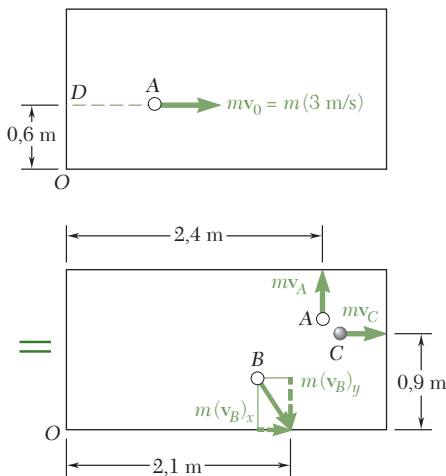
Substituindo as expressões de v_A, $(v_B)_x$ e $(v_B)_y$ de (4) em (5), temos

$$2(3v_C - 6)^2 + (3 - v_C)^2 + v_C^2 = 9$$

$$20v_C^2 - 78v_C + 72 = 0$$

Resolvendo para v_C, encontramos $v_C = 1,5$ m/s e $v_C = 2,4$ m/s. Como somente a segunda raiz fornece um valor positivo para v_A depois da substituição na Eq. (4), concluímos que $v_C = 2,4$ m/s e

$$v_A = (v_B)_y = 3(2,4) - 6 = 1,2 \text{ m/s} \qquad (v_B)_x = 3 - 2,4 = 0,6 \text{ m/s}$$

$\mathbf{v}_A = 1,2 \text{ m/s}\uparrow \qquad \mathbf{v}_B = 1,342 \text{ m/s} \measuredangle 63,4° \qquad \mathbf{v}_C = 2,4 \text{ m/s} \rightarrow$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Na seção anterior, definimos a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular de um sistema de partículas. Nesta lição, definimos a *energia cinética* T de um sistema de partículas:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \qquad (14.28)$$

As soluções dos problemas da seção anterior foram baseadas na conservação da quantidade de movimento linear de um sistema de partículas ou na observação do movimento do centro de massa dc um sistema de partículas. Nesta seção, você vai resolver problemas envolvendo o seguinte:

1. Cálculo da energia cinética perdida em colisões. A energia cinética T_1 do sistema de partículas antes das colisões e sua energia cinética T_2 depois das colisões são calculadas a partir da Eq. (14.28), e são subtraídas uma da outra. Tenha em mente que, enquanto a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular são quantidades vetoriais, a energia cinética é uma quantidade *escalar*.

2. Conservação da quantidade de movimento linear e conservação de energia. Como você viu na lição anterior, quando a resultante das forças externas que atuam em um sistema de partículas é igual a zero, a quantidade de movimento linear do sistema é conservada. Em problemas que envolvem movimento bidimensional e expressam que a quantidade de movimento linear inicial e a quantidade de movimento linear final do sistema são equipolentes, temos duas equações algébricas. Igualando a energia inicial total do sistema de partículas (incluindo a energia potencial e também a energia cinética) à sua energia total final, temos uma equação adicional. Portanto, você pode escrever três equações que podem ser resolvidas para três incógnitas [Problema Resolvido 14.5]. Observe que se a resultante das forças externas não é igual a zero, mas tem uma direção fixa, o componente da quantidade de movimento linear em uma direção perpendicular à da resultante é conservado; o número de equações que podem ser usadas é, então, reduzido para duas [Problema Resolvido 14.4].

3. Conservação da quantidade de movimento linear e angular. Quando não há forças externas atuando em um sistema de partículas, tanto a quantidade de movimento linear do sistema como sua quantidade de movimento angular em relação a algum ponto arbitrário são conservadas. No caso de movimento tridimensional, isso lhe permitirá escrever até seis equações, apesar de você poder resolver apenas algumas delas para obter as respostas desejadas [Problema Resolvido 14.3]. No caso de movimento bidimensional, você poderá escrever três equações que podem ser resolvidas para três incógnitas.

4. Conservação da quantidade de movimento linear e angular e conservação de energia. No caso do movimento bidimensional de um sistema de partículas que não estão sujeitas a quaisquer forças externas, você vai obter duas equações algébricas expressando que a quantidade de movimento linear do sistema é conservada, uma equação descrevendo que a quantidade de movimento angular do sistema em relação a algum ponto arbitrário é conservada e uma quarta equação expressando que a energia total do sistema é conservada. Essas equações podem ser resolvidas para quatro incógnitas.

PROBLEMAS

14.31 Assumindo que o empregado da companhia aérea no Problema 14.1, primeiro coloca rapidamente a mala de 15 kg no carro de transporte de bagagem, determine a energia perdida (*a*) quando a primeira mala atinge o carro, (*b*) quando a segunda mala atinge o carro.

14.32 Determine a energia perdida devido ao resultado da série de colisões descritas no Problema 14.7.

14.33 No Problema 14.3, determine o trabalho realizado pela mulher e pelo homem quando cada um mergulha do barco, considerando que a mulher mergulha primeiro.

14.34 No Problema 14.5, determine a energia perdida quando o projétil (*a*) passa por meio do bloco *A*, (*b*) fica incrustado no bloco *B*.

14.35 Dois automóveis, *A* e *B*, de massa m_A e m_B, respectivamente, se deslocavam em sentidos opostos quando colidem frontalmente. Considera-se que o choque é perfeitamente plástico, e também que a energia absorvida por cada automóvel é igual à sua perda de energia cinética em relação a um sistema de referência móvel ligado ao centro de massa do sistema de dois veículos. Representando por E_A e E_B, respectivamente, a energia absorvida pelo automóvel *A* e pelo automóvel *B*, (*a*) mostre que $E_A/E_B = m_A/m_B$, ou seja, que a quantidade de energia absorvida por cada veículo é inversamente proporcional à sua massa e (*b*) calcule e E_A e E_B, sabendo que m_A = 1.600 kg e m_B = 900 kg e que as velocidades de *A* e *B* são, respectivamente, de 90 km/h e 60 km/h.

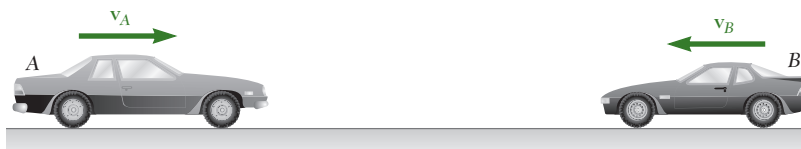



Figura *P14.35*

14.36 Considera-se que cada um dos dois automóveis envolvidos na colisão descrita no Problema 14.35 foi projetado para resistir com segurança a um teste de impacto, em que o veículo bate em uma parede rígida, fixa, a uma velocidade v_0. O grau de gravidade da colisão do Problema 14.35 pode, então, ser avaliado para cada veículo pela relação entre a energia absorvida na colisão e a energia absolvida no teste. Com base nessa informação, mostre que a colisão descrita no Problema 14.35 é $(m_A/m_B)^2$ vezes mais grave para o automóvel *B* que para o automóvel *A*.

14.37 Resolva o Problema Resolvido 14.4, considerando que o carrinho *A* tem uma velocidade horizontal inicial $\mathbf{v}_0$ enquanto a bola *B* se encontra em repouso.

14.38 Em um jogo de bilhar, a bola A se desloca com uma velocidade $\mathbf{v}_0 = v_0\mathbf{i}$ quando ela atinge as bolas B e C, que estão em repouso uma ao lado da outra. Considerando as superfícies sem atrito e um choque perfeitamente elástico (ou seja, conservação de energia), determine a velocidade final de cada bola, considerando que a trajetória de A (a) é perfeitamente centrada e que A atinge B e C simultaneamente, (b) não é perfeitamente centrada e que A atinge B um pouco antes de atingir C.

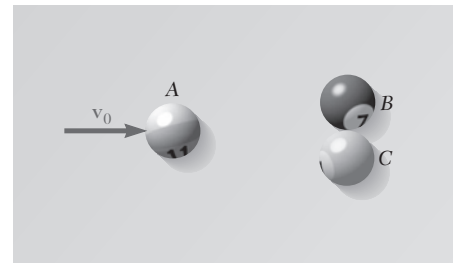



Figura P14.38

14.39 e 14.40 Em um jogo de bilhar, a bola A se desloca com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 5$ m/s quando ela atinge as bolas B e C, que se encontram em repouso e alinhadas como mostrado na figura. Sabendo que após a colisão as três bolas se movem nas direções indicadas e considerando as superfícies sem atrito e os choques perfeitamente elásticos (isto é, conservação de energia), determine as intensidades das velocidades $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$.

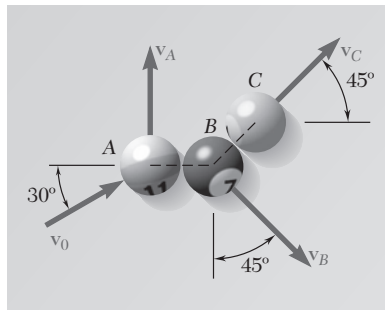
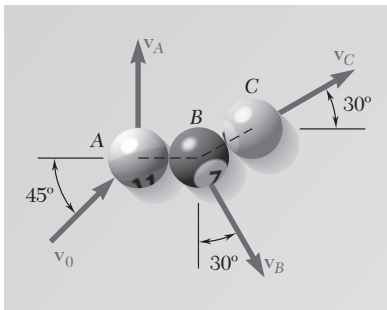



Figura P14.39, P14,40

14.41 Dois hemisférios são mantidos unidos por uma corda que mantém uma mola comprimida (a mola não está presa aos hemisférios). A energia potencial da mola comprimida é de 120 J e a montagem tem uma velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ de intensidade $v_0 = 8$ m/s. Sabendo que a corda se parte quando $\theta = 30°$, causando a separação dos hemisférios, determine a velocidade resultante de cada hemisfério.

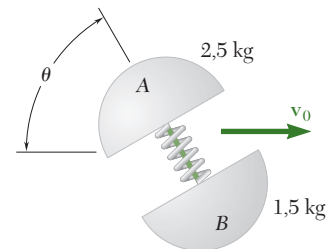



Figura P14.41

14.42 Resolva o Problema 14.41, sabendo que a corda é partida quando $\theta = 120°$.

14.43 Um bloco B de 20 kg é suspenso por uma corda de 2 m fixada em um carrinho A de 30 kg, que pode rolar livremente sem atrito no caminho horizontal. Se o sistema é liberado do repouso na posição mostrada na figura, determine as velocidades de A e B quando B passa diretamente embaixo de A.

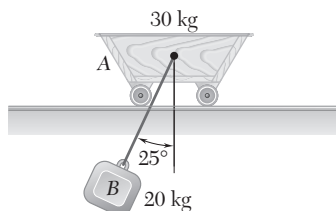



Figura *P14.43*

14.44 Três esferas, cada uma de massa m, podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. As esferas A e B estão ligadas por um fio inextensível e inelástico de comprimento l e em repouso na posição mostrada na figura quando a esfera B é atingida perpendicularmente pela esfera C, que se move para direita com uma velocidade $\mathbf{v}_0$. Sabendo que o fio não está esticado quando a esfera B é atingida pela esfera C e considerando que o choque entre B e C é perfeitamente elástico, determine (a) a velocidade de cada esfera imediatamente após o fio ficar esticado e (b) a fração da energia cinética inicial do sistema que é dissipada quando o fio é esticado.

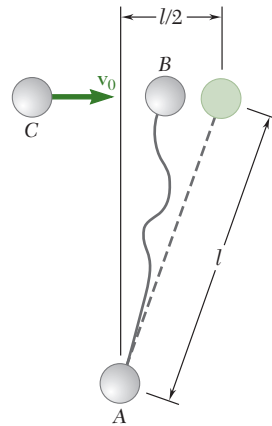



Figura *P14.44*

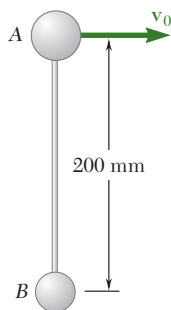
14.45 Um veículo espacial de 360 kg deslocando-se com velocidade $\mathbf{v}_0 = (450 \text{ m/s})\mathbf{k}$ passa pela origem O. Cargas explosivas dividem, então, o veículo em três partes, A, B e C, com massas de 60 kg, 120 kg e 180 kg, respectivamente. Sabendo que logo depois as posições das três partes são A (72, 72, 648), B (180, 396, 972) e C (−144, −288, 576), onde as coordenadas são expressas em metros, que a velocidade de B é $\mathbf{v}_B = (150 \text{ m/s})\mathbf{i} + (330 \text{ m/s})\mathbf{j} + (660 \text{ m/s})\mathbf{k}$ e que o componente x da velocidade de C é −120 m/s, determine a velocidade da parte A.

14.46 No experimento de dispersão de partículas feito no Problema 14.24, sabe-se que a partícula alfa é lançada a partir de A_0 (300, 0, 300) e que ela colide com o núcleo de oxigênio C em Q (240, 200, 100), onde todas as coordenadas são expressas em milímetros. Determine as coordenadas do ponto B_0 onde a trajetória original do núcleo B intercepta o plano zx. (*Dica:* expresse que a quantidade de movimento angular das três partículas em relação a Q é conservada.)

Figura *P14.47*

14.47 Duas pequenas esferas A e B, de massas 2,5 kg e 1 kg, respectivamente, estão unidas por uma barra rígida de massa desprezível. As duas esferas estão em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito quando A é subitamente impulsionada com velocidade $\mathbf{v}_0 = (3 \text{ m/s})\mathbf{i}$. Determine ($a$) a quantidade de movimento linear do sistema e sua quantidade de movimento angular em relação a seu centro de massa G, (b) as velocidades de A e B após a barra AB ter girado 180°.

14.48 Resolva o Problema 14.47, considerando que B é a esfera que é subitamente impulsionada com velocidade $\mathbf{v}_0 = (3 \text{ m/s})\mathbf{i}$.

14.49 Três esferas idênticas A, B e C, que podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito, estão ligadas por meios de cordas inelásticas e inextensíveis a um pequeno anel D localizados no centro de massa das três esferas ($l' = 2l \cos \theta$). Inicialmente, as esferas giram em torno do anel D, que está em repouso, a velocidades proporcionais às suas distâncias de D. Indicamos v_0 como a velocidade original de A e B e consideramos que $\theta = 30°$. Repentinamente a corda CD se parte, fazendo com que a esfera C deslize para longe. Considerando o movimento das esferas A e C, e do anel D após as outras duas cordas ficarem outra vez esticadas, determine (a) a velocidade do anel D, (b) a velocidade relativa com a qual a esfera A e a B rodam em torno de D, (c) a percentagem de energia do sistema original que é dissipada quando as cordas AD e BD ficam esticadas outra vez.

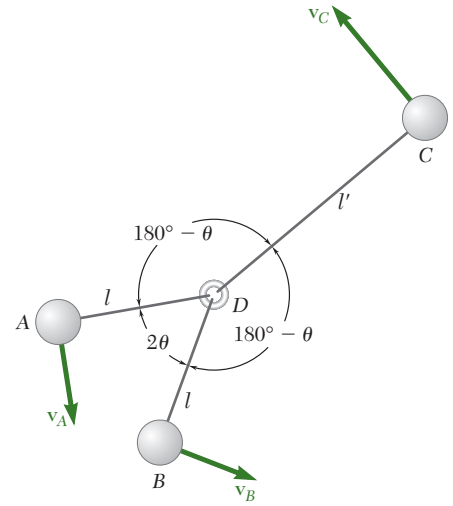



Figura P14.49

14.50 Resolver o Problema 14.49, considerando que $\theta = 45°$.

14.51 Dois pequenos discos A e B de massas de 3 kg e 1,5 kg, respectivamente, podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Os discos estão unidos por uma corda de 600 mm de comprimento e giram no sentido anti-horário em torno do seu centro de massa G a uma taxa de 10 rad/s. No instante $t = 0$, as coordenadas de G são $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 2$ m, e sua velocidade é $\bar{\mathbf{v}}_0 = (1{,}2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0{,}96 \text{ m/s})\mathbf{j}$. Pouco depois, o fio se rompe; observa-se então que o disco A se move ao longo de uma trajetória paralela ao eixo y e o disco B ao longo de uma trajetória que intercepta o eixo x a uma distância $b = 7{,}5$ m de O. Determine (a) as velocidades de A e B após o fio se romper, (b) a distância a entre o eixo y e a trajetória de A.

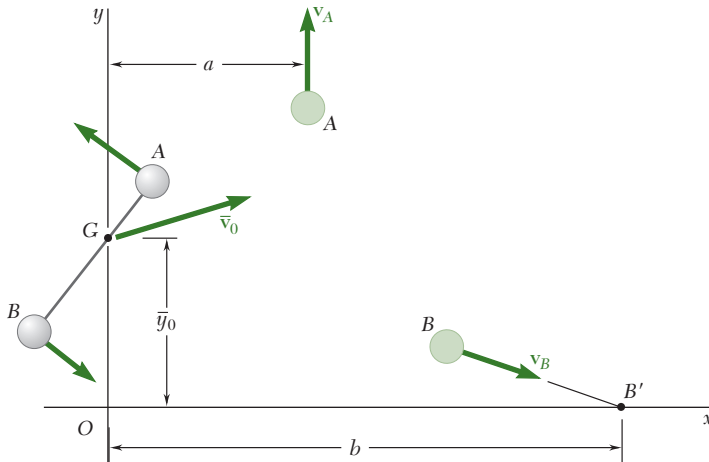



Figura P14.51 e P14.52

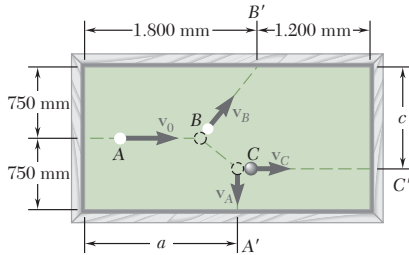
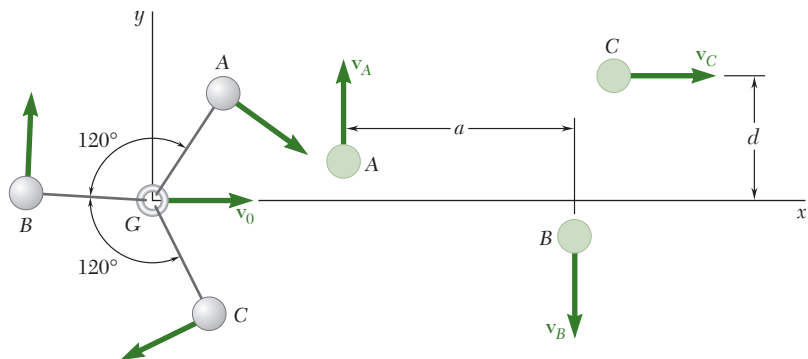
14.52 Dois pequenos discos A e B de massas de 2 kg e 1 kg, respectivamente, podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito. Os discos estão unidos por um fio de massa desprezível e giram em torno do seu centro de massa G. No instante $t = 0$, G se move com velocidade $\bar{\mathbf{v}}_0$ e suas coordenadas são $\bar{x}_0 = 0$, $\bar{y}_0 = 1{,}89$ m. Logo depois, o fio se rompe; observa-se então que o disco A se move com uma velocidade $\mathbf{v}_A = (5 \text{ m/s})\mathbf{j}$ em linha reta e a uma distância $a = 2{,}56$ m do eixo y, enquanto B se move com uma velocidade $\mathbf{v}_B = (7{,}2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (4{,}6 \text{ m/s})\mathbf{j}$ ao longo de uma trajetória que intercepta

o eixo x a uma distância b = 7,48 m da origem O. Determine (*a*) a velocidade inicial $\bar{\mathbf{v}}_0$ do centro de massa G dos dois discos (*b*) o comprimento do fio que inicialmente os unia, (*c*) a taxa em rad/s com que os discos giravam em torno de G.

Figura P14.53

14.53 Em um jogo de bilhar, a bola A tem velocidade inicial $\mathbf{v}_0$ ao longo da direção do eixo longitudinal da mesa. Ela atinge a bola B e a seguir a bola C, que estão ambas em repouso. Observa-se que as bolas A e C atingem as laterais da mesa perpendicularmente nos pontos A' e C', respectivamente, enquanto a bola B atinge a lateral da mesa obliquamente em B'. Sabendo que v_0 = 4 m/s, v_a = 2 m/s e a = 1.600 mm, determine (*a*) as velocidades $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_C$ das bolas B e C, (*b*) o ponto C onde a bola C atinge a lateral da mesa. Considere as superfícies como sendo sem atrito e os choques como perfeitamente elásticos (isto é, conservação de energia).

14.54 Para o jogo de bilhar do Problema 14.53, considere agora que v_0 = 5 m/s, v_C = 3 m/s e c = 1.200 mm. Determine (*a*) as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ das bolas A e B, (*b*) o ponto A' onde a bola A atinge a lateral da mesa.

14.55 Três pequenas esferas idênticas A, B e C, que podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito, estão ligadas por três fios de comprimento 200 mm que estão amarrados a um anel G. Inicialmente, as esferas giram no sentido horário em torno do anel com uma velocidade relativa de 0,8 m/s, e o anel se desloca ao longo do eixo x com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ = (0,4 m/s)**i**. Repentinamente, o anel se parte e as três esferas passam a se mover livremente no plano xy com A e B seguindo trajetórias paralelas ao eixo y a uma distância a = 346 mm uma da outra, e C seguindo uma trajetória paralela ao eixo x. Determine (*a*) a velocidade de cada esfera, (*b*) a distância d.

Figuras *P14.55* e *P14.56*

14.56 Três pequenas esferas idênticas A, B e C, que podem deslizar livremente sobre uma superfície horizontal sem atrito, estão ligadas por três fios de comprimento l que estão amarrados a um anel G. Inicialmente, as esferas giram em torno do anel que se desloca ao longo do eixo x com velocidade $\mathbf{v}_0$. Repentinamente, o anel se parte e as três esferas passam a se mover livremente no plano xy. Sabendo que $\mathbf{v}_A$ = (1,039 m/s)**j**, $\mathbf{v}_C$ = (1,800 m/s)**i**, a = 416 mm e d = 240 mm, determine (*a*) a velocidade inicial do anel, (*b*) o comprimento l dos fios, (*c*) a taxa em rad/s com que as esferas giram em torno de G.

*14.10 Sistemas variáveis de partículas

Todos os sistemas de partículas considerados até agora consistiam em partículas bem definidas. Esses sistemas não ganhavam nem perdiam quaisquer partículas durante seu movimento. Em um grande número de aplicações de engenharia, entretanto, é necessário levar em consideração os *sistemas variáveis de partículas,* isto é, sistemas que estão continuamente ganhando ou perdendo partículas, ou fazendo ambas as coisas ao mesmo tempo. Considere, por exemplo, uma turbina hidráulica. Sua análise envolve a determinação das forças exercidas por um escoamento de água sobre as pás em rotação, e observamos que as partículas de água em contato com as pás formam um sistema em constante mudança, que continuamente adquire ou perde partículas. Os foguetes fornecem outro exemplo de sistemas variáveis, já que sua propulsão depende da ejeção contínua de partículas de combustível.

Lembramos que todos os princípios da cinética estabelecidos até agora foram deduzidos para sistemas constantes de partículas que não ganham nem perdem partículas. Devemos, portanto, descobrir uma maneira de reduzir a análise de um sistema variável de partículas à de um sistema auxiliar constante. O procedimento a ser seguido é indicado nas Seções 14.11 e 14.12 para duas amplas categorias de aplicações: um fluxo permanente de partículas e um sistema que está ganhando ou perdendo massa.

*14.11 Fluxo permanente de partículas

Considere um fluxo permanente de partículas, tal como um fluxo de água desviado por uma pá fixa ou um jato de ar por meio de um duto ou ventilador. Para determinar a resultante das forças exercidas nas partículas em contato com a pá, duto ou ventilador, isolamos essas partículas e representamos por S o sistema assim definido (Fig. 14.9). Observamos que S é um sistema variável de partículas, já que ele ganha continuamente partículas que estão fluindo para dentro e perde um número igual de partículas que estão fluindo para fora. Portanto, os princípios da cinética que foram estabelecidos anteriormente não podem ser aplicados diretamente a S.

Figura 14.9

Entretanto, podemos facilmente definir um sistema auxiliar de partículas que permaneça constante durante um curto intervalo de tempo Δt. Considere no instante t o sistema S *mais* as partículas que vão entrar em S durante o intervalo de tempo Δt (Fig. 14.10*a*). A seguir, considere no instante $t + \Delta t$ o sistema S *mais* as partículas que deixaram S durante o intervalo Δt (Fig. 14.10*c*). Claramente, *as mesmas partículas estão envolvidas em ambos os casos,* e podemos aplicar a essas partículas o princípio de impulso e quantidade de movimento. Como a massa total m do sistema S permanece constante, as partículas que entram no sistema e aquelas que deixam o sistema no intervalo Δt devem ter a mesma massa Δm. Representando por $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, respectivamente, as velocidades das partículas que entram em S por meio de A e que deixam S por meio de B, representamos a quantidade de movimento das partículas que entram em S por $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ (Fig. 14.10*a*) e a quantidade de movimento das partículas que deixam S por $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ (Fig. 14.10*c*). Também representamos por vetores apropriados as quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}_i$ das partículas que formam S e os impulsos das forças exercidas sobre S e indicamos por sinais de adição e igualdade, de cor verde, que o sistema das quantidades de movimento e impulsos nas partes a e b da Fig. 14.10 é equipolente ao sistema das quantidades de movimento na parte c da mesma figura.

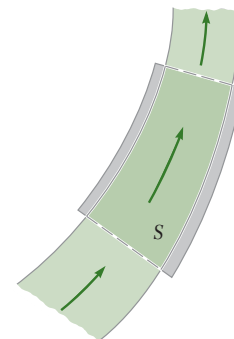
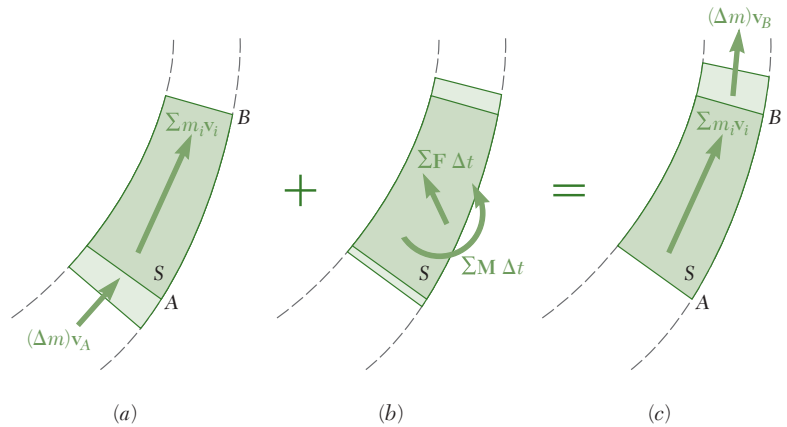



Figura 14.10

A resultante $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ das quantidades de movimento das partículas de S está presente em ambos os lados do sinal de igualdade e pode, portanto, ser omitida. Concluímos que *o sistema formado pela quantidade de movimento* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *das partículas que entram em S no intervalo* Δt *e os impulsos das forças exercidas sobre S durante esse intervalo é equipolente à quantidade de movimento* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *das partículas que deixam S no mesmo intervalo* Δt. Podemos, portanto, escrever

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F}\ \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \tag{14.38}$$

Uma equação semelhante pode ser obtida tomando os momentos dos vetores envolvidos (Problema Resolvido 14.5). Dividindo todos os termos da Eq. (14.38) por Δt e fazendo Δt tender a zero, obtemos no limite

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{14.39}$$

onde $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B$ representa a diferença entre o *vetor* $\mathbf{v}_B$ e o *vetor* $\mathbf{v}_A$.

No SI, dm/dt é expresso em kg/s e as velocidades em m/s; verificamos que ambos os membros da Eq. (14.39) são expressos nas mesmas unidades (newtons).*

O princípio que acabamos de estabelecer pode ser usado para analisar um grande número de aplicações em engenharia. Algumas das aplicações mais comuns serão consideradas a seguir.

Fluxo de fluido desviado por uma pá. Se a pá é fixa, o método de análise apresentado anteriormente pode ser aplicado diretamente para

---

* Muitas vezes é conveniente expressar a taxa de variação do fluxo de massa dm/dt como o produto ρQ, onde ρ é a massa específica da corrente (massa por unidade de volume) e Q é sua vazão em volume (volume por unidade de tempo). No SI, ρ é expresso em kg/m^3 (por exemplo, $\rho = 1.000$ kg/m^3 para a água) e Q em m^3/s.

encontrar a força **F** exercida pela pá sobre o fluxo. Observamos que **F** é a única força que precisa ser considerada, já que a pressão no fluxo é constante (pressão atmosférica). A força exercida pelo fluxo sobre a pá será igual e oposta a **F**. Se a pá se move com uma velocidade constante, o fluxo não é constante. Entretanto, ele parecerá ser constante para um observador que se move com a pá. Temos, portanto, que escolher um sistema de eixos que se desloque com a pá. Como esse sistema de eixos não está acelerado, a Eq. (14.38) ainda pode ser usada, mas $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ devem ser substituídas pelas *velocidades relativas* do fluxo em relação à pá (Problema Resolvido 14.7).

Fluido que escoa por meio de um tubo. A força exercida pelo fluido sobre a região de transição de um tubo, tal como uma curva ou uma redução, pode ser determinada considerando-se o sistema de partículas S em contato com a transição. Como a pressão no escoamento é em geral variável, as forças exercidas sobre S pelas porções adjacentes do fluido também devem ser consideradas.

Motor a jato. Em um motor a jato, o ar entra com velocidade inicial nula pela frente do motor e sai pela parte posterior com alta velocidade. A energia necessária para acelerar as partículas de ar é obtida pela queima de combustível. A massa do combustível queimado nos gases de exaustão será, em geral, suficientemente pequena quando comparada com a massa do ar que flui pelo motor, que pode ser desprezada. Portanto, a análise de um motor a jato se reduz à análise de um fluxo de ar. Esse fluxo pode ser considerado como um fluxo permanente se todas as velocidades forem medidas em relação à aeronave. Consideraremos, portanto, que o fluxo de ar entra no motor com uma velocidade **v** de intensidade igual à velocidade do avião e sai com uma velocidade **u** igual à velocidade relativa dos gases de exaustão (Fig. 14.11). Como as pressões de entrada e saída são quase atmosféricas, a única força externa que precisa ser considerada é a força exercida pelo motor sobre o fluxo de ar. Essa força é igual e inversa ao empuxo.*

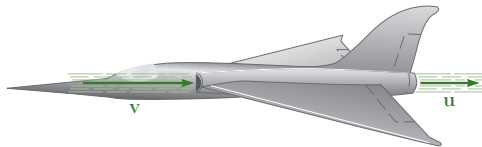



Figura 14.11

* Note que, se o avião for acelerado, ele não poderá ser usado como um sistema de referência newtoniano. Contudo, o mesmo resultado será obtido para o empuxo pelo uso de um sistema de referência em repouso em relação à atmosfera, já que se observa que as partículas de ar entrarão no motor com velocidade nula e sairão dele com uma velocidade de intensidade $u - v$.

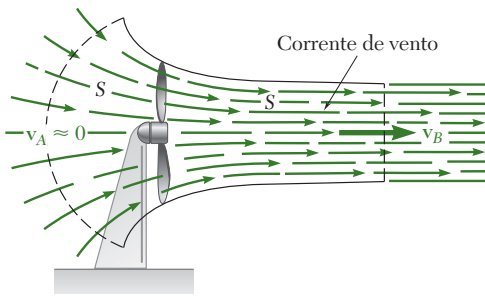



Figura 14.12

Ventilador. Consideremos o sistema de partículas S mostrado na Fig. 14.12. Admite-se que a velocidade $\mathbf{v}_A$ das partículas que entram no sistema é igual a zero e que a velocidade $\mathbf{v}_B$ das partículas que saem do sistema é a velocidade da *corrente de ar produzida.* A vazão de ar pode ser obtida multiplicando-se v_B pela área da seção transversal da corrente. Como a pressão ao redor de S é atmosférica, a única força externa que atua em S é o empuxo do ventilador.

Helicóptero. A determinação do empuxo criado pelas pás rotativas de um helicóptero que paira é similar à determinação do empuxo de um ventilador. A velocidade $\mathbf{v}_A$ das partículas de ar que se aproximam das pás é considerada nula e a vazão de ar é obtida multiplicando-se a intensidade da velocidade $\mathbf{v}_B$ da corrente de ar produzida pela sua área da seção transversal.

*14.12 Sistemas que ganham ou perdem massa

Analisemos agora um tipo diferente de sistema variável de partículas, a saber, um sistema que ganha massa pela absorção contínua de partículas ou que perde massa pela expulsão contínua de partículas. Considere o sistema S mostrado na Fig. 14.13. Sua massa, igual a m no instante t, aumenta em Δm no intervalo de tempo Δt. Para poder aplicar o princípio de impulso e quantidade de movimento à análise desse sistema, devemos considerar, no instante t, o sistema S *mais* as partículas de massa Δm que S absorve durante o intervalo de tempo Δt. A velocidade de S no instante t é representada por $\mathbf{v}$, a velocidade de S no instante $t + \Delta t$ é representada por $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ e a velocidade absoluta das partículas absorvidas é representada por $\mathbf{v}_a$. Aplicando o princípio de impulso e quantidade de movimento, escrevemos

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \qquad (14.40)$$

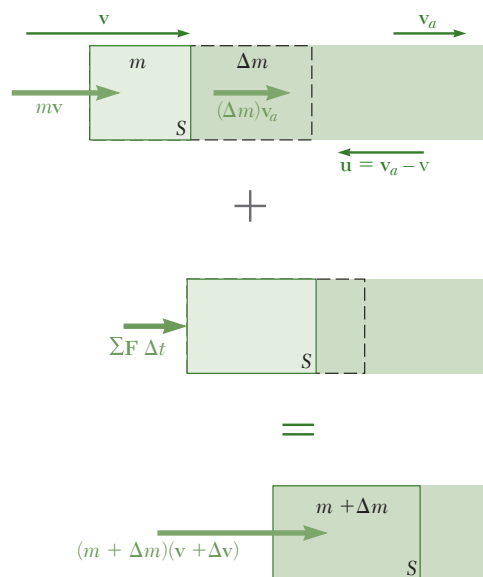



Foto 14.3 À medida que os foguetes propulsores do ônibus espacial são acionados, as partículas de gás ejetadas deles fornecem o impulso para a decolagem.

Figura 14.13

Resolvendo para a soma $\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t$ dos impulsos das forças externas que atuam em S (excluindo as forças exercidas pelas partículas que são absorvidas), temos

$$\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\Delta\mathbf{v} + \Delta m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_a) + (\Delta m)(\Delta\mathbf{v}) \tag{14.41}$$

Introduzindo a *velocidade relativa* **u** em relação a S das partículas que são absorvidas, escrevemos $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ e verificamos que, como $v_a < v$, a velocidade relativa **u** está dirigida para a esquerda, como mostrado na Fig. 14.13. Desprezando o último termo da Eq. (14.41), que é de segunda ordem, escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = m\,\Delta\mathbf{v} - (\Delta m)\mathbf{u}$$

Dividindo ambos os membros por Δt e fazendo Δt tender a zero, temos, no limite*

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.42}$$

Reordenando os termos e recordando que $d\mathbf{v}/dt = \mathbf{a}$, onde **a** é a aceleração do sistema S, escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F} + \frac{dm}{dt}\mathbf{u} = m\mathbf{a} \tag{14.43}$$

que mostra que a ação sobre S das partículas que estão sendo absorvidas é equivalente a um empuxo

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.44}$$

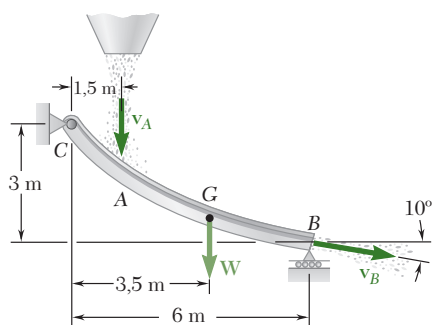
que tende a retardar o movimento de S, já que a velocidade relativa **u** das partículas está dirigida para a esquerda. dm/dt é expresso em kg/s, a velocidade relativa u em m/s e o empuxo correspondente em newtons.**

As equações obtidas também podem ser usadas para determinar o movimento de um sistema S que perde massa. Nesse caso, a taxa de variação de massa é negativa e a ação sobre S das partículas que estão sendo expelidas é equivalente a um empuxo na direção e sentido de $-\mathbf{u}$, isto é, no sentido oposto àquele no qual as partículas estão sendo expelidas. Um *foguete* representa um caso típico de sistema com perda contínua de massa (Problema Resolvido 14.8).

* Quando a velocidade absoluta $\mathbf{v}_a$ das partículas absorvidas é zero, $\mathbf{u} = -\mathbf{v}$, e a Eq. (14.42) se torna

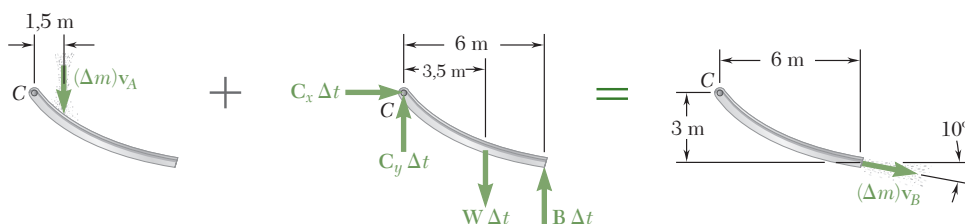
$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v})$$

Comparando a fórmula obtida com a Eq. (12.3) da Seção 12.3, observamos que a segunda lei de Newton pode ser aplicada a um sistema que ganha massa, *contanto que as partículas absorvidas se encontrem inicialmente em repouso.* Ela também pode ser aplicada a um sistema que perde massa, *contanto que a velocidade das partículas expelidas seja zero* em relação ao sistema de referência escolhido.

** Ver a nota de rodapé da página 890.

PROBLEMA RESOLVIDO 14.6

Grãos caem de um funil em uma calha CB à razão de 120 kg/s. Eles atingem a calha em A com uma velocidade de 10 m/s e saem da calha em B com uma velocidade de 7,5 m/s, formando um ângulo de 10° com a horizontal. Sabendo que o peso combinado da calha e dos grãos que ela suporta é uma força $\mathbf{W}$ com intensidade de 3.000 N aplicada em G, determine a reação no suporte de roletes B e os componentes da reação na articulação C.

SOLUÇÃO

Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento no intervalo de tempo Δt para o sistema formado pela calha, os grãos que ela suporta e a quantidade de grãos que atingem a calha no intervalo de tempo Δt. Como a calha não se move, ela não tem quantidade de movimento. Observamos também que a soma $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ das quantidades de movimentos lineares das partículas suportadas pela calha é a mesma em t e em $t + \Delta t$ e que pode, portanto, ser omitida.

Como o sistema formado pela quantidade de movimento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ e pelos impulsos é equipolente à quantidade de movimento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$, escrevemos

$$\xrightarrow{+} \text{ componentes em } x\text{:} \quad C_x\,\Delta t = (\Delta m)v_B \cos 10° \qquad (1)$$

$$+\uparrow \text{ componentes em } y\text{:} \quad -(\Delta m)v_A + C_y\,\Delta t - W\,\Delta t + B\,\Delta t = -(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \qquad (2)$$

$$+\circlearrowleft \text{ momentos em relação a } C\text{:} \quad -1{,}5(\Delta m)v_A - 3{,}5(W\,\Delta t) + 6(B\,\Delta t) = 3(\Delta m)v_B \cos 10° - 6(\Delta m)v_B \operatorname{sen} 10° \qquad (3)$$

Usando os dados fornecidos, $W = 3.000$ N, $v_A = 10$ m/s, $v_B = 7{,}5$ m/s e $\Delta m/\Delta t = 120$ kg/s, e resolvendo a Eq. (3) para B e a Eq. (1) para C_x,

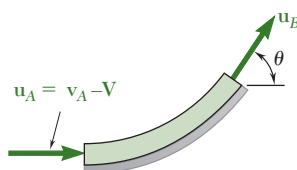
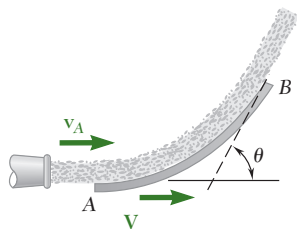
$$6B = 3{,}5(3.000) + 1{,}5(120)(10) + 3(120)(7{,}5)(\cos 10° - 2 \operatorname{sen} 10°)$$

$$B = 2.340 \text{ N} \qquad B = 2.340 \text{ N}\uparrow \quad ◀$$

$$C_x = (120)(7{,}5)\cos 10° = 886 \text{ N} \qquad C_x = 886 \text{ N} \rightarrow \quad ◀$$

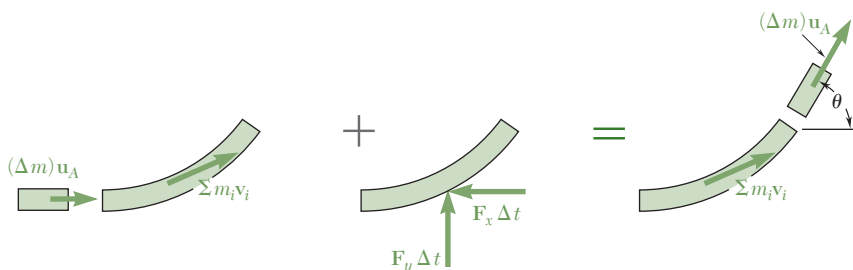
Substituindo o valor de B e resolvendo a Eq. (2) para C_y,

$$C_y = 3.000 - 2.340 + (120)(10 - 7{,}5 \operatorname{sen} 10°) = 1.704 \text{ N}$$

$$C_y = 1.704 \text{ N}\uparrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 14.7

Um bocal descarrega um jato de água com área de seção transversal A e com uma velocidade $\mathbf{v}_A$. O jato é desviado por uma *única* pá que se desloca para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{V}$. Considerando que a água escoa ao longo da pá com uma velocidade constante, determine (a) os componentes da força $\mathbf{F}$ exercida pela pá sobre o jato de água e (b) a velocidade $\mathbf{V}$ para a qual se obtém a potência máxima.

SOLUÇÃO

a. Componentes da força exercida sobre o escoamento. Escolhemos um sistema de coordenadas que se desloca com a pá a uma velocidade constante $\mathbf{V}$. As partículas de água atingem a pá com uma velocidade relativa $\mathbf{u}_A = \mathbf{v}_A - \mathbf{V}$ e deixam a pá com uma velocidade relativa $\mathbf{u}_B$. Como as partículas de água se deslocam ao longo da pá com uma velocidade constante, as velocidades relativas $\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{u}_B$ têm a mesma intensidade u. Representando a densidade da água por ρ, a massa das partículas da água que atingem a pá durante o intervalo de tempo Δt é $\Delta m = A\rho(v_A - V)\Delta t$; uma massa igual de partículas deixa a pá no mesmo intervalo de tempo Δt. Aplicamos o princípio de impulso e da quantidade de movimento ao sistema formado pelas partículas em contato com a pá e pelas partículas que atingem a pá no tempo Δt.

Recordando que $\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{u}_B$ têm a mesma intensidade u e omitindo as quantidades de movimento $\Sigma m_i \mathbf{v}_i$ que aparecem em ambos os lados, escrevemos

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad (\Delta m)u - F_x\,\Delta t = (\Delta m)u\cos\theta$

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad +F_y\,\Delta t = (\Delta m)u\,\text{sen}\,\theta$

Substituindo $\Delta m = A\rho(v_A - V)\Delta t$ e $u = v_A - V$, obtemos

$$\mathbf{F}_x = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta)\leftarrow \qquad \mathbf{F}_y = A\rho(v_A - V)^2\,\text{sen}\,\theta\uparrow \quad ◀$$

b. Velocidade da pá para potência máxima. A potência é obtida multiplicando-se a velocidade V da pá pela componente F_x da força exercida pelo escoamento sobre a pá.

$$\text{Potência} = F_x V = A\rho(v_A - V)^2(1 - \cos\theta)V$$

Diferenciando a potência em relação a V e fazendo a derivada igual a zero, obtemos

$$\frac{d(\text{potência})}{dV} = A\rho(v_A^2 - 4v_A V + 3V^2)(1 - \cos\theta) = 0$$

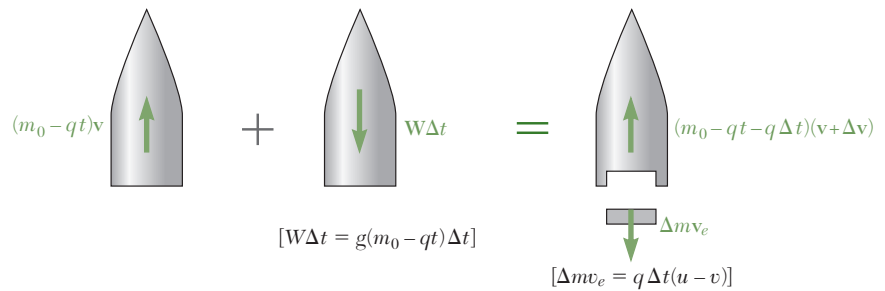
$$V = v_A \qquad V = \tfrac{1}{3}v_A \qquad \text{Para potência máxima } V = \tfrac{1}{3}v_A \rightarrow \quad ◀$$

Nota. Esses resultados são válidos somente quando uma *única* pá desvia o jato. Resultados diferentes são obtidos quando uma série de pás desvia o jato, como no caso de uma turbina Pelton (Problema 14.81).

PROBLEMA RESOLVIDO 14.8

Um foguete com massa inicial m_0 (incluindo a estrutura e o combustível) é lançado verticalmente no instante $t = 0$. O combustível é consumido a uma taxa constante $q = dm/dt$ e expelido com uma velocidade constante u relativa ao foguete. Deduza uma expressão para a intensidade da velocidade do foguete no instante t, desprezando a resistência do ar.

SOLUÇÃO

No instante t, a massa da estrutura do foguete e do combustível não queimado remanescente é $m = m_0 - qt$ e sua velocidade é $\mathbf{v}$. Durante o intervalo de tempo Δt, a massa de combustível $\Delta m = q\,\Delta t$ é expelida com uma velocidade u em relação ao foguete. Representando por $\mathbf{v}_e$ a velocidade absoluta do combustível expelido, aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento entre os instantes t e $t + \Delta t$.

Escrevemos

$$(m_0 - qt)v - g(m_0 - qt)\,\Delta t = (m_0 - qt - q\,\Delta t)(v + \Delta v) - q\,\Delta t(u - v)$$

Dividindo por Δt e tomando o limite quando Δt tende a zero, obtemos

$$-g(m_0 - qt) = (m_0 - qt)\frac{dv}{dt} - qu$$

Separando as variáveis e integrando de $t = 0$, $v = 0$ até $t = t$, $v = v$,

$$dv = \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right)dt \qquad \int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{qu}{m_0 - qt} - g\right)dt$$

$$v = [-u\ln(m_0 - qt) - gt]_0^t \qquad v = u\ln\frac{m_0}{m_0 - qt} - gt \quad ◀$$

Comentário. A massa remanescente no tempo t_f após todo o combustível ter sido expelido é igual à massa da estrutura do foguete $m_s = m_0 - qt_f$, e a velocidade máxima atingida pelo foguete é $v_m = u\ln(m_0/m_s) - gt_f$. Considerando que o combustível é expelido em um intervalo relativamente curto de tempo, o termo gt_f é pequeno, e temos $v_m \approx u\ln(m_0/m_s)$. Para poder escapar do campo gravitacional da Terra, um foguete deve alcançar uma velocidade de 11,18 km/s. Considerando $u = 2.200$ m/s e $v_m = 11{,}18$ km/s, obtemos $m_0/m_s = 161$. Portanto, para lançar cada quilograma da estrutura do foguete no espaço, é necessário consumir mais de 161 kg de combustível se for usado um propelente que produza $u = 2.200$ m/s.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção é dedicada ao estudo do movimento de *sistemas variáveis de partículas,* isto é, sistemas que estão continuamente *ganhando ou perdendo partículas,* ou fazendo ambas as coisas ao mesmo tempo. Os problemas a serem resolvidos envolvem (1) *fluxo permanente de partículas* e (2) *sistemas que ganham ou perdem massa.*

1. Para resolver problemas que envolvem um fluxo permanente de partículas, você vai considerar uma parte S do fluxo e expressar que o sistema formado pela quantidade de movimento das partículas que entram em S por meio de A no tempo Δt e os impulsos das forças exercidas em S durante esse tempo é equipolente à quantidade de movimento das partículas que deixam S por meio de B no mesmo tempo Δt (Fig. 14.10). Considerando somente as resultantes dos sistemas vetoriais envolvidos, você pode escrever a equação vetorial

$$(\Delta m)\mathbf{v}_A + \Sigma \mathbf{F}\ \Delta t = (\Delta m)\mathbf{v}_B \tag{14.38}$$

Você também pode querer considerar os momentos em relação a um dado ponto dos sistemas vetoriais envolvidos para obter uma equação adicional [Problema Resolvido 14.6], mas muitos problemas podem ser solucionados usando a Eq. (14.38) ou a equação obtida dividindo-se todos os termos por Δt e fazendo Δt tender a zero,

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{14.39}$$

onde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa uma *subtração vetorial* e onde a vazão mássica dm/dt pode ser expressa como o produto ρQ da massa específica ρ (massa por unidade de volume) e da vazão volumétrica Q (volume por unidade de tempo).

Problemas típicos envolvendo um fluxo permanente de partículas foram descritos na Seção 14.11. Você poderá ser solicitado a determinar o seguinte:

a. Empuxo causado por um fluxo desviado. A Eq. (14.39) é aplicável, mas você terá uma melhor compreensão do problema se usar uma solução baseada na Eq. (14.38).

b. Reações nos apoios de pás ou de correias transportadoras. Primeiramente desenhe um diagrama mostrando em um lado da igualdade a quantidade de movimento $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ das partículas que atingem a pá ou a correia no tempo Δt, assim como os impulsos das cargas e reações nos apoios durante esse tempo e mostrando no outro lado da igualdade a quantidade de movimento $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ das partículas que saem da pá ou correia no tempo Δt [Problema Resolvido 14.6]. Igualando os componentes em x, os componentes em y e os momentos das quantidades em ambos os lados da equação, você terá três equações escalares que podem ser resolvidas para três incógnitas.

c. Empuxo desenvolvido por um motor a jato, uma hélice ou um ventilador. Na maioria dos casos, apenas uma incógnita está envolvida e esta pode ser obtida resolvendo-se a equação escalar derivada da Eq.(14.38) ou da Eq. (14.39).

(*continua*)

2. Para resolver problemas que envolvem sistemas que ganham massa, você vai considerar o sistema S, que tem uma massa m e está se movimentando com uma velocidade $\mathbf{v}$ no instante t e as partículas de massa Δm com velocidade $\mathbf{v}_a$ que S vai absorver no intervalo de tempo Δt (Fig. 14.13). Você vai então expressar que a quantidade de movimento total de S e das partículas que serão absorvidas *mais* o impulso das forças externas exercida em S, são equipolentes à quantidade de movimento de S no instante $t + \Delta t$. Observando que a massa de S e sua velocidade naquele instante são, respectivamente, $m + \Delta m$ e $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$, você terá a equação vetorial

$$m\mathbf{v} + (\Delta m)\mathbf{v}_a + \Sigma\mathbf{F}\,\Delta t = (m + \Delta m)(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) \qquad (14.40)$$

Como foi mostrado na Seção 14.12, se você introduzir a velocidade relativa $\mathbf{u} = \mathbf{v}_a - \mathbf{v}$ das partículas que estão sendo absorvidas, obterá a seguinte expressão para a resultante das forças externas aplicadas em S:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.42)$$

Além disso, foi mostrado que a ação em S das partículas que são absorvidas é equivalente a um empuxo

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \qquad (14.44)$$

exercido na direção e sentido da velocidade relativa das partículas que são absorvidas.

Exemplos de sistemas que ganham massa são as correias transportadoras, os vagões de trens em movimento sendo carregados com pedras ou areia e correntes sendo puxadas para fora de uma pilha.

3. Para resolver problemas que envolvem sistemas que perdem massa, tais como foguetes e motores de foguetes, você pode usar as Eqs. de (14.40) a (14.44), contanto que atribua valores negativos ao aumento de massa Δm e à razão de troca de massa dm/dt. Segue-se que o empuxo definido pela Eq. (14.44) será exercido em um sentido oposto àquele da velocidade relativa das partículas em processo de ejeção.

PROBLEMAS

14.57 Um jato de água de seção transversal A e velocidade $\mathbf{v}_1$ atinge uma placa que é mantida pela força $\mathbf{P}$. Determine a intensidade de $\mathbf{P}$, sabendo que $A = 500\ \text{mm}^2$, $v_1 = 25$ m/s e $V = 0$.

Figura P14.57 e P14.58

14.58 Um jato de água de seção transversal A e velocidade $\mathbf{v}_1$ atinge uma placa que se move com velocidade $\mathbf{V}$. Determine a velocidade $\mathbf{V}$, sabendo que $A = 600\ \text{mm}^2$, $v_1 = 30$ m/s e $P = 400$ N.

14.59 Arbustos e galhos são colocados a uma taxa de 5 kg/s no ponto A de um triturador que elimina os resíduos de madeira resultantes em C com uma velocidade de 20 m/s. Determine o componente horizontal da força exercida pelo triturador sobre o engate do caminhão em D.

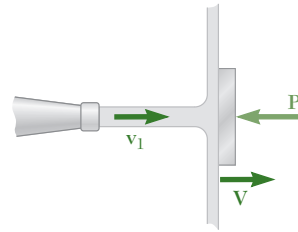
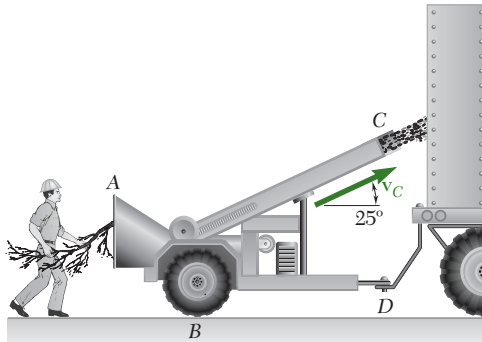



Figura P14.59

14.60 Uma ferramenta rotativa é utilizada para remover a neve de uma seção em nível de uma linha férrea. O vagão removedor de neve é posicionado à frente de uma locomotiva que o empurra com uma velocidade constante de 20 km/h. O vagão remove 18×10^4 kg de neve por minuto, projetando-a na direção mostrada na figura a uma velocidade de 12 m/s em relação ao vagão. Desprezando o atrito, determine (*a*) a força exercida pela locomotiva sobre o vagão removedor de neve, (*b*) a força lateral exercida pelo trilho sobre o vagão removedor de neve.

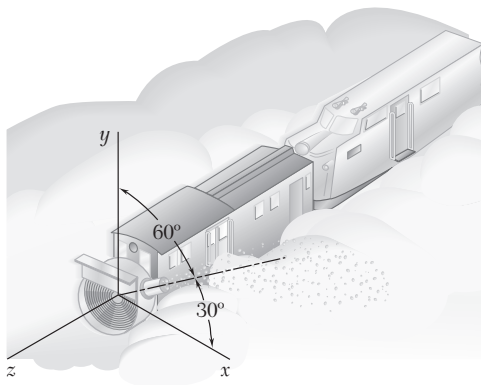



Figura P14.60

14.61 A água escoa continuamente entre duas placas A e B com uma velocidade $\mathbf{v}$ de intensidade 30 m/s. O jato é dividido em duas partes por uma placa lisa horizontal C. Sabendo que as vazões em cada uma das correntes resultantes são, respectivamente, $Q_1 = 100$ L/min e $Q_2 = 500$ L/min, determine (*a*) o ângulo θ, (*b*) a força total exercida pelo jato sobre a placa horizontal.

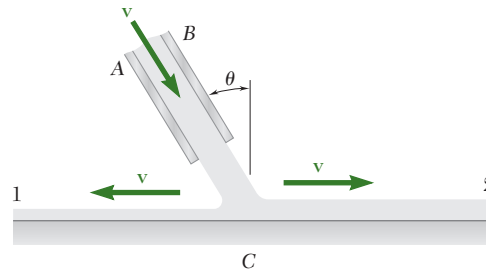



Figura P14.61 e P14.62

14.62 A água escoa continuamente entre duas placas A e B com uma velocidade $\mathbf{v}$ de intensidade 40 m/s. O jato é dividido em duas partes por uma placa lisa horizontal C. Determine as vazões Q_1 e Q_2 em cada uma das correntes resultantes, sabendo que $\theta = 30°$ e que a força total exercida pelo jato sobre a placa horizontal é igual a 500 N na direção vertical.

14.63 O bocal mostrado na figura descarrega água a uma vazão de 1,3 m^3/min. Sabendo que tanto em A quanto em B o jato de água se move com velocidade de intensidade de 20 m/s, e desprezando o peso do defletor, determine os componentes das reações em C e D.

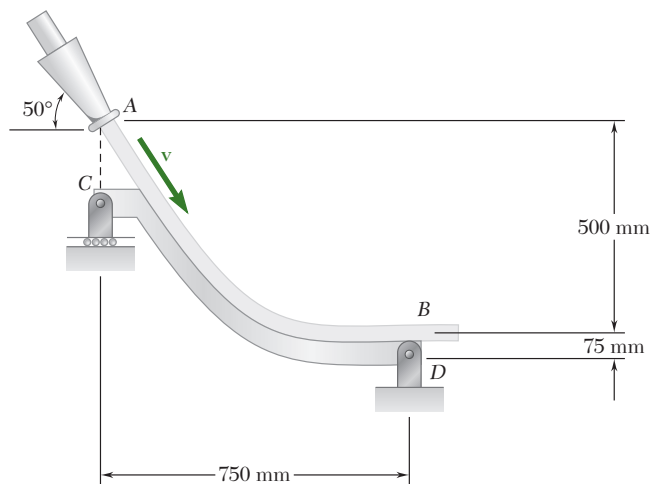



Figura P14.63

14.64 Sabendo que a pá AB do Problema Resolvido 14.7 tem uma forma de arco de círculo, mostre que a resultante da força $\mathbf{F}$ exercida pela pá no jato é aplicada no ponto médio C do arco AB (*Dica*: primeiro mostre que a linha de ação da força $\mathbf{F}$ deve passar por meio do centro O do círculo.)

14.65 O jato de água mostrado na figura escoa com uma vazão de 600 L/min e se move a uma velocidade de intensidade de 20 m/s tanto em *A* quanto em *B*. O defletor é sustentado por um pino e um suporte em *C* e por uma célula de carga em *D* que pode exercer apenas uma força horizontal. Desprezando o peso do defletor, determine os componentes das reações em *C* e *D*.

Figura *P14.65*

14.66 O bocal mostrado na figura descarrega água a uma vazão de 750 L/min. Sabendo que tanto em *B* como em *C* o jato de água se move com uma velocidade de intensidade de 30 m/s, e desprezando o peso do defletor, determine o sistema força-binário que deve ser aplicado no ponto *A* para manter o defletor em posição.

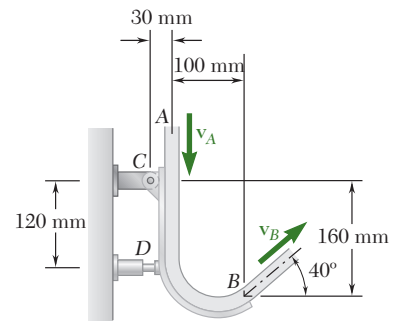
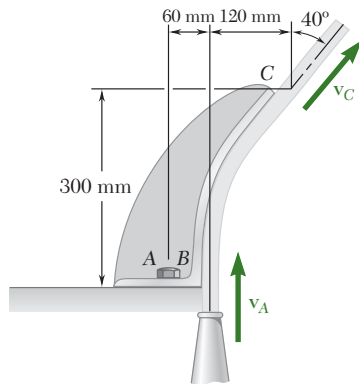



Figura *P14.66*

14.67 Um jato de ar de alta velocidade sai do bocal *A* com a velocidade $\mathbf{v}_A$ e vazão de 0,36 kg/s. O ar colide em um cata-vento causando sua rotação para a posição mostrada na figura. O cata-vento tem uma massa de 6 kg. Sabendo que a intensidade da velocidade é igual em *A* e *B*, determine (*a*) a intensidade da velocidade em *A*, (*b*) as componentes das reações em *O*.

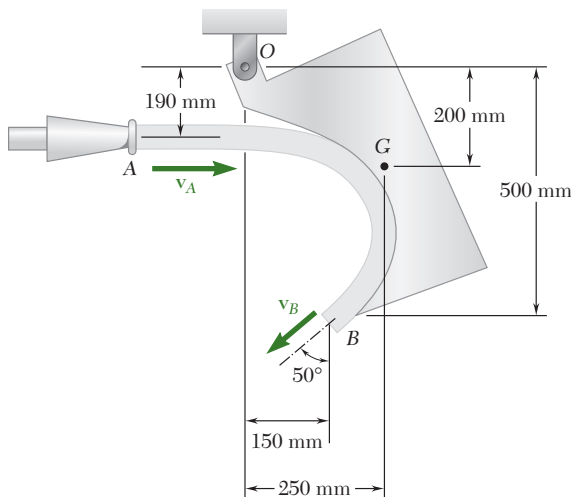



Figura P14.67

14.68 Uma correia transportadora descarrega carvão à taxa de 120 kg/s. O carvão descarregado é recebido no ponto A de uma segunda correia rolante que o descarrega novamente no ponto B. Sabendo que v_1 = 3 m/s e v_2 = 4,25 m/s e que a massa total da segunda correia, juntamente com o carvão que ela transporta, é de 472 kg, determine os componentes das reações em C e D.

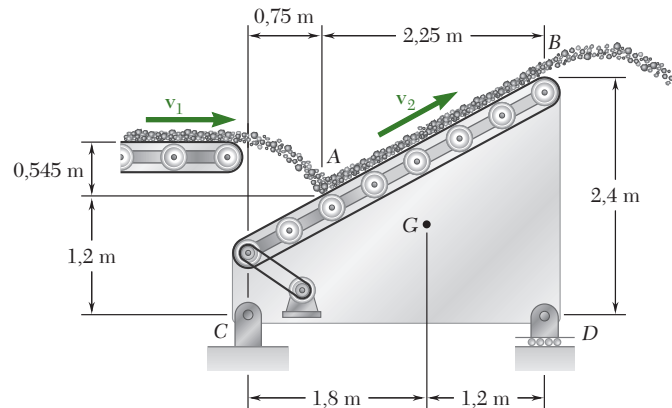



Figura P14.68

14.69 Durante um voo de cruzeiro nivelado a uma velocidade de 900 km/h, um avião a jato admite ar a uma taxa de 90 kg/s e o descarrega com uma velocidade de 660 m/s em relação ao avião. Determine o arrasto total devido ao atrito do ar com o avião.

14.70 O arrasto total, devido ao atrito com o ar, de um avião a jato que se desloca em voo de cruzeiro nivelado a uma velocidade de 900 km/h é de 40 kN. Sabendo que a velocidade de exaustão é de 660 m/s em relação ao avião, determine a taxa em N/s com que o ar deve atravessar o motor.

14.71 O motor a jato mostrado na figura admite ar em A a uma taxa de 100 kg/s e o descarrega em B a uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Determine a intensidade e a direção do empuxo de propulsão desenvolvido pelo motor quando a velocidade do avião é de (*a*) 500 km/h, (*b*) 1.000 km/h.

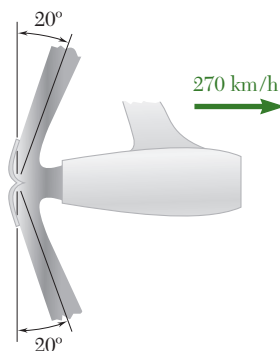



Figura P14.71

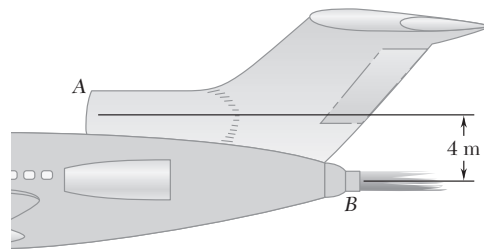



Figura P14.72

14.72 Visando a diminuir a distância necessária para a aterrissagem, um avião a jato está equipado com defletores móveis que permitem fazer a reversão parcial da direção do ar descarregado por cada um dos motores. Cada motor admite ar a uma razão de 120 kg/s e o descarrega com uma velocidade de 600 m/s em relação ao motor. No momento em que a velocidade do avião é de 270 km/h, determine qual o empuxo de reversão fornecido por cada um dos motores.

14.73 Um ventilador de base desenvolvido para soprar ar a uma velocidade máxima de 6 m/s em um fluxo de diâmetro 400 mm é suportado por uma base circular de diâmetro de 200 m. Sabendo que o peso total do equipamento é 60 N e que o centro de gravidade é localizado diretamente acima do centro da placa de base, determinar a máxima altura h que o ventilador pode ser operado sem que ele tombe. Considere $\rho = 1{,}21$ kg/m^3 para o ar e despreze a velocidade de aproximação do ar.

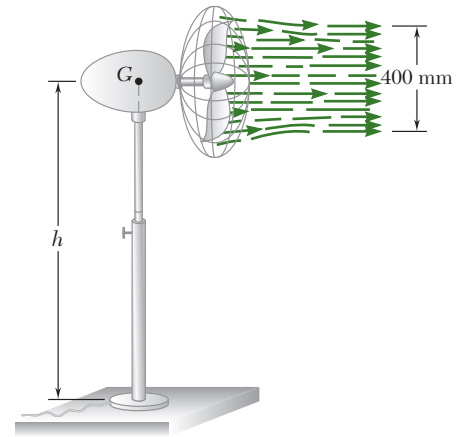



Figura P14.73

14.74 O helicóptero mostrado na figura consegue produzir uma velocidade de ar descendente máxima de 25 m/s em uma corrente de ar de 10 m de diâmetro. Sabendo que o peso do helicóptero e da tripulação é de 18 kN e considerando $\rho = 1{,}21$ kg/m^3 para o ar, determine a carga máxima que o helicóptero pode erguer quando paira.

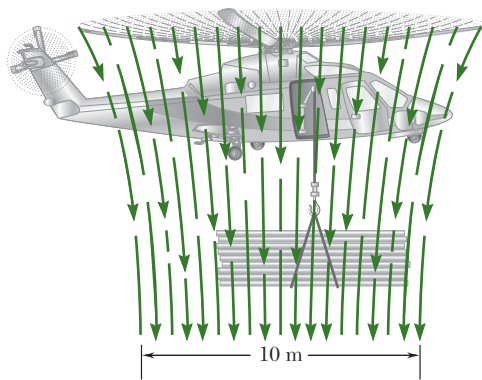



Figura P14.74

14.75 Um avião a jato comercial voa a uma velocidade de 1.000 km/h com cada um de seus motores descarregando ar a uma velocidade de 600 m/s em relação ao avião. Determine a velocidade do avião após ele perder o uso de (*a*) um de seus motores e (*b*) dois de seus motores. Considere que o arrasto devido à resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade e que os motores remanescentes continuam operando à mesma taxa.

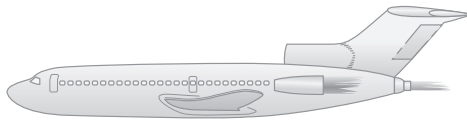



Figura P14.75

14.76 Um avião a jato de 16 Mg mantém uma velocidade constante de 774 km/h enquanto sobe com um ângulo de rampa de $\alpha = 18°$. A aeronave admite ar a uma razão de 300 kg/s e o descarrega com uma velocidade de 665 m/s em relação à aeronave. Se o piloto muda para um voo horizontal enquanto mantém o mesmo ajuste de motor, determine (*a*) a aceleração inicial do avião, (*b*) a velocidade horizontal máxima obtida. Considere que o arrasto devido ao atrito com o ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

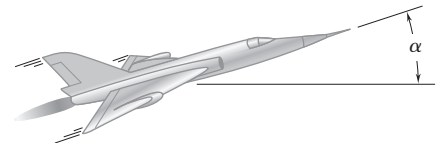



Figura P14.76

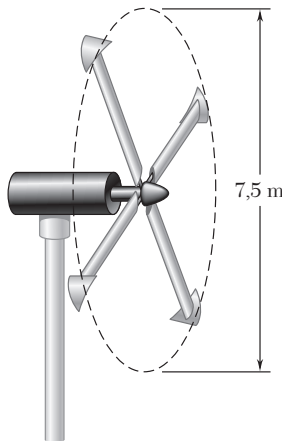
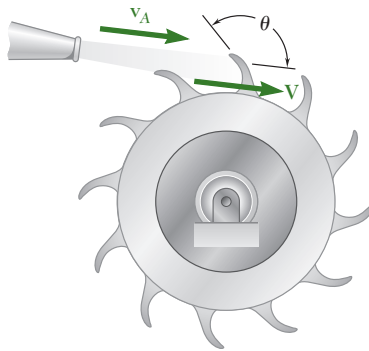



Figura P14.77 e P14.78

14.77 A turbina eólica mostrada na figura tem uma potência de saída estimada em 5 kW para uma velocidade do vento de 30 km/h. Para a dada velocidade do vento, determine (*a*) a energia cinética das partículas de ar que entram no círculo de 7,5 m de diâmetro por segundo, (*b*) a eficiência deste sistema de conversão de energia. Considere $\rho = 1{,}21 \text{ kg/m}^3$ para o ar.

14.78 Para uma certa velocidade do vento, a turbina eólica mostrada na figura produz 28 kW de eletricidade e tem uma eficiência de 0,35 no sistema de conversão de energia. Considerando $\rho = 1{,}21 \text{ kg/m}^3$ para o ar, determine (*a*) a energia cinética das partículas de ar que entram no círculo de 7,5 m de diâmetro por segundo, (*b*) a velocidade do vento.

14.79 Ao voar nivelado com uma velocidade de cruzeiro de 900 km/h, um avião a jato admite entrada de ar no motor a uma razão de 120 kg/s e descarrega os gases de exaustão a uma velocidade de 650 m/s relativa ao avião. Determine (*a*) a potência realmente usada para propelir o avião, (*b*) a potência total desenvolvida pelo motor, (*c*) a eficiência mecânica do avião.

14.80 A hélice de um pequeno avião tem uma corrente de ar produzida de 2 m de diâmetro, gerando um empuxo de 4.000 N quando o avião está parado no solo. Considerando $y = 1{,}21 \text{ kg/m}^3$ para o ar, determine (*a*) a velocidade do ar na corrente produzida, (*b*) o volume de ar que passa pela hélice por segundo, (*c*) a energia cinética transmitida por segundo para o ar na corrente produzida.

Figura P14.81

14.81 Em uma roda de turbina Pelton, o jato de água é defletido por uma série de pás de modo que a taxa com a qual a água é defletida pelas pás é igual à taxa com a qual a água sai do bocal ($\Delta m/\Delta t = A\rho v_A$). Usando a mesma notação do Problema Resolvido 14.7, (*a*) determine a velocidade **V** das pás para que a potência máxima seja desenvolvida, (*b*) deduza a expressão para a máxima potência, (*c*) deduza uma expressão para a eficiência mecânica.

14.82 Um orifício circular reentrante (também denominado bocal de Borda) de diâmetro D é posicionado a uma profundidade h abaixo da superfície de um tanque. Sabendo que a velocidade do escoamento no orifício é $v = \sqrt{2gh}$ e considerando que a velocidade de aproximação v_1 é zero, mostre que o diâmetro do jato é $d = D/\sqrt{2}$. (*Dica:* considere a seção de água indicada e observe que P é igual à pressão a uma profundidade h multiplicada pela área do orifício.)

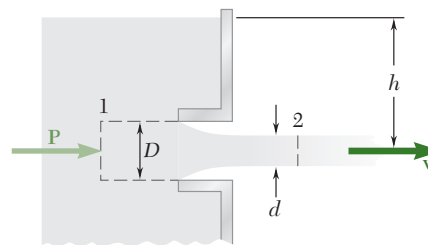



Figura *P14.82*

Figura *P14.83*

14.83 A profundidade da água que escoa do um canal de seção transversal retangular de largura b a uma velocidade v_1 e a uma profundidade d_1 aumenta para uma profundidade d_2 em um *ressalto hidráulico.* Expresse a vazão Q em termos de b, d_1 e d_2.

***14.84** Determine a vazão Q no canal do Problema 14.83 sabendo que $b = 3{,}6$ m, $d_1 = 1{,}2$ m e $d_2 = 1{,}5$ m.

14.85 O cascalho cai com velocidade zero em um transportador de correia com a taxa $q = dm/dt$ constante. (*a*) Determine a intensidade da força **P** necessária para manter a velocidade da correia v constante. (*b*) Mostre que a energia cinética adquirida pelo cascalho em um dado intervalo de tempo é igual à metade do trabalho realizado no intervalo pela força **P**. Explique o que acontece com a outra metade do trabalho feito pela força **P**.

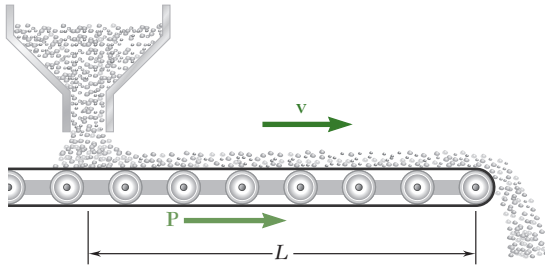



Figura P14.85

14.86 Uma corrente de comprimento l e massa m cai por meio de um pequeno buraco existente em uma placa. Inicialmente, quando y é muito pequeno, a corrente está em repouso. Em cada um dos casos apresentados, determine (*a*) a aceleração do primeiro elo A em função de y, (*b*) a velocidade da corrente quando o último elo dessa corrente passa por meio do furo. No caso *1*, considere que os elos individuais permanecem em repouso até caírem por meio do buraco; no caso *2*, considere que em qualquer instante todos os elos têm a mesma velocidade. Despreze o atrito.

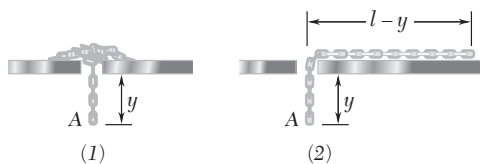



Figura P14.86

14.87 Uma corrente de comprimento l e massa m está apoiada sobre o solo. Se sua extremidade A é erguida verticalmente a uma velocidade constante v, expresse, em termos do comprimento y da porção de corrente que está fora do chão em qualquer instante dado, (*a*) a intensidade da força **P** aplicada em A, (*b*) a reação do solo.

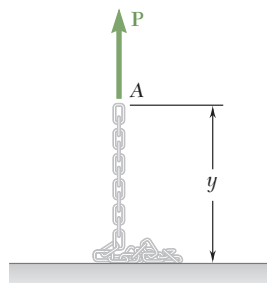
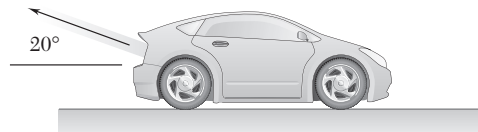



Figura P14.87

14.88 Resolva o Problema 14.87 considerando que a corrente é abaixada até o solo com uma velocidade constante v.

14.89 Um carro de brinquedo é propelido por água que esguicha de um tanque interno a uma velocidade constante de 2 m/s em relação ao carro. O peso do carro vazio é de 200 g e este contém 1 kg de água. Desprezando outras forças tangenciais, determine sua velocidade máxima.

Figuras P14.89 e P14.90

14.90 Um carro de brinquedo é propelido por água que esguicha de um tanque interno. O peso do carro vazio é de 200 g e este contém 1 kg de água. Sabendo que a velocidade máxima do carro é 2,5 m/s, determine a velocidade relativa da água que está sendo ejetada.

14.91 O principal sistema de propulsão de um ônibus espacial é composto de três motores de foguete idênticos, sendo que cada um deles queima a mistura propelente à base de hidrogênio e oxigênio a uma taxa de 340 kg/s e ejeta a uma velocidade relativa de 3.750 m/s. Determine o empuxo total fornecido pelos três motores.

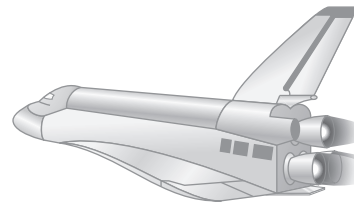



Figura *P14.91* e *P14.92*

14.92 O principal sistema de propulsão de um ônibus espacial é composto de três motores de foguete idênticos que fornecem um empuxo total de 6 MN. Determine a taxa em que a mistura propelente à base de hidrogênio e oxigênio é queimada por cada um dos três motores, sabendo que a mistura é ejetada com uma velocidade relativa de 3.750 m/s.

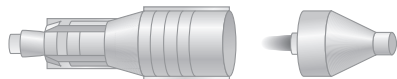



Figura P14.93

14.93 Uma espaçonave que descreve uma órbita circular em torno da Terra a uma velocidade de 24×10^3 km/h libera sua cápsula frontal de 600 kg de massa bruta que inclui 400 kg de combustível. Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 18 kg/s e ejetado com uma velocidade relativa de 3.000 m/s, determine (a) a aceleração tangencial da cápsula quando seu motor é acionado, (b) a velocidade máxima atingida pela cápsula.

14.94 Um foguete tem 1.200 kg de massa, incluindo 1.000 kg de combustível, que é consumido à taxa de 12,5 kg/s e ejetado com uma velocidade relativa de 4.000 m/s. Sabendo que o foguete é lançado na vertical a partir do solo, determine sua aceleração (a) assim que ele é lançado, (b) quando a última partícula de combustível estiver sendo consumida.

14.95 Um satélite de comunicação de 50 kN, incluindo o combustível, foi ejetado do ônibus espacial descrevendo uma órbita circular de baixa altitude em torno da terra. Depois que o satélite foi lentamente impelido a uma distância segura do ônibus espacial, seus motores foram acionados para aumentar sua velocidade para 2.500 m/s como o primeiro passo para sua transferência para uma órbita geossincronizada. Sabendo que seu combustível é ejetado com a velocidade relativa de 4.000 m/s, determine o peso do combustível consumido em sua manobra.

Figura P14.95

14.96 Determine o aumento da velocidade do satélite de comunicação do Problema 14.95 após 12,5 kN de combustível tenha sido consumido.

14.97 Uma espaçonave de 540 kg é montada no topo de um foguete de massa 19 Mg, incluindo 17,8 Mg de combustível. Sabendo que o combustível é consumido a uma taxa de 225 kg/s e que a exaustão se dá com uma velocidade relativa de 3.600 m/s, determine a velocidade máxima alcançada pela espaçonave quando o foguete é lançado verticalmente a partir do solo.

Figura P14.97 **Figura P14.98**

14.98 O foguete utilizado para lançar a espaçonave de 540 kg do Problema 14.97 é reprojetado para incluir dois estágios, A e B, cada um com massa 9,5 Mg, incluindo 8,9 Mg de combustível. O combustível é novamente consumido a uma taxa de 225 kg/s e ejetado com uma velocidade relativa de 3.600 m/s. Sabendo que quando o estágio A expele sua última partícula de combustível, sua carcaça é liberada e alijada, determine (*a*) a velocidade do foguete nesse instante, (*b*) a velocidade máxima alcançada pela espaçonave.

14.99 Determine a altitude alcançada pela espaçonave do Problema 14.97 quando todo o combustível de seu foguete de lançamento tiver sido consumido.

14.100 Para a espaçonave e o foguete de lançamento de dois estágios do Problema 14.98, determine a altitude em que (*a*) o estágio A do foguete é liberado, (*b*) o combustível de ambos os estágios terá sido consumido.

14.101 Determine a distância percorrida pelo satélite de comunicação do Problema 14.95 do ônibus espacial 60 s após seu motor ter sido acionado, sabendo que o combustível é consumido a uma taxa de 20 kg/s.

14.102 Para o foguete do Problema 14.94 determine (*a*) a altitude em que todo combustível terá sido consumido, (*b*) a velocidade do foguete nesse instante.

14.103 Em um avião a jato, a energia cinética transmitida aos gases de exaustão é perdida no que concerne à propulsão do avião. A potência útil é igual ao produto da força disponível para impulsionar o avião pela velocidade do avião. Se v é a velocidade do avião e u é a velocidade relativa dos gases expelidos, mostre que a eficiência mecânica do avião é $\eta = 2v/(u + v)$. Explique por que $\eta = 1$ quando $u = v$.

14.104 Em um foguete, a energia cinética transmitida ao combustível consumido e ejetado é perdida no que concerne à propulsão do foguete. A potência útil é igual ao produto da força disponível para impulsionar o foguete pela velocidade desse foguete. Se v é a velocidade do foguete e u a velocidade relativa do combustível expelido, mostre que a eficiência mecânica do foguete é $\eta = 2uv/(u^2 + v^2)$. Explique por que $\eta = 1$ quando $u = v$.

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo analisamos o movimento de *sistemas de partículas*, isto é, o movimento de um grande número de partículas consideradas em conjunto. Na primeira parte do capítulo, consideramos sistemas que consistem de partículas bem definidas, enquanto na segunda parte analisamos sistemas que estão continuamente ganhando ou perdendo partículas, ou fazendo ambas as coisas ao mesmo tempo.

Forças efetivas

Definimos primeiro a *força efetiva* de uma partícula P_i de um dado sistema como o produto $m_i\mathbf{a}_i$, sendo sua massa m_i e sua aceleração $\mathbf{a}_i$ em relação a um sistema de referência newtoniano centrado em O (Seção 14.2). Mostramos, então, que *o sistema de forças externas e o sistema de forças efetivas que atuam nas partículas são equipolentes*; isto é, ambos os sistemas têm a *mesma resultante* e o *mesmo momento resultante* em relação a O.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{a}_i \qquad (14.4)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{a}_i) \qquad (14.5)$$

Quantidade de movimento linear e angular de um sistema de partículas

Definimos a *quantidade de movimento linear* $\mathbf{L}$ e a *quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_O$, *em relação ao ponto* O do sistema de partículas [Seção 14.3] como

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{v}_i \qquad \mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times m_i\mathbf{v}_i) \qquad (14.6, 14.7)$$

Mostramos que as Eqs. (14.4) e (14.5) podem ser substituídas pelas equações

$$\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad \Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (14.10, 14.11)$$

que expressam que *a resultante e o momento resultante em relação a O das forças externas são, respectivamente, iguais às taxas de variação da quantidade de movimento linear e da quantidade de movimento angular em relação a O do sistema de partículas.*

Movimento do centro de massa de um sistema de partículas

Na Seção 14.4, definimos o centro de massa de um sistema de partículas como o ponto G cujo vetor de posição $\bar{\mathbf{r}}$ satisfaz à equação

$$m\bar{\mathbf{r}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\mathbf{r}_i \qquad (14.12)$$

onde m representa a massa total $\sum_{i=1}^{n} m_i$ das partículas. Diferenciando ambos os membros da Eq. (14.12) duas vezes em relação a t, obtivemos as relações

$$\mathbf{L} = m\overline{\mathbf{v}} \qquad \dot{\mathbf{L}} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{14.14, 14.15}$$

onde $\overline{\mathbf{v}}$ e $\overline{\mathbf{a}}$ representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração do centro de massa G. Substituindo o valor de $\dot{\mathbf{L}}$ de (14.15) em (14.10), obtivemos a equação

$$\Sigma\mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{14.16}$$

da qual concluímos que *o centro de massa de um sistema de partículas se move como se toda a massa do sistema e todas as forças externas estivessem concentradas nesse ponto* [Problema Resolvido 14.1].

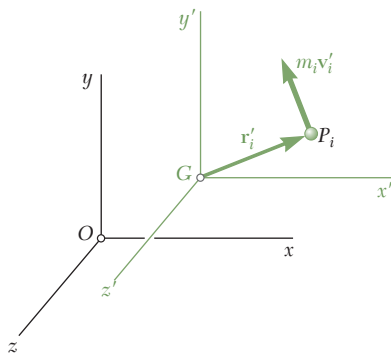
Quantidade de movimento angular de um sistema de partículas em relação ao seu centro de massa

Na Seção 14.5, consideramos o movimento das partículas de um sistema em relação a um sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$ com origem no centro de massa G do sistema e em translação em relação ao sistema newtoniano $Oxyz$ (Fig. 14.14). Definimos a *quantidade de movimento angular* do sistema *em relação a seu centro de massa G* como a soma dos momentos em relação a G das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}'_i$ das partículas em seu movimento em relação ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$. Observamos também que o mesmo resultado pode ser obtido se considerarmos os momentos em relação a G das quantidades de movimento $m_i\mathbf{v}_i$ das partículas em seu movimento absoluto. Escrevemos, portanto,

Figura 14.14

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times m_i\mathbf{v}'_i) \tag{14.24}$$

e deduzimos a relação

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{14.23}$$

que expressa que *o momento resultante em relação a G das forças externas é igual à taxa de variação da quantidade de movimento angular em relação a G do sistema de partículas.* Como será visto adiante, essa relação é fundamental para o estudo do movimento de corpos rígidos.

Conservação da quantidade de movimento

Quando nenhuma força externa age sobre o sistema de partículas [Seção 14.6], segue-se das Eqs. (14.10) e (14.11) que a quantidade de movimento linear $\mathbf{L}$ e a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do sistema se conservam [Problemas Resolvidos 14.2 e 14.3]. Em problemas envolvendo forças centrais, a quantidade de movimento angular do sistema em relação ao centro de força O também se conserva.

Energia cinética de um sistema de partículas

A energia cinética T de um sistema de partículas foi definida como a soma das energias cinéticas das partículas [Seção 14.7]:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 \tag{14.28}$$

Usando o sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$ da Fig. 14.14, verificamos que a energia cinética do sistema também pode

ser obtida somando-se a energia cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ associada ao movimento do centro de massa G e a energia cinética do sistema em seu movimento relativo ao sistema de referência $Gx'y'z'$.

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 \qquad (14.29)$$

Princípio de trabalho e energia

O *princípio de trabalho e energia* pode ser aplicado a um sistema de partículas, bem como a cada partícula individualmente [Seção 14.8]. Escrevemos

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (14.30)$$

e verificamos que $U_{1\rightarrow 2}$ representa o trabalho de *todas* as forças que atuam sobre as partículas do sistema, tanto internas quanto externas.

Conservação de energia

Se todas as forças que atuam sobre as partículas do sistema são *conservativas,* podemos determinar a energia potencial V do sistema e escrever

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (14.31)$$

que expressa o *princípio de conservação de energia* para um sistema de partículas.

Princípio do impulso e quantidade de movimento

Vimos, na Seção 14.9, que o *princípio de impulso e quantidade de movimento* para um sistema de partículas pode ser expresso graficamente, como mostrado na Fig. 14.15. De acordo com esse princípio, as quantidades de movimento das partículas no instante t_1 e os impulsos das forças externas de t_1 a t_2 formam um sistema de vetores equipolentes ao sistema das quantidades de movimento das partículas no instante t_2.

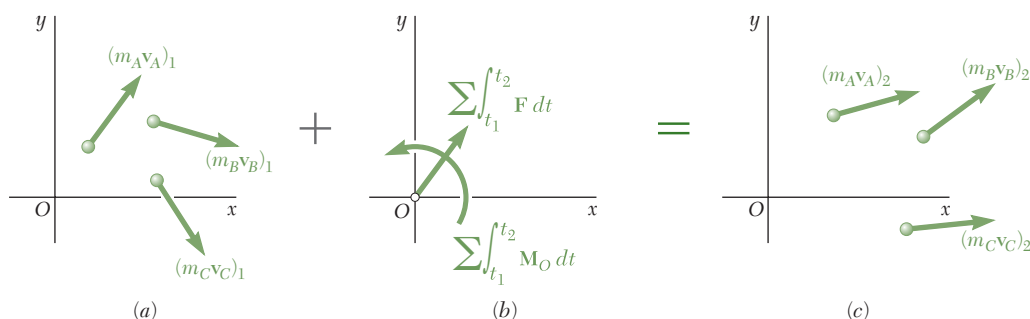



Figura 14.15

Se nenhuma força externa age sobre as partículas do sistema, os sistemas de quantidades de movimento mostrados nas partes *a* e *c* da Fig. 14.15 são equipolentes, e temos:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 \qquad (\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (14.36, 14.37)$$

Uso de princípios de conservação na solução de problemas que envolvem sistemas de partículas

Muitos problemas que envolvem o movimento de sistemas de partículas podem ser resolvidos aplicando-se simultaneamente o princípio de impulso e quantidade de movimento e o princípio de conservação de energia [Problema Resolvido 14.4], ou expressando-se que a quantidade de movimento linear, a quantidade de movimento angular e a energia do sistema se conservam [Problema Resolvido 14.5].

Sistemas variáveis de partículas Fluxo permanente de partículas

Na segunda parte do capítulo, consideramos *sistemas variáveis de partículas.* Primeiro, consideramos um *fluxo permanente de partículas,* tal como um jato de água desviado por uma pá fixa ou o escoamento de ar em um motor a jato [Seção 14.11]. Aplicando o princípio de impulso e quantidade de movimento a um sistema S de partículas durante um intervalo Δt e incluindo as partículas que entram no sistema em A durante esse intervalo de tempo e as que deixam o sistema em B (de mesma massa Δm), concluímos que *o sistema formado pela quantidade de movimento* $(\Delta m)\mathbf{v}_A$ *das partículas que entram em S no intervalo de tempo* Δt *e os impulsos das forças exercidas sobre S durante esse intervalo de tempo é equipolente à quantidade de movimento* $(\Delta m)\mathbf{v}_B$ *das partículas que deixam S no mesmo intervalo de tempo* Δt (Fig. 14.16). Igualando os

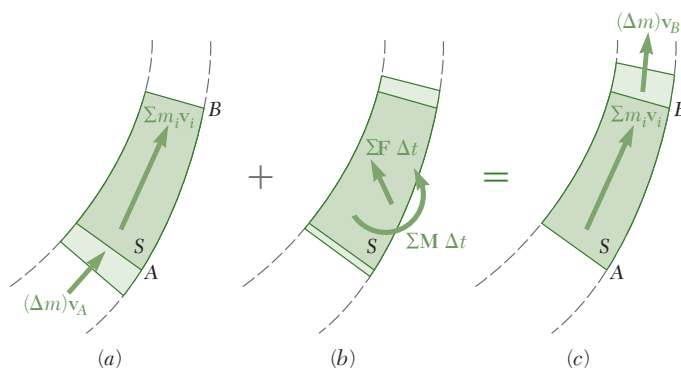



Figura 14.16

componentes em x, os componentes em y e os momentos em relação a um ponto fixo dos vetores envolvidos, poderíamos obter até três equações, resolvidas para as incógnitas desejadas [Problemas Resolvidos 14.6 e 14.7]. A partir desse resultado, pudemos também deduzir a seguinte expressão para a resultante $\Sigma\mathbf{F}$ das forças exercidas em S

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \tag{14.39}$$

onde $\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ representa a diferença entre os *vetores* $\mathbf{v}_B$ e $\mathbf{v}_A$ e onde dm/dt é a vazão mássica do escoamento (ver nota de rodapé da página 890).

Sistemas que ganham ou perdem massa

Considerando a seguir um sistema de partículas que ganha massa pela absorção contínua de partículas ou que perde massa pela expulsão contínua de partículas [Seção 14.12], como no caso de um foguete, aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento ao sistema durante o intervalo de tempo Δt, tomando o cuidado de incluir as partículas ganhas ou perdidas durante esse intervalo de tempo [Problema Resolvido 14.8]. Observamos também que a ação sobre um sistema S das partículas *absorvidas* por S era equivalente a um empuxo

$$\mathbf{P} = \frac{dm}{dt}\mathbf{u} \tag{14.44}$$

onde dm/dt é a taxa na qual a massa está sendo absorvida e $\mathbf{u}$ é a velocidade das partículas *relativamente a S.* No caso de partículas sendo *expelidas* por S, a taxa dm/dt é negativa e o empuxo $\mathbf{P}$ é exercido em um sentido oposto àquele em que as partículas estão sendo expelidas.

PROBLEMAS DE REVISÃO

14.105 Um projétil de 30 g é disparado com uma velocidade horizontal de 480 m/s no bloco *A*, de massa 5 kg. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco *A* e o carrinho *BC* é 0,50. Sabendo que o carro tem uma massa de 4 kg e pode rolar livremente, determine (*a*) a velocidade final do carrinho e do bloco, (*b*) a posição final do bloco no carrinho.

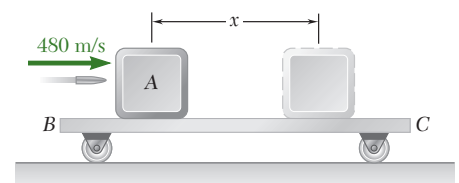



Figura P14.105

14.106 Uma locomotiva *A* de massa 80 Mg, movendo-se a uma velocidade de 6,5 km/h, atinge um vagão prancha *C* de 20 Mg que transporta uma carga *B* de 30 Mg, possível de deslizar sobre o piso do vagão ($\mu_k = 0{,}25$). Sabendo que o vagão estava em repouso com os freios liberados e que se engata automaticamente à locomotiva após o impacto, determine a velocidade do vagão (*a*) imediatamente após o impacto e (*b*) após a carga ter deslizado para uma nova posição de repouso em relação ao vagão.

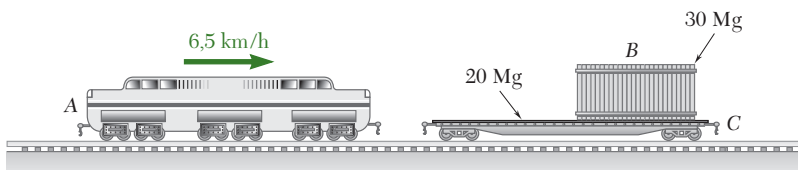



Figura P14.106

14.107 Três vagões de carga idênticos têm as velocidades indicadas na figura. Considerando que o vagão *B* é primeiramente atingido pelo vagão *A*, determine a velocidade de cada vagão após todas as colisões terem acontecido se (*a*) todos os três vagões forem automaticamente engatados, (*b*) os vagões *A* e *B* forem automaticamente engatados enquanto os vagões *B* e *C* ricochetearem um ao outro com o coeficiente de restituição de 0,8.

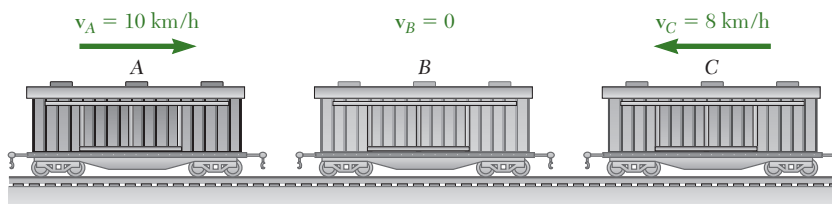



Figura *P14.107*

14.108 Um helicóptero *A* de 4.500 kg estava viajando para o leste em voo nivelado a uma velocidade de 120 km/h e uma altitude de 750 m quando foi atingido por um helicóptero *B* de 6.000 kg. Como resultado da colisão, ambos os helicópteros perderam suas sustentações e seus destroços caíram emaranhados no solo após 12 s em um ponto localizado a 450 m a leste e 115,2 m ao sul do ponto de impacto. Desprezando a resistência do ar, determine as componentes da velocidade do helicóptero *B* exatamente antes da colisão.

14.109 Um bloco B de 7,5 kg está em repouso e uma mola de constante k = 15.000 N/m é mantida comprimida em 75 mm por um cordão. Em seguida, o bloco A de 2,5 kg é colocado defronte à extremidade da mola e cordão é cortado causando o movimento de A e B. Desprezando o atrito, determine as velocidades de A e B imediatamente após A deixar B.

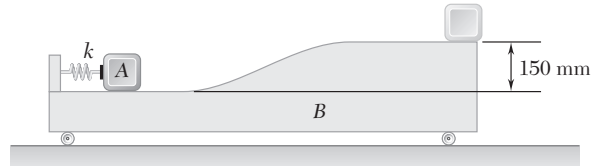



Figura P14.109

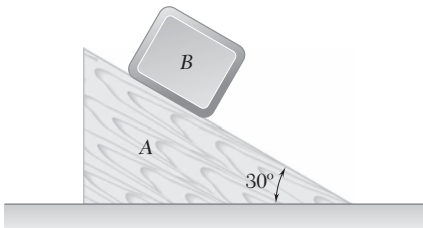



Figura *P14.110*

14.110 Um bloco de 9 kg parte do repouso e desce deslizando sobre a superfície inclinada de uma cunha A de 15 kg que está apoiada sobre uma superfície horizontal. Desprezando o atrito, determine (*a*) a velocidade do bloco B em relação à cunha A após ele ter deslizado 0,6 m sobre a superfície da cunha, (*b*) a velocidade correspondente da cunha.

14.111 Uma massa q de areia é descarregada por unidade de tempo por um transportador de correia movendo-se com velocidade $\mathbf{v}_0$. A areia é desviada por uma placa em A de tal forma que cai em um fluxo vertical. Após cair, uma distância h, a areia é outra vez desviada por uma placa curva em B. Desprezando o atrito entre a areia e as placas, determine a força necessária para manter na posição indicada (*a*) a placa A, (*b*) a placa B.

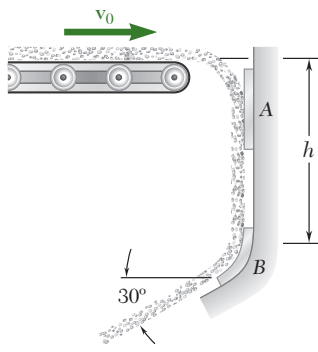



Figura P14.111

14.112 A extremidade final de uma correia transportadora recebe areia em A a uma taxa de 100 kg/s e a descarrega em B. A areia se desloca horizontalmente em A e B com uma velocidade de intensidade $v_A = v_B$ = 4,5 m/s. Sabendo que o peso combinado da correia e da areia que ela suporta é W = 4 kN, determine as reações em C e D.

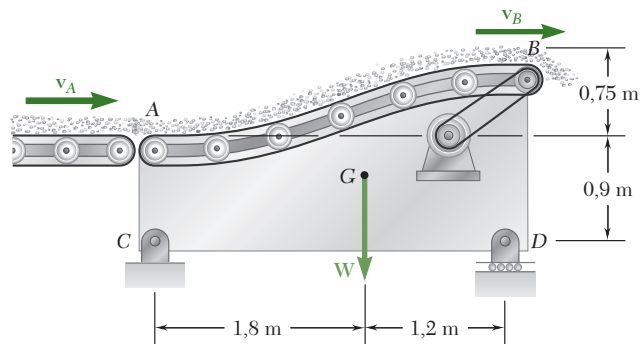



Figura *P14.112*

14.113 Um irrigador de jardim tem quatro braços rotativos e cada um deles consiste em duas seções horizontais retas de tubos formando um ângulo de 120° entre si. Cada braço descarrega água a uma vazão de 20 L/min com uma velocidade de 18 m/s relativa ao braço. Sabendo que o atrito entre as partes móveis e estacionárias do irrigador é equivalente a um binário de intensidade $M = 0{,}375$ N · m, determine a taxa constante que o irrigador gira.

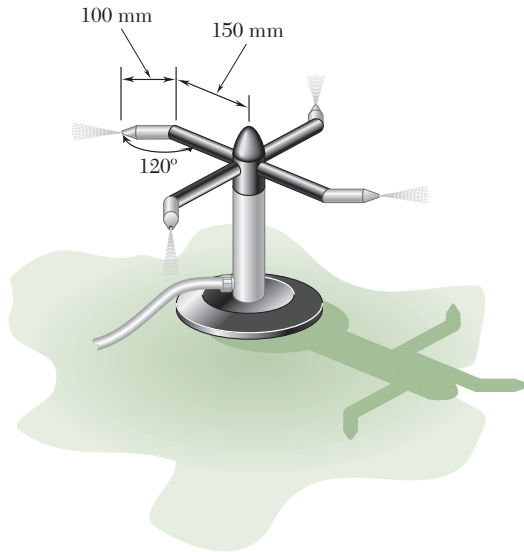



Figura P14.113

14.114 As extremidades de uma corrente estão apoiadas em A e C. Quando recebe uma velocidade inicial v, a corrente continua se movimentando livremente com essa velocidade sobre a polia em B. Desprezando o atrito, determine o valor de h.

Figura P14.114

14.115 Um vagão de trem de comprimento L e massa m_0, quando vazio, se movimenta livremente em um trilho horizontal enquanto está sendo carregado com areia a partir de uma calha estacionária a uma vazão $dm/dt = q$. Sabendo que o vagão estava se aproximando da calha com uma velocidade v_0, determine (*a*) a massa do vagão e sua carga após esse vagão ter passado pela calha e (*b*) a velocidade do vagão nesse instante.

Figura P14.115

14.116 Um possível método para reduzir a velocidade de um avião de treinamento ao aterrissar em um porta-aviões consiste em enganchar na cauda do avião uma pesada corrente de comprimento l que se encontra presa embaixo do convés. Adotando m a massa do avião e v_0 sua velocidade de toque no convés, e considerando que não há nenhuma outra força retardadora, determine (*a*) a massa necessária para a corrente se a velocidade do avião é reduzida de βv_0, onde $\beta < 1$, (*b*) o máximo valor da força exercida pela corrente no avião.

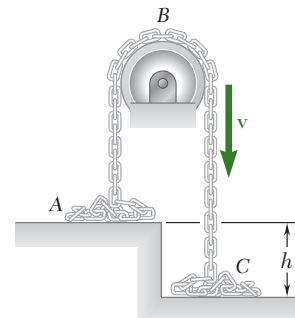
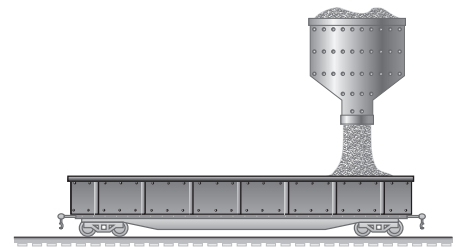
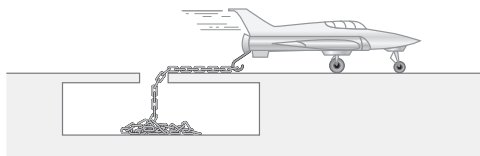



Figura P14.116

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

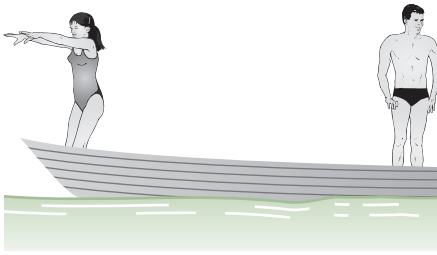



Figura P14.C1

14.C1 Um homem e uma mulher de pesos W_h e W_m, estão em extremidades opostas de um barco parado de peso W_b, prontos para mergulhar, com velocidades relativas ao barco v_h e v_m, respectivamente. Usando um programa de computador determine a velocidade do barco após ambos os nadadores terem mergulhado se (*a*) a mulher mergulha primeiro, (*b*) o homem mergulha primeiro. Use esse programa primeiro para resolver o Problema 14.4 como originalmente apresentado e, então, resolva o problema considerando que as velocidades da mulher e do homem em relação ao barco são, respectivamente, (a) 4 m/s e 6 m/s, (b) 6 m/s e 4 m/s.

14.C2 Um sistema de partículas consiste de n partículas A_i de massa m_i e coordenadas x_i, y_i e z_i, que têm velocidades $(v_x)_i$, $(v_y)_i$ e $(v_z)_i$. Deduza as expressões para os componentes da quantidade de movimento angular do sistema em relação à origem O das coordenadas. Use um programa de computador para resolver os Problemas 14.9 e 14.13.

14.C3 Uma ogiva que voa a uma velocidade de componentes conhecidos v_x, v_y e v_z explode em três fragmentos de pesos W_1, W_2 e W_3 no ponto A_0 a uma distância d da parede vertical. Usando um programa de computador, determine a velocidade de cada fragmento imediatamente após a explosão, conhecendo as coordenadas x_i e y_i dos pontos A_i ($i = 1, 2, 3$) onde os fragmentos atingem a parede. Use um programa de computador para resolver (*a*) o Problema 14.25 e (*b*) o Problema 14.26.

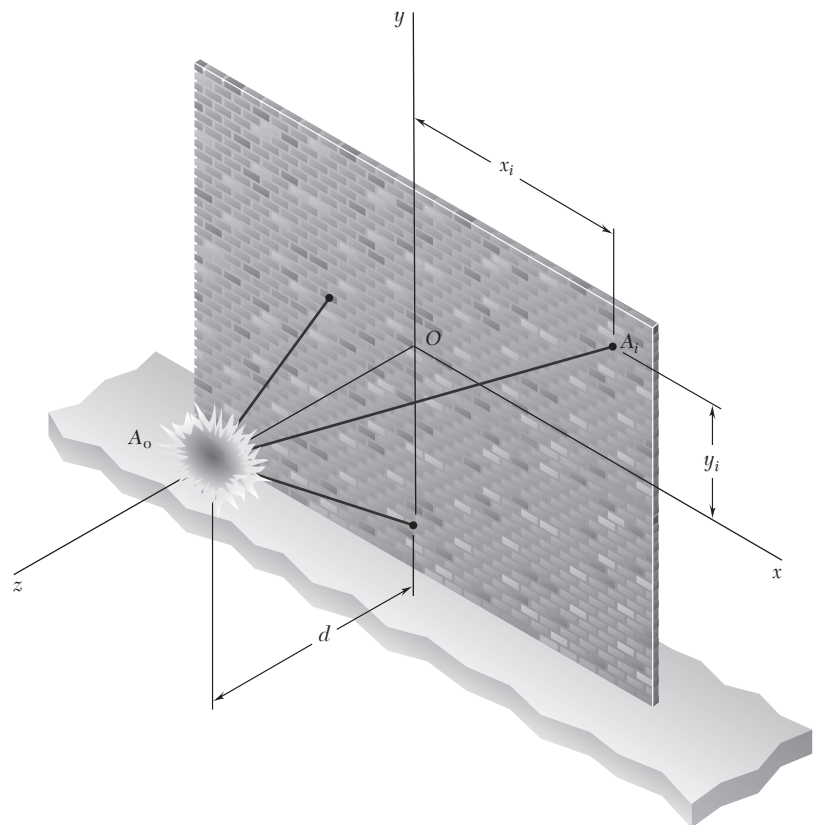



Figura P14.C3

14.C4 Quando um avião de treinamento de 6.000 kg pousa em um porta--aviões a uma velocidade de 180 km/h, sua cauda engancha na extremidade de uma corrente de 80 m de comprimento que se encontra presa embaixo do convés. Sabendo que a corrente tem uma massa por unidade de comprimento de 50 kg/m e não há nenhuma outra força retardadora, use um programa de computador para determinar a distância percorrida pelo avião enquanto a corrente é puxada e os valores correspondentes de tempo e da velocidade e desaceleração do avião.

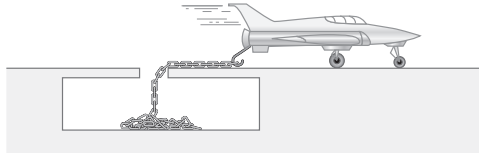



Figura P14.C4

14.C5 Um avião a jato de 16 Mg mantém uma velocidade constante de 774 km/h enquanto sobe com um ângulo $\alpha = 18°$. O avião admite entrada de ar em seu motor a uma razão de 300 kg/s e o descarrega a uma velocidade de 665 m/s em relação ao avião. Sabendo que o piloto muda o ângulo de subida α enquanto mantém o mesmo ajuste de motor, use um programa de computador para calcular e traçar um gráfico para valores α de 0 a 20° (*a*) da aceleração inicial do avião, (*b*) da velocidade máxima que será atingida. Considere que o arrasto devido ao atrito com o ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

14.C6 Um foguete tem massa de 1.200 kg, incluindo 1.000 kg de combustível, que é consumido à taxa de 12,5 kg/s e ejetado com a velocidade relativa de 3.600 m/s. Sabendo que o foguete é lançado na vertical a partir do solo, considerando um valor constante para a aceleração da gravidade e tomando intervalos de tempo de 4 s, use um programa de computador para calcular e traçar em um gráfico, do intervalo de tempo da ignição até quando a última partícula de combustível é consumida, (*a*) a aceleração a do foguete em m/s^2, (*b*) sua velocidade v em m/s, (*c*) sua elevação h acima do solo em km. (*Dica:* use para v a expressão deduzida no Problema Resolvido 14.8 e integre essa expressão analiticamente para obter h.)

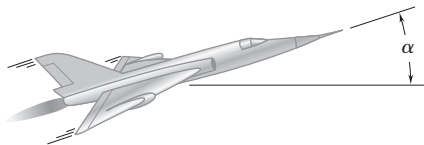



Figura P14.C5

Este enorme virabrequim pertence ao motor a diesel de dois tempos turbinado Wartsila-Sulzer RTA96-C. Neste capítulo, você aprenderá a fazer a análise *cinemática* de corpos rígidos que sofrem *translação, rotação de eixo fixo* e *movimento plano geral*.

CAPÍTULO 15

Cinemática de corpos rígidos

15 Cinemática de corpos rígidos

15.1 Introdução

Neste capítulo, analisaremos a cinemática de *corpos rígidos.* Você investigará as relações existentes entre o tempo, as posições, as velocidades e as acelerações das várias partículas que constituem um corpo rígido. Como veremos, os diversos tipos de movimento de corpos rígidos podem ser convenientemente agrupados da seguinte maneira:

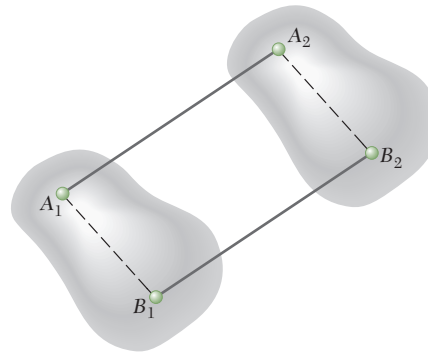



Figura 15.1

1. *Translação.* Um movimento é denominado uma translação se qualquer linha reta dentro do corpo mantiver a mesma direção durante o movimento. Pode-se observar também que em uma translação todas as partículas que constituem o corpo movem-se ao longo de trajetórias paralelas. Se essas trajetórias são linhas retas, o movimento é denominado *translação retilínea* (Fig. 15.1); se as trajetórias são linhas curvas, o movimento é uma *translação curvilínea* (Fig. 15.2).
2. *Rotação em torno de um eixo fixo.* Nesse movimento, as partículas que constituem o corpo rígido movem-se em planos paralelos ao longo de círculos centrados em um mesmo eixo fixo (Fig. 15.3). Se esse eixo, denominado *eixo de rotação,* intercepta o corpo rígido, as partículas localizadas sobre o eixo têm velocidade e aceleração nulas.

   A rotação não deve ser confundida com certos tipos de translação curvilínea. Por exemplo, a placa mostrada na Fig. 15.4*a* está em translação curvilínea, com todas as suas partículas movendo-se ao longo de círculos *paralelos,* ao passo que a placa mostrada na Fig. 15.4*b* está em rotação, com todas as suas partículas movendo-se ao longo de círculos *concêntricos.*

   No primeiro caso, qualquer linha reta desenhada sobre a placa manterá a mesma direção, enquanto, no segundo caso, o ponto O permanecerá fixo.

   Uma vez que cada partícula move-se em um dado plano, a rotação de um corpo em torno de um eixo fixo é denominada um *movimento plano.*
3. *Movimento plano geral.* Existem muitos outros tipos de movimento plano, isto é, movimentos em que todas as partículas do corpo movem-se em planos paralelos. Todo movimento plano que não seja nem uma rotação nem uma translação é referido como um movimento plano geral. Dois exemplos de movimento plano geral estão ilustrados na Fig. 15.5.

Figura 15.2

(*a*) Translação curvilínea

(*b*) Rotação

Figura 15.4

Figura 15.3

(*a*) Roda rolante

(*b*) Barra deslizante

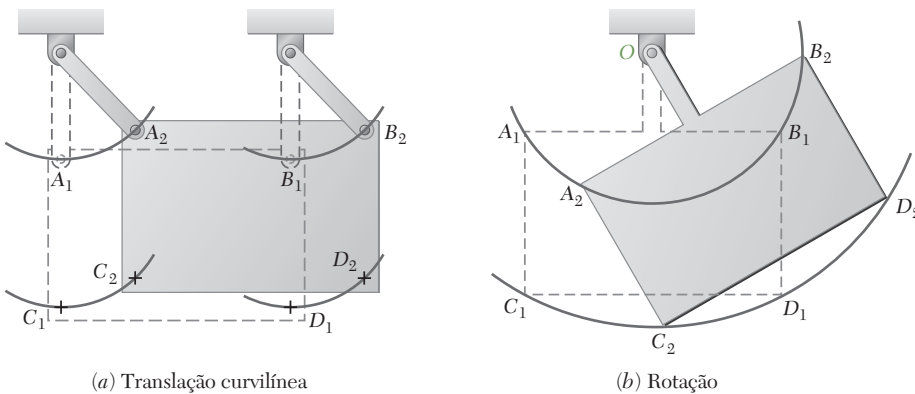
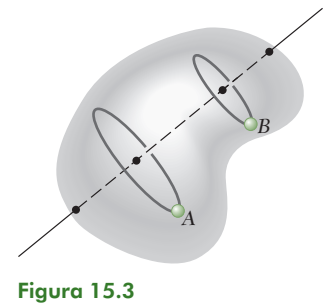
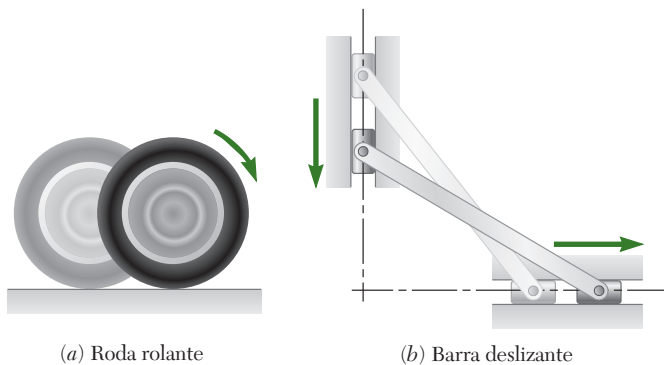
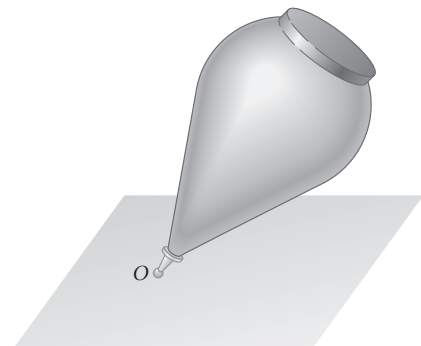



Figura 15.5

4. *Movimento em torno de um ponto fixo.* O movimento tridimensional de um corpo rígido ligado a um ponto fixo O, como, por exemplo, o movimento de um pião sobre um piso áspero (Fig. 15.6), é conhecido como movimento em torno de um ponto fixo.
5. *Movimento geral.* Qualquer movimento que não se enquadre em alguma das categorias anteriores é referido como movimento geral.

Figura 15.6

Após uma breve discussão do movimento de translação na Seção 15.2, a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo é considerada na Seção 15.3. A *velocidade angular* e a *aceleração angular* de um corpo rígido em torno de um eixo fixo serão definidas e você aprenderá a expressar a velocidade e a aceleração de um dado ponto do corpo em termos de seu vetor de posição e da velocidade angular e aceleração angular desse corpo.

As seções seguintes são dedicadas ao estudo do movimento plano geral de um corpo rígido e sua aplicação à análise de mecanismos, tais como engrenagens, barras de conexão e articulações conectadas por pinos. Decompondo o movimento plano de uma placa em uma translação e uma rotação (Seções 15.5 e 15.6), expressaremos então a velocidade de um ponto B da placa como a soma da velocidade de um ponto de referência A e da velocidade de B em relação a um sistema de referência em translação com A (isto é, movendo-se com A, mas sem rotação). A mesma abordagem será usada mais tarde, na Seção 15.8, para expressar a aceleração de B em termos da aceleração de A e da aceleração de B em relação ao sistema de referência em translação com A.

Um método alternativo para análise de velocidades no movimento plano, baseado no conceito de *centro de rotação instantâneo,* é dado na Seção 15.7; e ainda outro método de análise, baseado no uso de expressões paramétricas para as coordenadas de um dado ponto, é apresentado na Seção 15.9.

O movimento de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo e o conceito de *aceleração de Coriolis* são discutidos nas Seções 15.10 e 15.11, e os resultados obtidos são aplicados à análise do movimento plano de mecanismos contendo partes que deslizam umas sobre as outras.

A parte restante do capítulo é dedicada à análise do movimento tridimensional de um corpo rígido, a saber, o movimento de um corpo rígido com um ponto fixo e o movimento geral de um corpo rígido. Nas Seções 15.12 e 15.13, um sistema de referência fixo ou um sistema de referência em translação será usado para desenvolver essa análise; nas Seções 15.14 e 15.15, o movimento do corpo em relação a um sistema de referência rotativo ou a um sistema de referência em movimento geral será considerado, e o conceito de aceleração de Coriolis será usado novamente.

15.2 Translação

Foto 15.1 Esta réplica de um aríete em *Château des Baux, França* sofre translação curvilínea.

Considere um corpo rígido em translação (retilínea ou curvilínea), sendo A e B qualquer uma de suas partículas (Fig. 15.7*a*). Representando, respectivamente, por $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$ os vetores de posição de A e B em relação a um sistema de referência fixo e por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor que liga A e B, escrevemos

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.1}$$

Vamos, então, diferenciar essa expressão em relação a t. Notamos que a partir da primeira definição de uma translação, o vetor $\mathbf{r}_{B/A}$ deve manter uma direção constante; sua intensidade também deve ser constante, pois

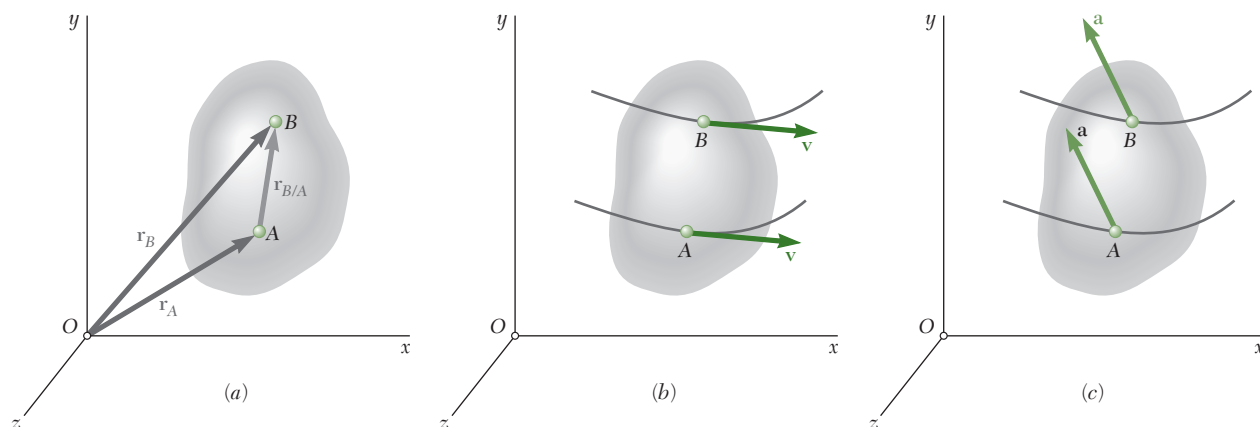



Figura 15.7

A e B pertencem ao mesmo corpo rígido. Logo, a derivada de $\mathbf{r}_{B/A}$ é nula e temos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \tag{15.2}$$

Diferenciando uma vez mais, obtemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A \tag{15.3}$$

Logo, *quando um corpo rígido está em translação, todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade e a mesma aceleração em qualquer instante dado* (Fig. 15.7*b* e *c*). No caso de translação curvilínea, a velocidade e a aceleração variam tanto em direção como em intensidade a todo instante. No caso de translação retilínea, todas as partículas do corpo movem-se ao longo de linhas retas paralelas e suas velocidade e aceleração mantêm a mesma direção durante todo o movimento.

15.3 Rotação em torno de um eixo fixo

Considere um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo AA'. Seja P um ponto do corpo e $\mathbf{r}$ seu vetor de posição em relação a um sistema de referência fixo. Por conveniência, vamos assumir que o sistema de referência esteja centrado no ponto O sobre AA' e que o eixo z coincida com AA' (Fig. 15.8). Seja B a projeção de P sobre AA'. Como P precisa permanecer a uma distância constante de B, ele descreverá um círculo de centro B e de raio r sen ϕ, onde ϕ representa o ângulo formado entre $\mathbf{r}$ e AA'.

Figura 15.8

A posição de P e de todo o corpo fica totalmente definida pelo ângulo θ que a linha BP forma com o plano zx. O ângulo θ é denominado *coordenada angular* do corpo e é definido como positivo quando visto no sentido anti-horário a partir de A'. A coordenada angular será expressa em radianos (rad) ou, ocasionalmente, em graus (°) ou revoluções (rev). Recordemos que

$$1 \text{ rev} = 2\pi \text{ rad} = 360°$$

Relembremos da Seção 11.9, que a velocidade $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ de uma partícula P é um vetor tangente à trajetória de P e de intensidade $v = ds/dt$. Observando que o comprimento Δs do arco descrito por P quando o corpo gira de um ângulo $\Delta\theta$ é

$$\Delta s = (BP)\,\Delta\theta = (r \text{ sen}\,\phi)\,\Delta\theta$$

e dividindo ambos os membros por Δt, obtemos no limite, com Δt tendendo a zero,

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta}\,\text{sen}\,\phi \tag{15.4}$$

onde $\dot{\theta}$ representa a derivada temporal de θ. (Observe que o ângulo θ depende da posição de P dentro do corpo, mas que a taxa de variação $\dot{\theta}$ é independente de P.) Concluímos que a velocidade $\mathbf{v}$ de P é um vetor perpendicular ao plano contendo AA' e $\mathbf{r}$, e de intensidade v definida por (15.4).

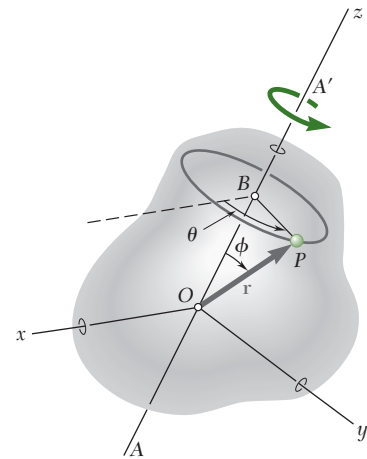
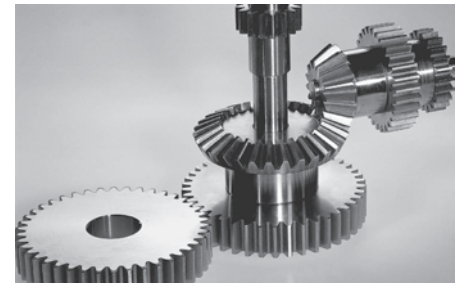



Foto 15.2 Para a engrenagem central que gira em torno de um eixo fixo, a velocidade e a aceleração angulares daquela engrenagem são vetores orientados ao longo do eixo vertical de rotação.

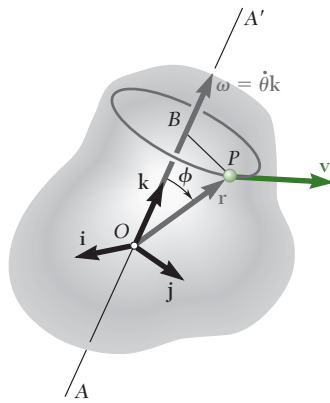



Figura 15.9

Mas esse é precisamente o resultado que obteríamos se desenhássemos ao longo de AA' um vetor $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k}$ se efetuássemos o produto vetorial $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ (Fig. 15.9). Escrevemos, então

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

O vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6}$$

orientado ao longo do eixo de rotação, é denominado *velocidade angular* do corpo, sendo igual em intensidade à taxa de variação $\dot{\theta}$ da coordenada angular; seu sentido pode ser obtido pela regra da mão direita (Seção 3.6), considerando o sentido de rotação do corpo.*

A aceleração **a** da partícula P será determinada agora. Diferenciando (15.5) e relembrando a regra de diferenciação de um produto vetorial (Seção 11.10), escrevemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\end{aligned} \tag{15.7}$$

O vetor $d\omega/dt$ é representado por α e é denominado *aceleração angular* do corpo. Considerando também a expressão para **v** em (15.5), temos:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Diferenciando (15.6) e lembrando que **k** é constante em intensidade e direção, temos

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

Logo, a aceleração angular de um corpo que gira em torno de um eixo fixo é um vetor orientado ao longo do eixo de rotação de intensidade igual à taxa $\dot{\omega}$ de variação da velocidade angular. Retornando a (15.8), notamos que a aceleração de P é a soma de dois vetores. O primeiro vetor é igual ao produto vetorial $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$; ele é tangente ao círculo descrito por P e, assim, representa o componente tangencial da aceleração. O segundo vetor é igual ao *produto vetorial triplo* $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, obtido efetuando-se o produto vetorial de $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$; como $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ é tangente ao círculo descrito por P, o produto vetorial triplo é orientado para o centro B do círculo e, portanto, representa o componente normal da aceleração.

* Será mostrado na Seção 15.12, no caso mais geral de um corpo rígido que gira simultaneamente em torno de eixos de diferentes direções, que as velocidades angulares obedecem à lei de adição do paralelogramo e que, portanto, são realmente grandezas vetoriais.

Rotação de uma placa representativa. A rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo pode ser definida pelo movimento de uma placa representativa em um plano de referência perpendicular ao eixo de rotação. Vamos escolher o plano xy como plano de referência e admitir que ele coincide com o plano da figura, com o eixo z apontando para fora do papel (Fig. 15.10). Relembrando a partir da Eq. (15.6) que

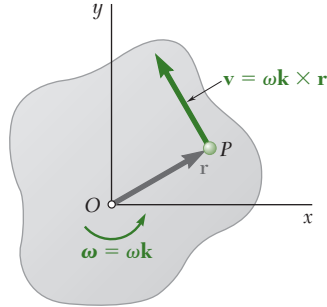



Figura 15.10

$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$, verificamos que um valor positivo do escalar ω corresponde a uma rotação anti-horária da placa representativa e um valor negativo a uma rotação horária. Substituindo $\omega\mathbf{k}$ por $\boldsymbol{\omega}$ na Eq. (15.5), expressamos a velocidade de qualquer ponto P da placa como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad (15.10)$$

Sendo os vetores $\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}$ perpendiculares entre si, a intensidade da velocidade $\mathbf{v}$ é

$$v = r\omega \qquad (15.10')$$

e seu sentido pode ser obtido girando $\mathbf{r}$ 90° no sentido de rotação da placa.

Substituindo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ e $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ na Eq. (15.8) e observando que o produto vetorial de $\mathbf{r}$ por $\mathbf{k}$ duas vezes resulta em um giro de 180° do vetor $\mathbf{r}$, expressamos a aceleração do ponto P como

$$\mathbf{a} = \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r} \qquad (15.11)$$

Decompondo $\mathbf{a}$ em componentes tangencial e normal (Fig. 15.11), escrevemos

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= r\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \qquad (15.11')$$

Figura 15.11

O componente tangencial $\mathbf{a}_t$ aponta para o sentido anti-horário se o escalar α é positivo e para o sentido horário se α é negativo. O componente normal $\mathbf{a}_n$ sempre aponta para o sentido oposto ao de $\mathbf{r}$, ou seja, para O.

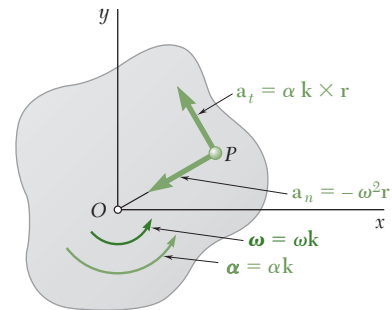



Foto 15.3 Se o rolo interior tem uma velocidade angular constante, a velocidade do papel que está sendo enrolado nele aumenta à medida que o raio do rolo cresce.

15.4 Equações definidoras da rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo

O movimento de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo AA' é considerado *conhecido* quando sua coordenada angular θ pode ser expressa como uma função conhecida de t. Na prática, porém, a rotação de um corpo rígido raramente é definida por uma relação entre θ e t. Mais frequentemente, as condições de movimento serão especificadas pelo tipo de aceleração angular do corpo. Por exemplo, α pode ser dada como uma função de t, como uma função de θ ou como uma função de ω. Retomando as relações (15.6) e (15.9), escrevemos

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

ou, resolvendo (15.12) para dt e substituindo em (15.13)

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Como essas equações são semelhantes àquelas obtidas no Cap. 11 para o movimento retilíneo de uma partícula, sua integração pode ser efetuada seguindo-se o procedimento delineado na Seção 11.3.

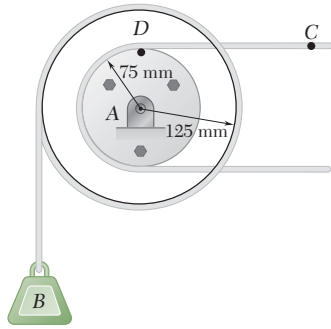
Dois casos particulares de rotação são encontrados frequentemente:

1. *Rotação Uniforme.* Este caso é caracterizado pelo fato de que a aceleração angular é nula. Logo, a velocidade angular é constante e a coordenada angular é dada pela equação

$$\theta = \theta_0 + \omega t \tag{15.15}$$

2. *Rotação Uniformemente Acelerada.* Neste caso, a aceleração angular é constante. As seguintes Eqs. que relacionam a velocidade angular, a coordenada angular e o tempo podem ser deduzidas de um modo similar àquele descrito na Seção 11.5. Fica claro a similaridade entre as fórmulas deduzidas aqui e aquelas obtidas para o movimento retilíneo uniformemente acelerado

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{aligned} \tag{15.16}$$

Deve-se enfatizar que a Eq. (15.15) só pode ser usada quando $\alpha = 0$, e que a Eq. (15.6) pode ser usada apenas quando α = constante. Em qualquer outro caso, as Eqs. (15.12) a (15.14) devem ser usadas.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.1

A carga B está conectada a uma polia dupla por um dos dois cabos inextensíveis mostrados na figura. O movimento da polia é controlado pelo cabo C, que tem uma aceleração constante de 225 mm/s² e uma velocidade inicial de 300 mm/s, ambas orientadas para a direita. Determine (*a*) o número de revoluções executadas pela polia em 2 s (*b*) a velocidade e a variação na posição da carga B após 2 s e (*c*) a aceleração do ponto D sobre o aro da polia interna em $t = 0$.

SOLUÇÃO

a. Movimento da polia. Como o cabo é inextensível, a velocidade do ponto D é igual à velocidade do ponto C e o componente tangencial da aceleração de D é igual à aceleração de C.

$$(\mathbf{v}_D)_0 = (\mathbf{v}_C)_0 = 300\,\text{mm/s} \rightarrow \qquad (\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 225\,\text{mm/s}^2 \rightarrow$$

Notando que a distância de D ao centro da polia é de 75 mm, escrevemos

$$(v_D)_0 = r\omega_0 \qquad 300\,\text{mm/s} = (75\,\text{mm})\omega_0 \qquad \boldsymbol{\omega}_0 = 4\,\text{rad/s} \downarrow$$

$$(a_D)_t = r\alpha \qquad 225\,\text{mm/s}^2 = (75\,\text{mm})\alpha \qquad \boldsymbol{\alpha} = 3\,\text{rad/s}^2 \downarrow$$

Usando as equações do movimento uniformemente acelerado, obtemos, para $t = 2$ s,

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 4\,\text{rad/s} + (3\,\text{rad/s}^2)(2\,\text{s}) = 10\,\text{rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = 10\,\text{rad/s} \downarrow$$

$$\theta = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = (4\,\text{rad/s})(2\,\text{s}) + \tfrac{1}{2}(3\,\text{rad/s}^2)(2\,\text{s})^2 = 14\,\text{rad}$$

$$\theta = 14\,\text{rad} \downarrow$$

$$\text{Número de revoluções} = (14\,\text{rad})\left(\frac{1\,\text{rev}}{2\pi\,\text{rad}}\right) = 2{,}23\,\text{rev} \quad ◀$$

b. Movimento da carga *B*. Usando as seguintes relações entre movimento linear e angular, com $r = 125$ mm, escrevemos

$$v_B = r\omega = (125\,\text{mm})(10\,\text{rad/s}) = 1.250\,\text{mm/s} \qquad \mathbf{v}_B = 1{,}25\,\text{m/s}\uparrow \quad ◀$$

$$\Delta y_B = r\theta = (125\,\text{mm})(14\,\text{rad}) = 1.750\,\text{mm} \qquad \Delta \boldsymbol{y}_B = 1{,}75\text{cm para cima} \uparrow \quad ◀$$

c. Aceleração do ponto *D* em *t* = 0. O componente tangencial de aceleração é

$$(\mathbf{a}_D)_t = \mathbf{a}_C = 225\,\text{mm/s}^2 \rightarrow$$

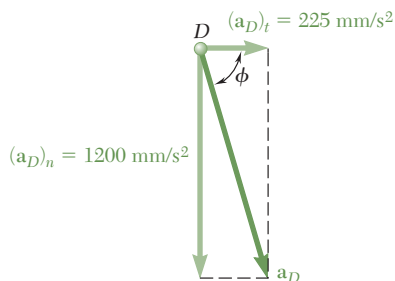
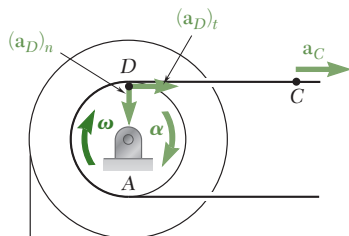
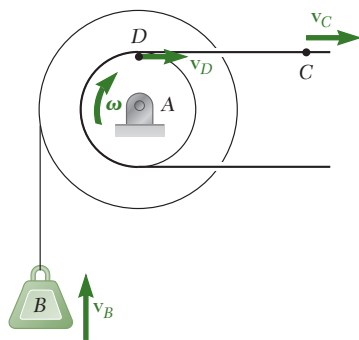
Como, em $t = 0$, $\omega_0 = 4$ rad/s, o componente normal da aceleração é

$$(a_D)_n = r_D\omega_0^2 = (75\,\text{mm})(4\,\text{rad/s})^2 = 1.200\,\text{mm/s}^2 \qquad (\mathbf{a}_D)_n = 1.200\,\text{mm/s}^2 \downarrow$$

A intensidade e direção da aceleração total pode ser obtida escrevendo-se

$$\text{tg}\,\phi = (1.200\,\text{mm/s}^2)/(225\,\text{mm/s}^2) \qquad \phi = 79{,}4°$$

$$a_D\,\text{sen}\,79{,}4° = 1.200\,\text{mm/s}^2 \qquad a_D = 1.220\,\text{mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_D = 1{,}22\,\text{mm/s}^2 \searrow 79{,}4° \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, iniciamos o estudo do movimento de corpos rígidos considerando dois tipos particulares de movimento de corpos rígidos: *translação* e *rotação* em torno de um *eixo fixo.*

1. Corpo rígido em translação. Em um dado instante qualquer, todos os pontos de um corpo rígido em translação têm a *mesma velocidade* e a *mesma aceleração* (Fig. 15.7).

2. Corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo. A posição de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo foi definida em um dado instante qualquer pela *coordenada angular* θ, usualmente medida em *radianos.* Selecionando o vetor unitário **k** ao longo do eixo fixo e de tal modo que a rotação do corpo aparece no sentido anti-horário vista da ponta de **k**, definimos a *velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ e a *aceleração angular* $\boldsymbol{\alpha}$ do corpo:

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6, 15.9}$$

Para a resolução de problemas, tenha em mente que os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ estão ambos orientados ao longo do eixo de rotação fixo e que seu sentido pode ser obtido pela regra da mão direita.

a. A velocidade de um ponto *P* de um corpo que gira em torno de um eixo fixo foi determinada como sendo

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a aceleração angular do corpo e **r** é o vetor de posição desenhado a partir de qualquer ponto sobre o eixo de rotação do ponto *P* (Fig. 15.9).

b. A aceleração do ponto *P* foi determinada como sendo

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Como os produtos vetoriais não são comutativos, *certifique-se de escrever os vetores na ordem indicada* ao usar qualquer uma das duas equações anteriores.

3. Rotação de uma placa representativa. Em muitos problemas, você será capaz de reduzir a análise da rotação de um corpo tridimensional em torno de um eixo fixo ao estudo da rotação de uma placa representativa em um plano perpendicular ao eixo fixo. O eixo z deve ser orientado ao longo do eixo de rotação e apontar para fora do papel. Logo, a placa representativa irá girar no plano xy em torno da origem O do sistema de coordenadas (Fig. 15.10).

Para resolver problemas desse tipo, você deve fazer o seguinte:

a. Desenhar um diagrama da placa representativa, mostrando suas dimensões, sua velocidade e aceleração angulares, bem como os vetores que representam as velocidades e acelerações dos pontos da placa para os quais você tem ou procura informações.

b. Relacionar a rotação da placa e o movimento dos pontos da placa escrevendo as equações

$$v = r\omega \tag{15.10'}$$
$$a_t = r\alpha \qquad a_n = r\omega^2 \tag{15.11'}$$

Lembre-se de que a velocidade $\mathbf{v}$ e a componente $\mathbf{a}_t$ da aceleração de um ponto P da placa são tangentes à trajetória circular descrita por P. As direções e os sentidos de $\mathbf{v}$ e $\mathbf{a}_t$ são encontrados pelo giro de 90° do vetor de posição $\mathbf{r}$ no sentido indicado por $\boldsymbol{\omega}$ e α, respectivamente. O componente normal $\mathbf{a}_n$ da aceleração de P é sempre orientado para o eixo de rotação.

4. Equações definidoras da rotação de um corpo rígido. Você deve ter ficado satisfeito ao observar a semelhança existente entre as equações que definem a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo [Eqs. (15.12) a (15.16)] e aquelas do Cap. 11, que definem o movimento retilíneo de uma partícula [Eqs. (11.1) até (11.8)]. Tudo o que você deve fazer para obter o novo conjunto de equações é substituir θ, ω *e* α por x, v e a nas equações do Cap. 11.

PROBLEMAS

15.1 O movimento de um came é definido pela relação $\theta = t^3 - 9t^2 + 15t$, sendo θ expresso em radianos e t em segundos. Determine a coordenada, a velocidade e a aceleração angulares do came quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 3$ s.

15.2 Para o came do Problema 15.1, determine o tempo, a coordenada e a aceleração angulares quando a velocidade angular é nula.

15.3 O movimento de um volante oscilante é definido pela relação $\theta = \theta_0 \operatorname{sen}(\pi t/T) - (0{,}5\theta_0) \operatorname{sen}(2\pi t/T)$, sendo θ expresso em radianos e t em segundos. Sabendo que $\theta_0 = 6$ rad e $T = 4$ s, determine a coordenada, a velocidade e a aceleração angulares do volante quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 2$ s.

15.4 Resolva o Problema 15.3, quando $t = 1$ s.

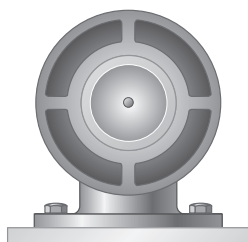
15.5 O movimento de um disco rotativo em banho de óleo é definido pela relação $\theta = \theta_0(1 - e^{-t/4})$, sendo θ expresso em radianos e t em segundos. Sabendo que $\theta_0 = 0{,}40$ rad, determine a coordenada, a velocidade e a aceleração angulares do disco quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 3$ s, (*c*) $t = \infty$.

15.6 A aceleração angular de um disco oscilante é definida pela relação $\alpha = -k\theta$. Determine (*a*) o valor de k para o qual $\omega = 8$ rad/s, quando $\theta = 0$, e $\theta = 4$ rad, quando $\omega = 0$, (*b*) a velocidade angular do disco quando $\theta = 3$ rad.

Figura *P15.7*

15.7 Quando um motor elétrico é ligado, ele alcança sua velocidade nominal de 3.300 rpm em 6 s, e quando é desligado, o motor livre atinge o repouso em 40 s. Admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine o número de revoluções que o motor executa (*a*) para alcançar sua velocidade nominal, (*b*) para atingir o repouso.

15.8 O rotor de uma turbina a gás está girando a uma velocidade de 6.900 rpm quando a turbina é desligada. Observa-se que são necessários 4 min para que o rotor livre atinja o repouso. Admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine (*a*) a aceleração angular, (*b*) o número de revoluções executadas pelo rotor antes de atingir o repouso.

15.9 A aceleração angular de um eixo é definida pela relação $\alpha = -0{,}25\omega$, sendo α expresso em rad/s^2 e ω em rad/s. Sabendo que em $t = 0$ a velocidade angular do eixo é 20 rad/s, determine (*a*) o número de revoluções que o eixo executará antes de chegar ao repouso, (*b*) o tempo necessário para que o eixo chegue ao repouso, (*c*) o tempo necessário para que a velocidade angular do eixo seja reduzida a 1% de seu valor inicial.

15.10 O conjunto mostrado na figura consiste uma haste reta *ABC* que passa através de uma placa retangular *DEFH* e está soldada. O conjunto gira em torno do eixo *AC* com uma velocidade angular constante de 9 rad/s. Sabendo que a rotação é no sentido anti-horário quando vista de *C*, determine a velocidade e a aceleração do canto *F*.

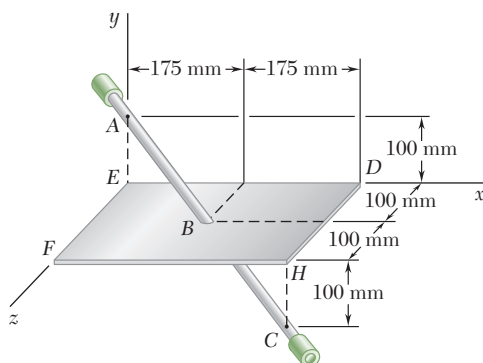



Figura P15.10

15.11 No Problema 15.10, determine a velocidade e a aceleração do canto *H* admitindo que a velocidade angular é de 9 rad/s e decresce a uma taxa de 18 rad/s^2.

15.12 A barra dobrada *ABCDE* gira em torno de uma linha que liga os pontos *A* e *E* com uma velocidade angular constante de 9 rad/s. Sabendo que a rotação é horária a partir de *E*, determine a velocidade e a aceleração do canto *C*.

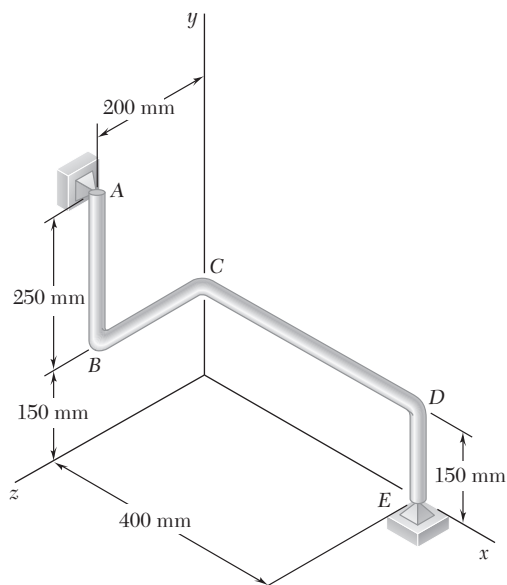



Figura P15.12

15.13 No Problema 15.12, determine a velocidade e a aceleração do canto *B*, admitindo que a velocidade angular seja de 9 rad/s, crescendo a uma taxa de 45 rad/s^2.

15.14 Uma placa triangular e duas placas retangulares estão soldadas entre si e à barra reta *AB*. A unidade soldada gira como um todo em torno do eixo *AB* com uma velocidade angular constante de 5 rad/s. Sabendo que, no instante considerado na figura, a velocidade do canto *E* está dirigida para baixo, determine a velocidade e a aceleração do canto *D*.

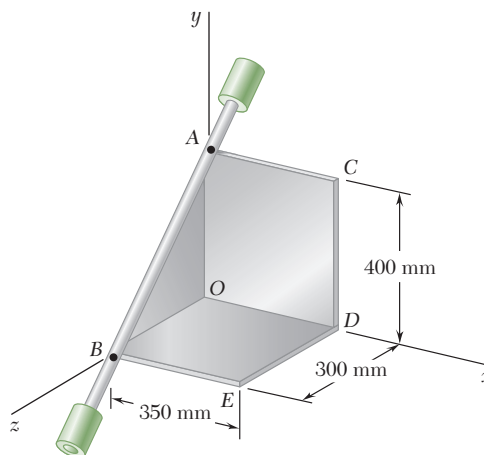



Figura *P15.14*

15.15 No Problema 15.14, determine a aceleração do canto *D*, considerando que a velocidade angular é 5 rad/s e decresce a uma taxa de 20 rad/s^2.

15.16 A Terra realiza uma revolução completa em torno de seu eixo em 23h56 min. Sabendo que o raio médio da Terra é de 6.370 km, determine a velocidade linear e a aceleração de um ponto sobre a superfície da Terra (*a*) no Equador, (*b*) na Filadélfia, a 40° de latitude norte, (*c*) no Polo Norte.

15.17 A Terra realiza uma revolução completa em torno do Sol em 365,24 dias. Admitindo que a órbita da Terra seja circular e que tenha um raio de 15×10^6 km, determine a velocidade e a aceleração do planeta.

15.18 Uma placa circular mostrada na figura está inicialmente em repouso. Sabendo que $r = 200$ mm e que a placa tem uma aceleração angular constante de 0,3 rad/s^2, determine a intensidade da aceleração total do ponto *B* quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 2$ s, (*c*) $t = 4$ s.

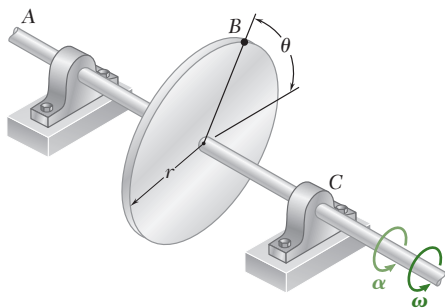



Figura P15.18, P15.19 e *P15.20*

15.19 A aceleração angular de uma placa circular de 600 mm de raio mostrada na figura é definida pela relação $\alpha = \alpha_0 e^{-t}$. Sabendo que a placa está em repouso quando $t = 0$ e que $\alpha_0 = 10$ rad/s^2, determine a intensidade da aceleração total do ponto *B* quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 0{,}5$ s, (*c*) $t = \infty$.

15.20 Uma placa circular de raio 250 mm mostrada na figura está inicialmente em repouso e tem a aceleração angular definida pela relação $\alpha = \alpha_0 \cos(\pi t/T)$. Sabendo que $T = 1{,}5$ s e $\alpha_0 = 10$ rad/s^2, determine a intensidade da aceleração total do ponto *B* quando (*a*) $t = 0$, (*b*) $t = 0{,}5$ s, (*c*) $t = 0{,}75$ s.

15.21 Uma série de pequenos componentes de máquina movidos por uma correia transportadora passa sobre uma polia esticadora de 150 mm de raio. No instante mostrado na figura, a velocidade do ponto A é de 400 mm/s para a esquerda e sua aceleração é de 250 mm/s^2 para a direita. Determine (a) a velocidade angular e a aceleração angular da polia esticadora e (b) a aceleração total do componente de máquina em B.

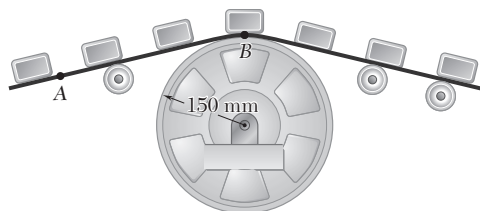



Figura P15.21 e P15.22

15.22 Uma série de pequenos componentes de máquina movidos por uma correia transportadora passa sobre uma polia esticadora de 150 mm de raio. No instante mostrado na figura, a velocidade angular da polia esticadora é de 4 rad/s no sentido horário. Determine a aceleração angular da polia para a qual a intensidade da aceleração total do componente de máquina em B é de 3 m/s^2.

15.23 A lixadeira mostrada na figura está inicialmente em repouso. Se o tambor de acionamento B tem uma aceleração angular constante de 120 rad/s^2 no sentido anti-horário, determine a intensidade da aceleração da correia no ponto C quando (a) $t = 0{,}5$ s e (b) $t = 2$ s.

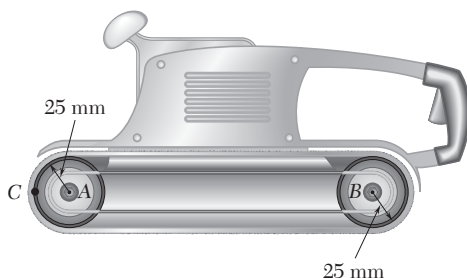



Figura *P15.23* e P15.24

15.24 A velocidade nominal do tambor B da lixadeira mostrada na figura é de 2.400 rpm. Quando a lixadeira é desligada, observa-se que o tambor, então livre, alcança o repouso em 10 s. Admitindo-se um movimento uniformemente acelerado, determine a velocidade e a aceleração do ponto C da correia (a) imediatamente antes de desligar a lixadeira e (b) 9 s mais tarde.

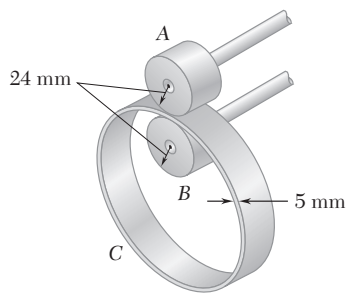



Figura P15.25

15.25 O anel C tem uma raio interno de 55 mm e um raio externo de 60 mm e é posicionado entre duas rodas A e B, cada uma com raio externo de 24 mm. Sabendo que a roda A gira com uma velocidade angular constante de 300 rpm e que não ocorre deslizamento, determine (*a*) a velocidade angular do anel C e na roda B, (*b*) a aceleração dos pontos de A e B que estão em contato com C.

15.26 O anel B tem um raio interno r_2 e está suspenso por um eixo horizontal A do modo mostrado na figura. Sabendo que o eixo A gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_A$ e que não ocorre deslizamento, deduza uma relação em termos de r_1, r_2, r_3 e $\boldsymbol{\omega}_A$ para (*a*) a velocidade angular do anel B, (*b*) a aceleração dos pontos do eixo A e do anel B que estão em contato.

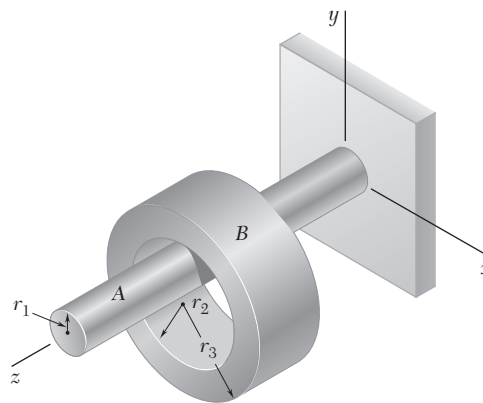



Figura *P15.26* e P15.27

15.27 O anel B tem um raio interno r_2 e está suspenso por um eixo horizontal A do modo mostrado na figura. O eixo A gira com velocidade angular constante de 25 rad/s e não ocorre deslizamento. Sabendo que r_1 = 12 mm, r_2 = 30 mm e r_3 = 40 mm, determine (*a*) a velocidade angular do anel B, (*b*) a aceleração dos pontos do eixo A e do anel B que estão em contato, (*c*) a intensidade da aceleração de um ponto sobre a superfície externa do anel B.

Figura P15.28 e P15.29

15.28 O cilindro A move-se para baixo com uma velocidade de 3 m/s quando o freio é subitamente aplicado ao tambor. Sabendo que o cilindro desloca-se 6 m para baixo antes de chegar ao repouso e admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine (*a*) a aceleração angular do tambor, (*b*) o tempo necessário para o cilindro chegar ao repouso.

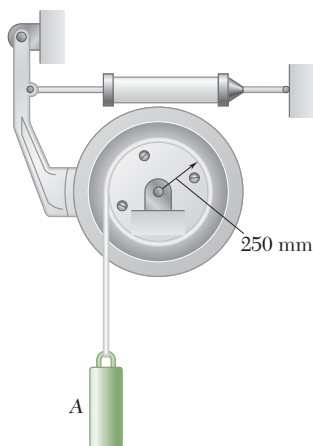
15.29 O sistema mostrado na figura é mantido em repouso pelo conjunto freio-tambor mostrado na figura. Depois que o freio é parcialmente liberado em $t = 0$, observa-se que o cilindro se desloca 5 m em 5 s. Admitindo um movimento uniformemente acelerado, determine (*a*) a aceleração angular do tambor, (*b*) a velocidade angular do tambor em $t = 4$ s.

15.30 Uma polia e dois blocos estão conectados por cabos inextensíveis como mostra a figura. O bloco A tem uma aceleração constante de 300 mm/s^2 e uma velocidade inicial de 240 mm/s, ambas direcionadas para baixo. Determine (a) o número de revoluções executadas pela polia em 3 s, (b) a velocidade e posição do bloco B após 3 s, (c) a aceleração do ponto D na borda da polia em $t = 0$.

Figura P15.30 e P15.31

15.31 Uma polia e dois blocos estão conectados por cabos inextensíveis como mostra a figura. A polia inicia em repouso em $t = 0$ e é acelerada a uma taxa uniforme de 2,4 rad/s^2 no sentido horário. Em $t = 4$ s, determine a velocidade e posição (a) do bloco A, (b) do bloco B.

15.32 O disco B encontra-se em repouso quando é posto em contato com o disco A, que está girando livremente a 450 rpm no sentido horário. Após 6 s de deslizamento, período em que cada disco assume uma aceleração angular constante, o disco A atinge uma velocidade angular final de 140 rpm no sentido horário. Determine a aceleração angular de cada disco durante o período de deslizamento.

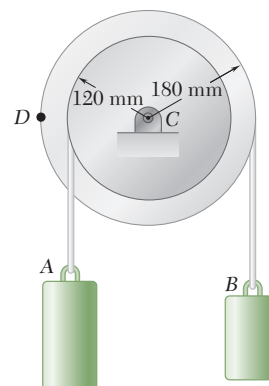
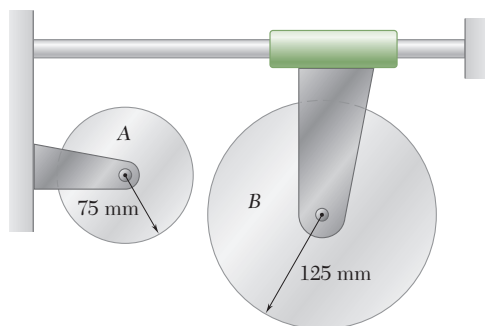



Figura P15.32 e P15.33

15.33 e *15.34* Um dispositivo simples de acionamento por atrito consiste em dois discos, A e B. Inicialmente, o disco A tem uma velocidade angular de 500 rpm e o disco B encontra-se em repouso. Sabe-se que o disco A chegará livremente ao repouso em 60 s. Entretanto, em vez de esperar até que ambos os discos estejam em repouso para pô-los em contato, uma aceleração angular constante de 2,5 rad/s é aplicada ao disco B no sentido anti-horário. Determine (a) em que instante os discos podem se postos em contato para não haver deslizamento, (b) a velocidade angular de cada disco quando o contato é estabelecido.

15.35 Dois discos de atrito A e B, ambos rodando livremente a 240 rpm no sentido anti-horário, são postos em contato. Após 8 s de deslizamento, durante o qual cada disco tem uma aceleração angular constante, o disco A alcança a velocidade angular final de 60 rpm no sentido anti-horário. Determine (a) a aceleração angular de cada disco durante o período de deslizamento, (b) o tempo na qual a velocidade angular do disco B é igual a zero.

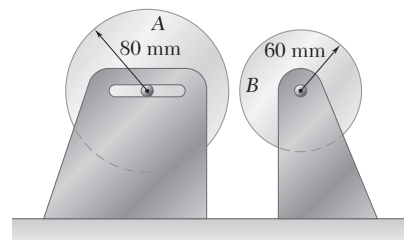



Figura *P15.34* e *P15.35*

***15.36** Em um processo contínuo de impressão, o papel é puxado para dentro das prensas a uma velocidade constante v. Representando por r o raio do rolo de papel em um instante dado qualquer e por b a espessura do papel, deduza uma expressão para a aceleração angular do rolo de papel.

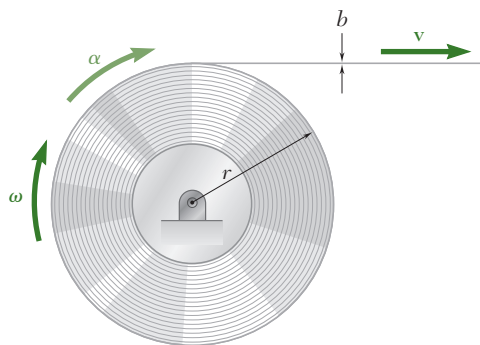



Figura P15.36

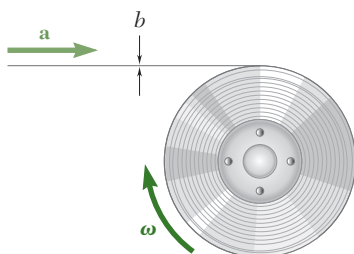



Figura P15.37

***15.37** Uma fita de vídeo está sendo rebobinada em um carretel VCR que gira a uma velocidade constante de ω_0. Representando por r o raio do carretel em um dado instante qualquer e por b a espessura da fita, deduza uma expressão para a aceleração da fita ao se aproximar do carretel.

15.5 Movimento plano geral

Conforme indicado na Seção 15.1, entendemos por movimento plano geral um movimento plano que não é uma translação nem uma rotação. Todavia, como você verá a seguir, *um movimento plano geral pode ser sempre considerado como a soma de uma translação e de uma rotação.*

Considere, por exemplo, uma roda que rola sobre uma pista reta (Fig. 15.12). Durante um certo intervalo de tempo, dois pontos dados, A e B, se moverão de A_1 até A_2 e de B_1 até B_2 respectivamente. O mesmo resultado poderia ser obtido por meio de uma translação que levaria A e B para A_2 e B'_1 (com a linha AB permanecendo na vertical), seguida de uma rotação em torno de A para trazer B até B_2. Embora o movimento original de rolamento difira da combinação de translação e rotação quando esses movimentos são considerados em sucessão, o movimento original pode ser duplicado exatamente por uma combinação de translação e rotação simultâneas.

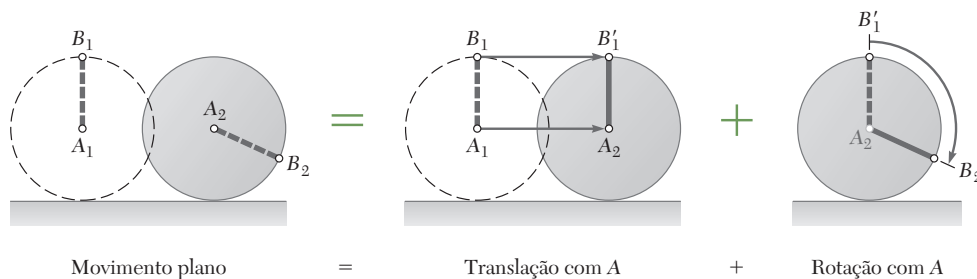



Figura 15.12

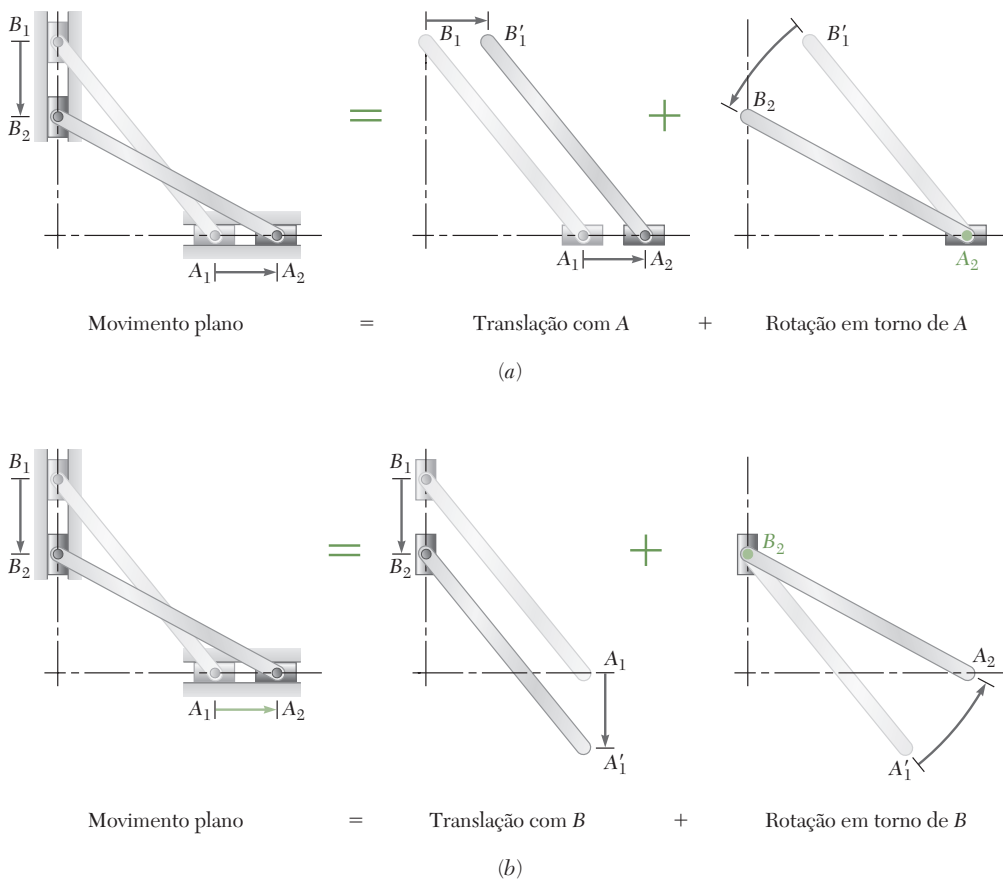



Figura 15.13

Outro exemplo de movimento plano é dado na Fig. 15.13, que representa uma barra cujas extremidades deslizam ao longo de uma pista horizontal e de uma vertical, respectivamente. Esse movimento pode ser substituído por uma translação em uma direção horizontal e uma rotação em torno de A (Fig. 15.13*a*) ou por uma translação em uma direção vertical e uma rotação em torno de B (Fig. 15.13*b*).

No caso geral de movimento plano, consideraremos um pequeno deslocamento que leva duas partículas A e B de uma placa representativa de A_1 e B_1 até A_2 e B_2, respectivamente (Fig. 15.14). Esse deslocamento pode ser dividido em duas partes: em uma delas, as partículas movem-se até A_2 e B_1', com a linha AB mantendo a mesma direção; na outra, B move-se até B_2, enquanto A permanece fixo. A primeira parte do movimento é claramente uma translação, e a segunda é uma rotação em torno de A.

Figura 15.14

Recordando a partir da definição dada na Seção 11.12 para o movimento relativo de uma partícula com respeito a um sistema de referência móvel – em oposição ao seu movimento absoluto em relação a um sistema de referência fixo –, podemos reafirmar o resultado obtido anteriormente do seguinte modo: dadas duas partículas A e B de uma placa rígida em movimento plano, o movimento relativo de B com respeito a um sistema de referência ligado a A, de orientação fixa, é uma rotação. Para um observador movendo-se com A, mas sem girar, a partícula B parecerá descrever um arco de círculo centrado em A.

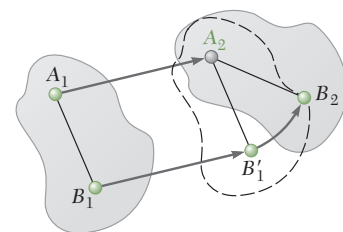
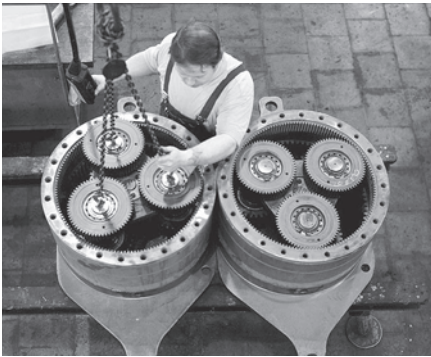



Foto 15.4 Os sistemas de engrenagens planetárias são usados para altas razões de redução com espaço e peso mínimo. As engrenagens pequenas sofrem movimento plano.

15.6 Velocidade absoluta e velocidade relativa no movimento plano

Vimos na seção precedente que qualquer movimento plano de uma placa pode ser substituído por uma translação definida pelo movimento de um ponto de referência arbitrário A e por uma rotação simultânea em torno de A. A velocidade absoluta $\mathbf{v}_B$ de uma partícula B da placa é obtida a partir da fórmula de velocidade relativa deduzida na Seção 11.12,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (15.17)$$

onde o segundo membro representa uma soma vetorial. A velocidade $\mathbf{v}_A$ corresponde à translação da placa junto com A, enquanto a velocidade relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ está associada à rotação da placa em torno de A e é medida em relação aos eixos centrados em A, de orientação fixa (Fig. 15.15). Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor de posição de B relativo a A e por $\omega\mathbf{k}$ a velocidade angular da placa em relação aos eixos de orientação fixa, temos a partir das Eqs. (15.10) e (15.10′)

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \qquad (15.18)$$

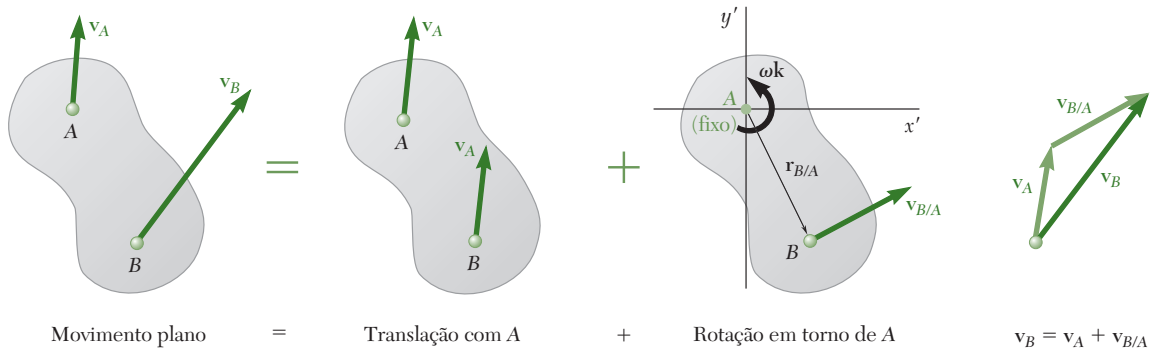



Figura 15.15

onde r é a distância de A a B. Substituindo $\mathbf{v}_{B/A}$ da Eq. (15.18) na Eq. (15.17), também podemos escrever

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (15.17')$$

Como exemplo, examinaremos novamente a barra AB da Fig. 15.13. Considerando que a velocidade $\mathbf{v}_A$ da extremidade A é conhecida, nos propomos encontrar a velocidade $\mathbf{v}_B$ da extremidade B e a velocidade angular ω da barra em termos da velocidade $\mathbf{v}_A$, do comprimento l e do ângulo θ. Escolhendo A como ponto de referência, estabelecemos que o movimento dado é equivalente a uma translação junto com A e a uma rotação simultânea em torno de A (Fig. 15.16). A velocidade absoluta de B deve, portanto, ser igual à soma vetorial

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (15.17)$$

Observamos que, enquanto a direção de $\mathbf{v}_{B/A}$ é conhecida, sua intensidade $l\omega$ é desconhecida. Todavia, isso é compensado pelo fato de que a direção de $\mathbf{v}_B$ é conhecida. Logo, podemos completar o diagrama da Fig. 15.16. Resolvendo para as intensidades v_B e ω, escrevemos

$$v_B = v_A \operatorname{tg}\theta \qquad \omega = \frac{v_{B/A}}{l} = \frac{v_A}{l\cos\theta} \qquad (15.19)$$

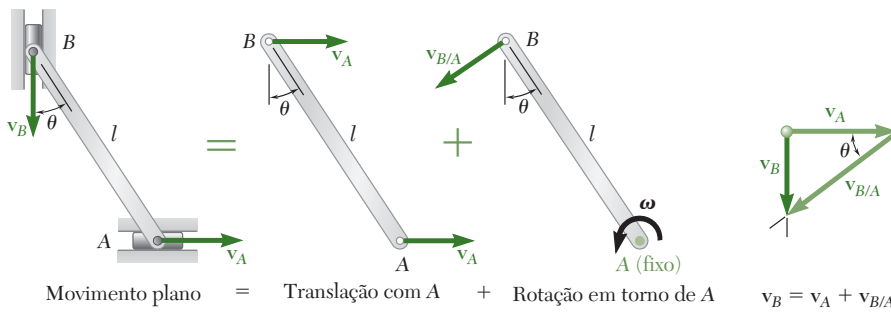



Figura 15.16

O mesmo resultado pode ser obtido usando-se B como ponto de referência. Decompondo o movimento dado em uma translação junto com B e em uma rotação simultânea em torno de B (Fig. 15.17), escrevemos a equação

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \tag{15.20}$$

que está representada graficamente na Fig. 15.17. Notamos que $\mathbf{v}_{A/B}$ e $\mathbf{v}_{B/A}$ têm a mesma intensidade $l\omega$, mas sentidos opostos. Logo, o sentido da velocidade relativa depende do ponto de referência que tenha sido selecionado e deve ser cuidadosamente determinado a partir do diagrama apropriado (Fig. 15.16 ou 15.17).

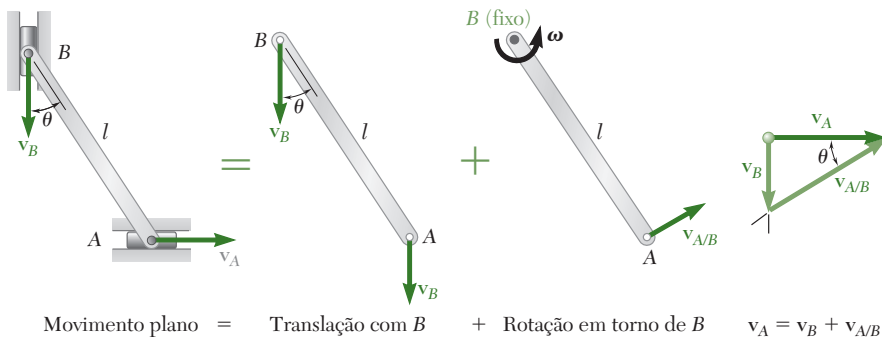
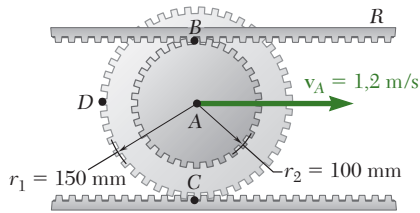



Figura 15.17

Finalmente, observamos que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da barra em sua rotação em torno de B é igual à da sua rotação em torno de A. Em ambos os casos, ela é medida pela taxa de variação do ângulo θ. Esse resultado é bastante geral; devemos, então, ter em mente que *a velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ *de um corpo rígido em movimento plano é independente do ponto de referência.*

A maioria dos mecanismos consiste não só de uma, mas de *muitas* partes móveis. Quando as diversas partes de um mecanismo estão conectadas por pinos, a análise do mecanismo pode ser efetuada considerando-se cada parte como um corpo rígido, atentando para o fato de que os pontos onde duas partes estão conectadas devem ter a mesma velocidade absoluta (ver Problema Resolvido 15.3). Uma análise similar pode ser usada quando engrenagens estiverem envolvidas, pois os dentes em contato também devem ter a mesma velocidade absoluta. Entretanto, quando um mecanismo contém partes que deslizam umas sobre as outras, a velocidade relativa das partes em contato deve ser levada em consideração (ver as Seções 15.10 e 15.11).

PROBLEMA RESOLVIDO 15.2

A engrenagem dupla mostrada na figura rola sobre a cremalheira inferior fica, sendo a velocidade de seu centro A de 1,2 m/s para a direita. Determine (a) a velocidade angular da engrenagem e (b) as velocidades da cremalheira superior R e do ponto D da engrenagem.

SOLUÇÃO

a. Velocidade angular da engrenagem. Uma vez que a engrenagem rola sobre a cremalheira inferior, seu centro A desloca-se por meio de uma distância igual ao perímetro da circunferência externa $2\pi r_1$ a cada revolução completa da engrenagem. Lembrando que 1 rev = 2π rad e que quando A desloca-se para a direita ($x_A > 0$) a engrenagem gira no sentido horário ($\theta < 0$), escrevemos

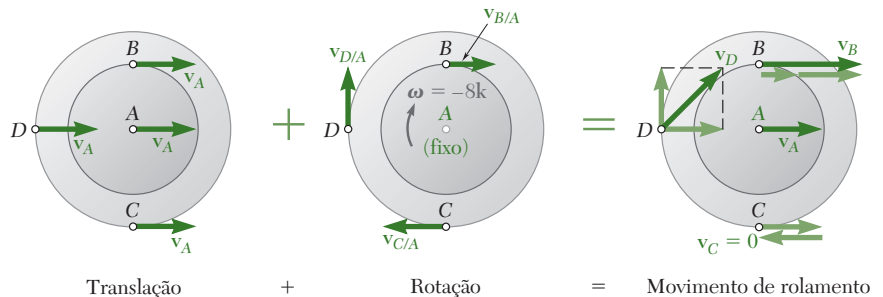
$$\frac{x_A}{2\pi r_1} = -\frac{\theta}{2\pi} \qquad x_A = -r_1\theta$$

Diferenciando em relação ao tempo t e substituindo os valores conhecidos $v_A = 1,2$ m/s e $r_1 = 150$ mm $= 0,150$ m, obtemos

$$v_A = -r_1\omega \qquad 1,2 \text{ m/s} = -(0,150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = -(8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

onde $\mathbf{k}$ é um vetor unitário que aponta para fora do papel.

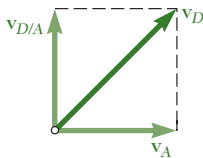
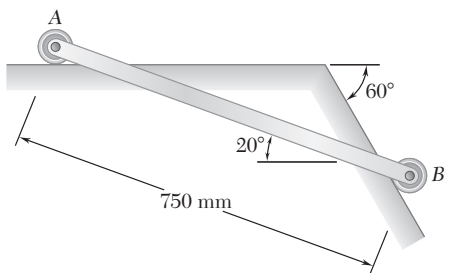
b. Velocidades. O movimento de rolamento é decomposto em dois movimentos componentes: uma translação junto com o centro A e uma rotação em torno do centro A. Na translação, todos os pontos da engrenagem deslocam-se com a mesma velocidade $\mathbf{v}_A$. Na rotação, cada ponto P da engrenagem desloca-se em torno de A com uma velocidade relativa $\mathbf{v}_{P/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{P/A}$, sendo $\mathbf{r}_{P/A}$ o vetor de posição de P relativo a A.

Velocidade da cremalheira superior. A velocidade da cremalheira superior é igual à velocidade do ponto B; escrevemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A}\\ &= (1,2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (0,100 \text{ m})\mathbf{j}\\ &= (1,2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (0,8 \text{ m/s})\mathbf{i} = (2 \text{ m/s})\mathbf{i}\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$

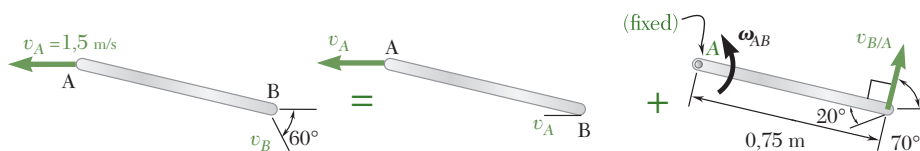
Velocidade do ponto D

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_D &= \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{D/A} = \mathbf{v}_A + \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A}\\ &= (1,2 \text{ m/s})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times (-0,150 \text{ m})\mathbf{i}\\ &= (1,2 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1,2 \text{ m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_D = 1,697 \text{ m/s} \measuredangle 45° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.3

Pequenas rodas estão fixadas nas extremidades das barras AB e giram livremente ao longo da superfície mostrada na figura. Sabendo que a roda A se desloca para a direita com velocidade constante de 1,5 m/s, determina (a) a velocidade da extremidade B da barra, (b) a velocidade angular da barra.

SOLUÇÃO

Movimento da parte B. A velocidade do ponto A é horizontal (para a esquerda); a velocidade da parte B é ascendente na inclinação (a um ângulo de 60 do plano horizontal). Resolvendo a reação de AB em uma translação com A e uma rotação em torno de A, obtemos:

Expressando a relação entre velocidades v_B, v_A e $v_{B/A}$

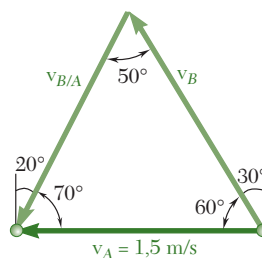
$$v_B = v_A + v_{B/A}$$

$$[v_B \measuredangle 60°] = [1{,}5 \text{ m/s} \leftarrow] + [v_{B/A} \measuredangle 70°]$$

We draw a vector diagram corresponding to this equation:

Lei dos senos.

$$\frac{v_B}{\text{sen}\,70°} = \frac{v_{B/A}}{\text{sen}\,60°} = \frac{1{,}5 \text{ m/s}}{\text{sen}\,50°}$$

a.

$$\mathbf{V}_B = 1{,}840 \text{ m/s} \measuredangle 60° \quad \blacktriangleleft$$

$$\mathbf{V}_{B/A} = 1{,}696 \text{ m/s} \measuredangle 70°$$

b.

$$v_{B/A} = (AB)\omega_{AB}$$

$$1{,}696 \text{ m/s} = (0{,}75 \text{ m})\omega_{AB}$$

$$v_{AB} = 2{,}261 \text{ rad/s} \qquad \omega_{AB} = 2{,}26 \text{ rad/s} \circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você aprendeu a analisar a velocidade de corpos em *movimento plano geral.* Verificou que um movimento plano geral pode ser sempre considerado como a soma dos dois movimentos que estudou na seção anterior, a saber, *uma translação e uma rotação.*

Para resolver um problema que envolve a velocidade de um corpo em movimento plano, você deve percorrer os seguintes passos:

1. Sempre que possível, determine a velocidade dos pontos do corpo onde o corpo esteja conectado a outro corpo cujo movimento seja conhecido. Esse outro corpo pode ser um braço ou manivela que gira a uma dada velocidade angular [Problema Resolvido 15.3].

2. Em seguida, comece a desenhar uma "equação de diagramas" para usar em sua resolução (Figs. 15.15 e 15.16). Essa "equação" consistirá nos seguintes diagramas:

a. Diagrama do movimento plano: Desenhe um diagrama do corpo incluindo todas as dimensões e mostrando os pontos que você conhece ou procura a velocidade.

b. Diagrama de translação: Selecione um ponto de referência A que você conheça a direção e/ou a intensidade da velocidade e desenhe um segundo diagrama mostrando o corpo em translação com todos os seus pontos movendo-se com a mesma velocidade $\mathbf{v}_A$.

c. Diagrama de rotação: Considere o ponto A como um ponto fixo e desenhe um diagrama mostrando o corpo em rotação em torno de A. Mostre a velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ do corpo e as velocidades relativas dos outros pontos com respeito a A, tais como a velocidade $\mathbf{v}_{B/A}$ de B em relação a A.

3. Escreva a fórmula da velocidade relativa

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Embora você possa resolver esta equação vetorial analiticamente escrevendo as equações escalares correspondentes, você verificará que em geral é mais fácil resolvê-la usando um triângulo de vetores (Fig. 15.16).

4. Um ponto de referência diferente pode ser usado para obter-se uma equação equivalente. Por exemplo, se o ponto B for selecionado como ponto de referência, a velocidade do ponto A é expressa como

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

Note que as velocidades relativas $\mathbf{v}_{B/A}$ e $\mathbf{v}_{A/B}$ têm a mesma intensidade, mas sentidos opostos. Logo, as velocidades relativas dependem do ponto de referência selecionado. Entretanto, a velocidade angular é independente da escolha do ponto de referência.

PROBLEMAS

15.38 O movimento da barra AB é guiado por pinos presos em A e B, os quais deslizam nas fendas mostradas na figura. No instante mostrado na figura, $\theta = 40°$ e o pino em B desloca-se para cima e para a esquerda a uma velocidade constante de 150 mm/s. Determine (*a*) a velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade do pino na extremidade A.

15.39 O movimento da barra AB é guiado por pinos presos em A e B, os quais deslizam nas fendas mostradas na figura. No instante mostrado na figura, $\theta = 30°$ e o pino em A desloca-se para baixo com velocidade constante de 250 mm/s. Determine (*a*) a velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade do pino na extremidade B.

Figura P15.38 e P15.39

15.40 No sistema biela-manivela do motor mostrado na figura, a manivela AB tem uma velocidade angular horária constante de 1,5m/s. Para a posição indicada da manivela, determine (*a*) a velocidade angular da barra de conexão BD e (*b*) a velocidade do pistão P.

Figura P15.40

15.41 O colar A desloca-se para cima com velocidade de 1,2 m/s. No instante mostrado na figura, quando $\theta = 25°$, determine (*a*) a velocidade angular da barra AB, (*b*) a velocidade do colar B.

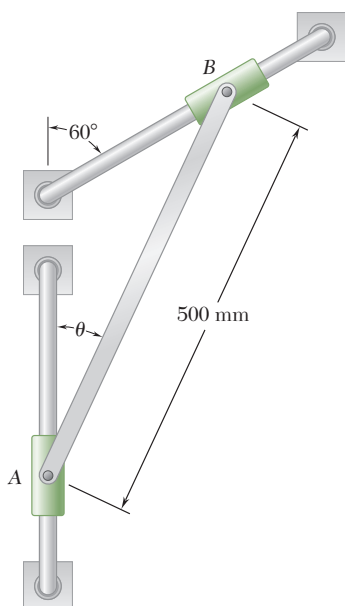



Figura P15.41 e P15.42

15.42 O colar A desloca-se para baixo com velocidade de 1,6 m/s. No instante mostrado na figura, quando $\theta = 40°$, determine (*a*) a velocidade angular da barra AB, (*b*) a velocidade do colar A.

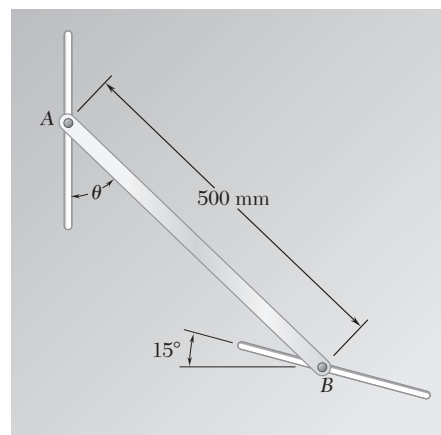
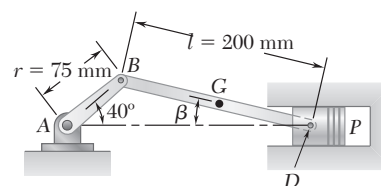
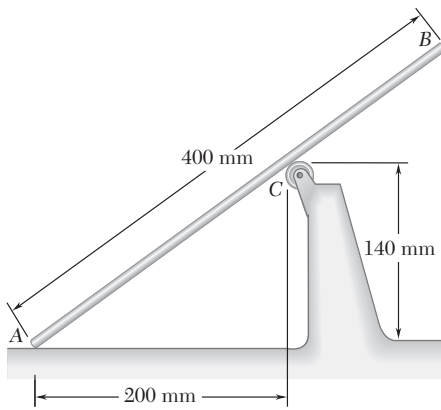



Figura P15.43

15.43 A barra AB movimenta-se sobre um rolete em C enquanto a extremidade A desloca-se para a direita com velocidade constante de 500 mm/s. No instante mostrado na figura, determine (*a*) a velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade de sua extremidade B.

15.44 A placa mostrada na figura desloca-se no plano xy. Sabendo que $(v_A)_x = 300$ mm/s, $(v_B)_x = -100$ mm/s e $(v_C)_y = -600$ mm/s, determine (*a*) a velocidade angular da placa, (*b*) a velocidade do ponto B.

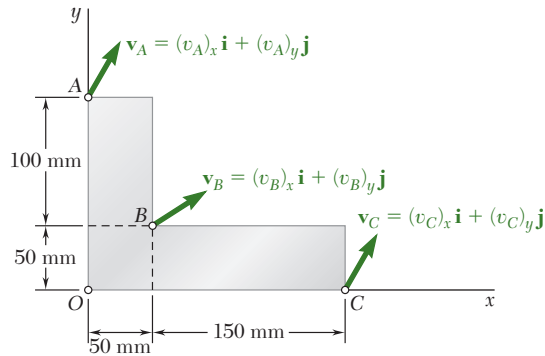



Figura P15.44

15.45 No Problema 15.44, determine (*a*) a velocidade do ponto A, (*b*) o ponto da placa com velocidade nula.

15.46 A placa mostrada na figura desloca-se no plano xy. Sabendo que $(v_A)_x = 120$ mm/s, $(v_B)_y = 300$ mm/s e $(v_C)_y = -60$ mm/s, determine (*a*) a velocidade angular da placa, (*b*) a velocidade do ponto A.

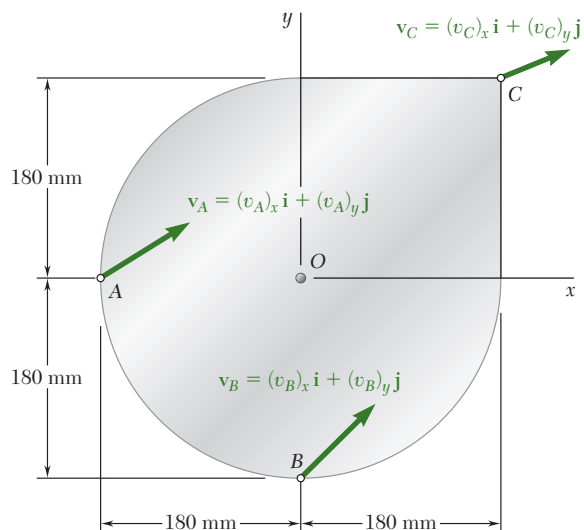



Figura P15.46

15.47 No Problema 15.46, determine (*a*) a velocidade do ponto B, (*b*) o ponto da placa com velocidade nula.

15.48 No sistema de engrenagens planetárias mostrado na figura, o raio das engrenagens *A*, *B*, *C* e *D* é 100 mm e o raio da engrenagem externa *E* é 300 mm. Sabendo que a engrenagem *E* tem uma velocidade angular de 120 rpm no sentido horário e que a engrenagem central tem uma velocidade angular de 150 rpm no sentido horário, determine (*a*) a velocidade angular de cada engrenagem planetária, (*b*) a velocidade angular do suporte de conexão das engrenagens planetárias.

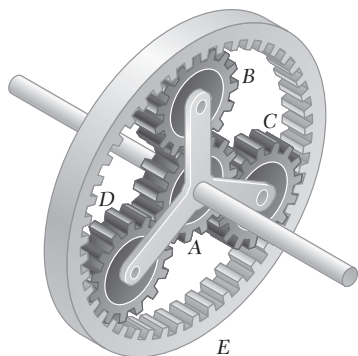



Figura P15.48 e P15.49

15.49 No sistema de engrenagens planetárias mostrado na figura, o raio da engrenagem central *A* é *a*, o raio das engrenagens planetárias é *b* e o raio da engrenagem externa *E* é $a + 2b$. A velocidade angular da engrenagem *A* é ω_A no sentido horário e a engrenagem externa é estacionária. Se a velocidade angular do suporte *BCD* deve ser $\omega_A/5$ no sentido horário, determine (*a*) o valor requerido da razão *b*/*a*, (*b*) a velocidade angular correspondente de cada engrenagem planetária.

15.50 A engrenagem *A* gira com uma velocidade angular de 120 rpm no sentido horário. Sabendo que a velocidade angular do braço *AB* é 90 rpm no sentido horário, determine a velocidade angular correspondente da engrenagem *B*.

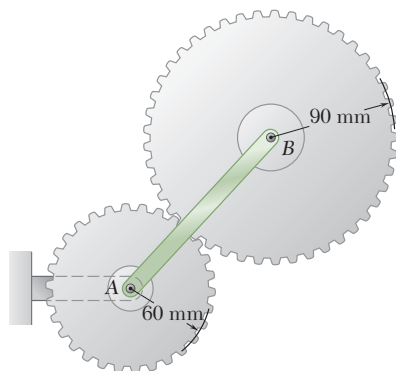



Figura P15.50 e P15.51

15.51 O braço *AB* gira a uma velocidade angular de 42 rpm no sentido horário. Determine a velocidade angular requerida da engrenagem *A* para que (*a*) a velocidade angular da engrenagem *B* seja de 20 rpm no sentido anti-horário, (*b*) o movimento da engrenagem *B* seja uma translação curvilínea.

15.52 O braço *AB* gira com uma velocidade angular de 20 rad/s no sentido anti-horário. Sabendo que a engrenagem *C* é estacionária, determine (*a*) a velocidade angular da engrenagem *B*, (*b*) a velocidade do dente da engrenagem no ponto *D*.

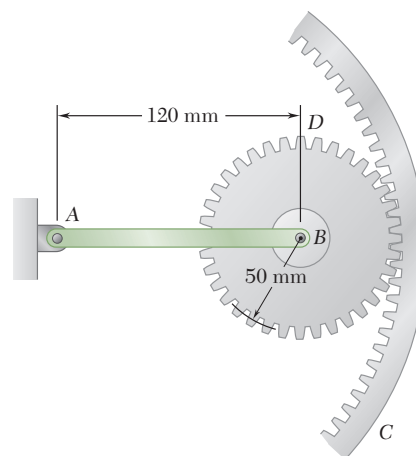



Figura 15.52

15.53 e 15.54 O braço ACB gira em torno do ponto C com velocidade angular de 40 rad/s no sentido anti-horário. Dois discos de atrito A e B estão presos por pinos em seus centros ao braço ACB do modo mostrado na figura. Sabendo que os discos rolam sem escorregar nas superfícies de contato, determine a velocidade angular (*a*) do disco A, (*b*) do disco B.

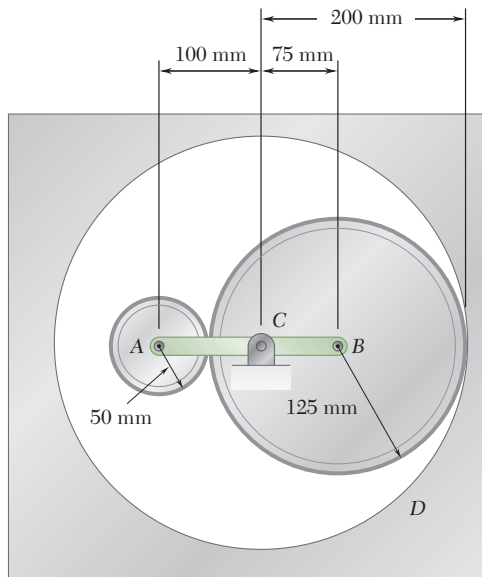



Figura P15.53

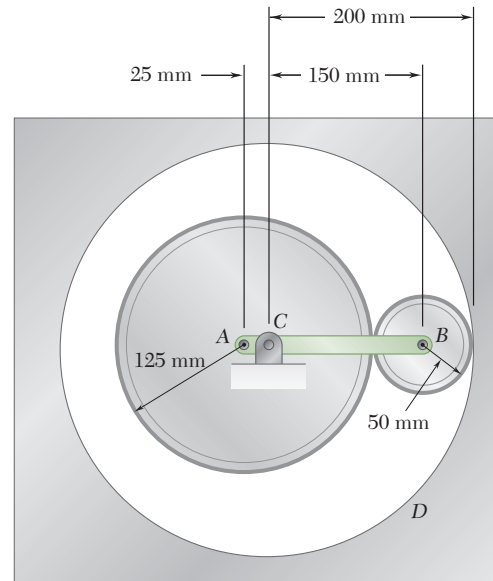



Figura P15.54

15.55 Sabendo que a manivela AB tem uma velocidade angular constante de 160 rpm no sentido anti-horário, determine a velocidade angular da barra BD e a velocidade do colar D quando (*a*) $\theta = 0$, (*b*) $\theta = 90°$.

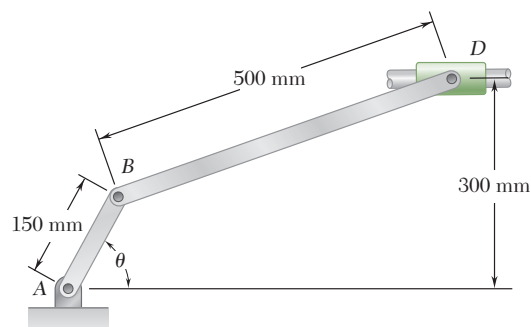



Figura P15.55 e P15.56

15.56 Sabendo que a manivela AB tem uma velocidade angular constante de 160 rpm no sentido anti-horário, determine a velocidade angular da barra BD e a velocidade do colar D quando (*a*) $\theta = 60°$.

15.57 No sistema biela-manivela de motor mostrado na figura, $l = 160$ mm e $b = 60$ mm. Sabendo que a manivela AB gira com uma velocidade angular constante de 1.000 rpm no sentido horário, determine a velocidade do pistão P e a velocidade angular da biela quando (*a*) $\theta = 0$, (*b*) $\theta = 90°$.

15.58 No sistema biela-manivela de motor mostrado na Fig. P15.57 e P15.58, $l = 160$ mm e $b = 60$ mm. Sabendo que a manivela AB gira com uma velocidade angular constante de 1.000 rpm no sentido horário, determine a velocidade do pistão P e a velocidade angular da biela quando $\theta = 60°$.

Figura P15.57 e P15.58

15.59 Uma cremalheira reta repousa sobre uma engrenagem de raio r e está presa ao bloco B como mostra a figura. Representando por ω_D a velocidade angular horária da engrenagem D e por θ o ângulo formado pela cremalheira e a horizontal, deduza expressões para a velocidade do bloco B e para a velocidade angular da cremalheira em termos de r, θ e ω_D.

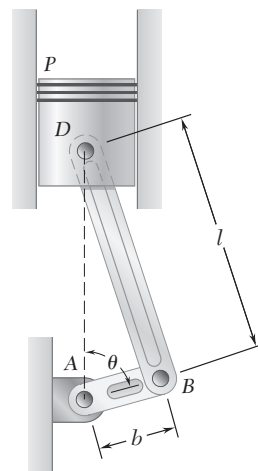
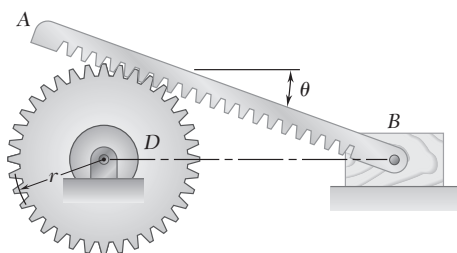



Figura P15.59, P15.60 e P15.61

15.60 Uma cremalheira reta repousa sobre uma engrenagem de raio $r = 75$ mm e está presa ao bloco B como mostra a figura. Sabendo que nesse instante a velocidade angular da engrenagem D é de 15 rpm no sentido anti-horário e $\theta = 20°$, determine (*a*) a velocidade do bloco B, (*b*) a velocidade angular da cremalheira.

15.61 Uma cremalheira reta repousa sobre uma engrenagem de raio $r = 60$ mm e está presa ao bloco B como mostra a figura. Sabendo que nesse instante a velocidade do bloco B é de 200 mm/s para a direita e $\theta = 25°$, determine (*a*) a velocidade angular da engrenagem D, (*b*) a velocidade angular da cremalheira.

15.62 No excêntrico mostrado na figura, um disco de 40 mm de raio gira em torno do eixo O, que está localizado a 10 mm do centro A do disco. A distância entre o centro A do disco e o pino em B é de 160 mm. Sabendo que a velocidade angular do disco é de 900 rpm no sentido horário, determine a velocidade do bloco quando $\theta = 30°$.

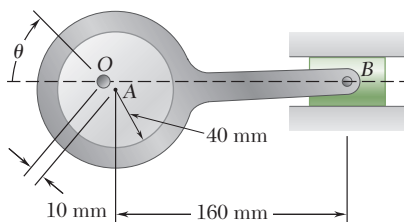



Figura *P15.62*

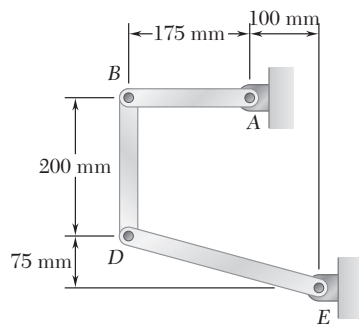



Figura P15.63

15.63 a 15.65 Nas posições mostradas nas figuras, a barra *AB* tem uma velocidade angular de 4 rad/s no sentido horário. Determine as velocidades angulares das barras *BD* e *DE*.

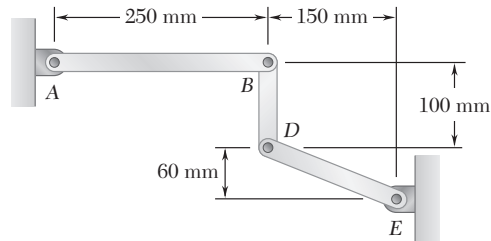



Figura P15.64

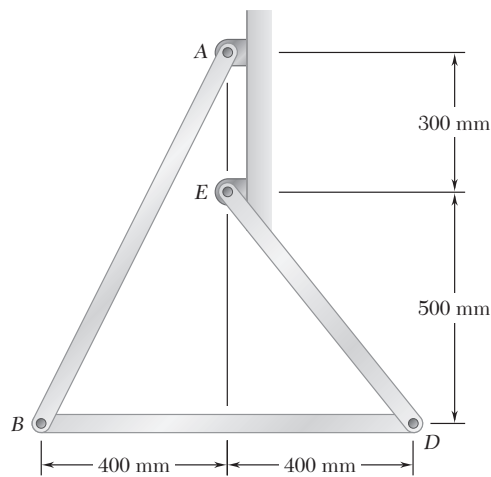



Figura P15.65

15.66 Na posição mostrada na figura, a barra *DE* tem uma velocidade angular de 10 rad/s no sentido horário. Sabendo que $h = 500$ mm, determine (*a*) a velocidade angular da barra *FBD*, (*b*) a velocidade do ponto *F*.

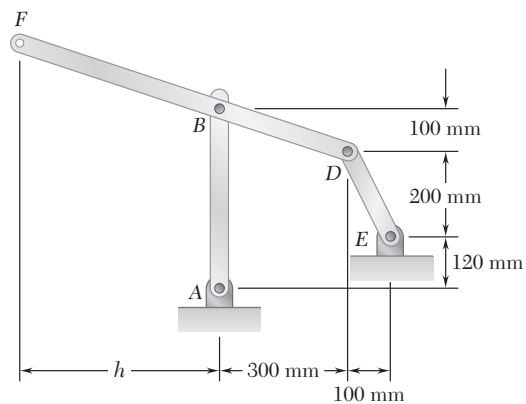



Figura P15.66 e P15.67

15.67 Na posição mostrada na figura, a barra DE tem uma velocidade angular de 10 rad/s no sentido horário. Determine (*a*) a distância h para que a velocidade do ponto F seja vertical, (*b*) a velocidade correspondente do ponto F.

15.68 Na posição mostrada na figura, a barra AB tem uma aceleração angular nula e uma velocidade angular de 20 rad/s no sentido anti-horário. Determine (*a*) a velocidade angular da barra BDH, (*b*) a velocidade do ponto G.

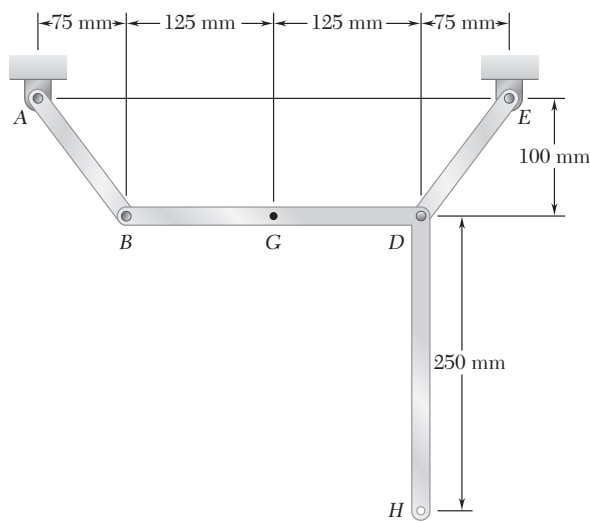



Figura P15.68 e P15.69

15.69 Na posição mostrada na figura, a barra AB tem uma aceleração angular nula e uma velocidade angular de 20 rad/s no sentido anti-horário. Determine (*a*) a velocidade angular da barra BDH, (*b*) a velocidade do ponto H.

15.70 Um automóvel desloca-se para a direita com uma velocidade constante de 80 km/h. Se o diâmetro da roda é de 500 mm, determine as velocidades dos pontos B, C, D e E sobre o aro da roda.

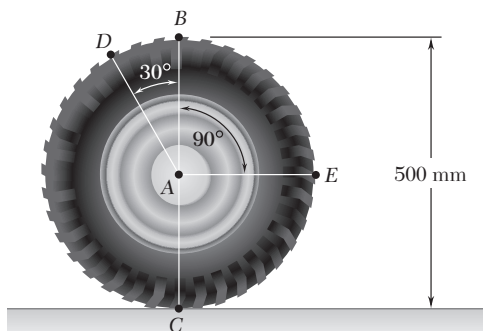



Figura P15.70

15.71 A roda de 80 mm de raio mostrada na figura rola para a esquerda com uma velocidade de 900 mm/s. Sabendo que a distância AD é 50 mm, determine a velocidade do cursor e a velocidade angular da barra AB quando (a) $\beta = 0$ e (b) $\beta = 90°$.

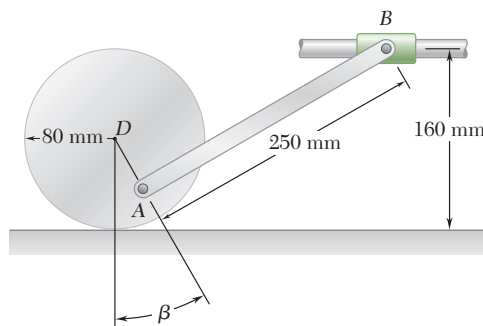



Figura P15.71

***15.72** Para as engrenagens mostradas na figura, deduza uma expressão para a velocidade angular ω_C para a engrenagem C e mostre que ω_C é independente do raio da engrenagem B. Considere que o ponto A é fixo e deduza a velocidade angular da barra ABC e a da engrenagem A por ω_{ABC} e ω_A respectivamente.

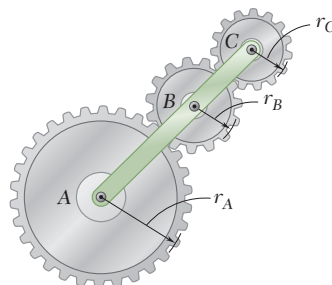



Figura P15.72

15.7 Centro instantâneo de rotação no movimento plano

Considere o movimento plano geral de uma placa. Nos propomos a mostrar que, em um dado instante qualquer, as velocidades das várias partículas da placa são as mesmas caso a placa estivesse girando em torno de um certo eixo perpendicular ao seu plano, denominado *eixo instantâneo de rotação.* Esse eixo intercepta o plano da placa em um ponto C, denominado *centro instantâneo de rotação* da placa.

Em primeiro lugar, recordemos que o movimento plano de uma placa sempre pode ser substituído por uma translação definida pelo movimento de um ponto de referência arbitrário A e por uma rotação em torno de A. No que concerne às velocidades, a translação é caracterizada pela velocidade $\mathbf{v}_A$ do ponto de referência A, e a rotação, pela velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da placa (que é independente da escolha de A). Logo, a velocidade $\mathbf{v}_A$ do ponto A e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da placa define completamente as velocidades de todas as outras partículas da placa (Fig. 15.18a). Vamos ad-

Foto 15.5 Se os pneus deste carro estão rolando sem deslizamento, o centro instantâneo de rotação do pneu é o ponto de contato entre a estrada e o pneu.

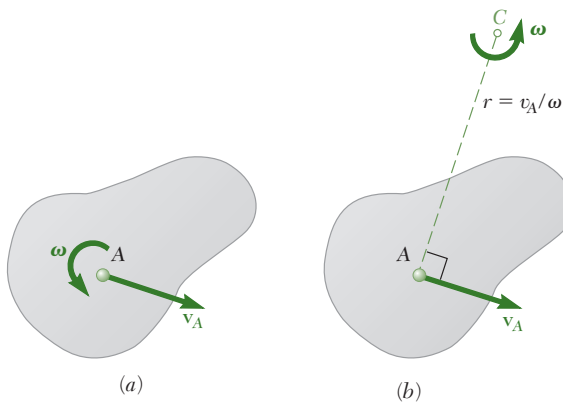



Figura 15.18

mitir agora que $\mathbf{v}_A$ e $\boldsymbol{\omega}$ são conhecidas e que ambas são diferentes de zero. (Se $\mathbf{v}_A = 0$, o ponto A é ele próprio o centro instantâneo de rotação, e se $\boldsymbol{\omega} = 0$, todas as partículas têm a mesma velocidade $\mathbf{v}_A$.) Essas velocidades poderiam ser obtidas deixando-se a placa girar com a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em torno de um ponto C localizado sobre a perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a uma distância $r = v_A/\omega$ de A, conforme mostrado na Fig. 15.18*b*. Verificamos que a velocidade de A seria perpendicular a AC e que sua intensidade seria $r\omega = (v_A/\omega)\omega = v_A$. Assim, as velocidades de todas as outras partículas da placa seriam as mesmas definidas originalmente. Portanto, *no que concerne às velocidades, a placa parece girar em torno do centro instantâneo* C no instante considerado.

A posição do centro instantâneo pode ser definida de duas outras maneiras. Se as direções das velocidades de duas partículas A e B da placa são conhecidas e se elas são diferentes, o centro instantâneo C é obtido traçando-se a perpendicular a $\mathbf{v}_A$ por A e a perpendicular a $\mathbf{v}_B$ por B e determinando o ponto em que essas duas linhas se interceptam (Fig. 15.19*a*). Se as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ de duas partículas A e B são perpendiculares à linha AB e se suas intensidades são conhecidas, o centro instantâneo pode ser encontrado interceptando-se a linha AB com a linha que une as extremidades dos vetores $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ (Fig. 15.19*b*). Note que se $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ fossem paralelas na Fig. 15.19*a* ou se $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ tivessem a mesma intensida-

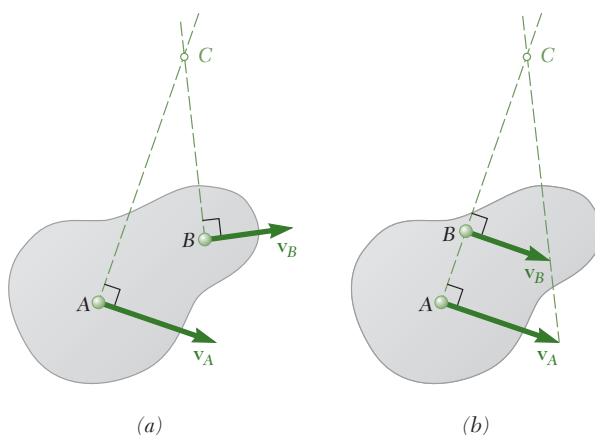



Figura 15.19

de na Fig. 15.19*b*, o centro instantâneo C estaria a uma distância infinita e ω seria zero; todos os pontos da placa teriam a mesma velocidade.

Para observar como o conceito de centro instantâneo de rotação pode ser aplicado, vamos considerar novamente a barra da Seção 15.6. Traçando a perpendicular a $\mathbf{v}_A$ a partir de A e a perpendicular a $\mathbf{v}_B$ por B (Fig.

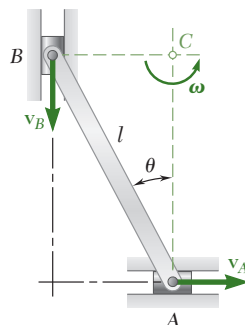



Figura 15.20

15.20), obtemos o centro instantâneo C. Então, no instante considerado, se a barra girasse em torno de C, as velocidades de todas as partículas da barra seriam as mesmas. Agora, se a intensidade v_A da velocidade de A é conhecida, a intensidade ω da velocidade angular da barra pode ser obtida escrevendo-se

$$\omega = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_A}{l \cos \theta}$$

A intensidade da velocidade de B pode então ser obtida escrevendo-se

$$v_B = (BC)\omega = l \operatorname{sen}\theta \frac{v_A}{l \cos \theta} = v_A \operatorname{tg} \theta$$

Note que apenas velocidades *absolutas* estão envolvidas no cálculo.

O centro instantâneo de uma placa no movimento plano pode estar localizado sobre a placa ou fora dela. Se estiver localizado sobre a placa, a partícula C coincidente com o centro instantâneo em um dado instante t deverá ter velocidade nula naquele instante. No entanto, deve-se observar que o centro instantâneo de rotação é válido apenas em um dado instante. Assim, a partícula C da placa coincidente com o centro instantâneo no tempo t em geral não coincidirá com o centro instantâneo no tempo $t + \Delta t$; embora sua velocidade seja zero no tempo t, ela provavelmente será diferente de zero no tempo $t + \Delta t$. Isso significa que, em geral, a partícula C *não possui aceleração nula* e, portanto, as *acelerações* das várias partículas da placa *não podem* ser determinadas como se a placa estivesse girando em torno de C.

À medida que o movimento da placa continua, o centro instantâneo desloca-se no espaço. Além disso, a posição do centro instantâneo sobre a placa também varia. Logo, o centro instantâneo descreve uma curva no espaço, denominada *centrodo espacial,* e uma outra curva sobre a placa, denominada *centrodo corporal* (Fig. 15.21). Pode-se demonstrar que, a qualquer instante, essas duas curvas são tangentes em C e que, à medida que a placa se desloca, o centrodo corporal parece *rolar* sobre o centrodo espacial.

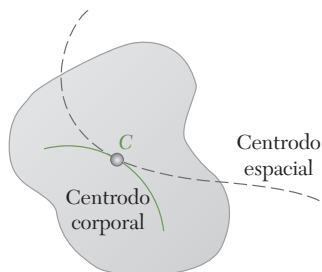
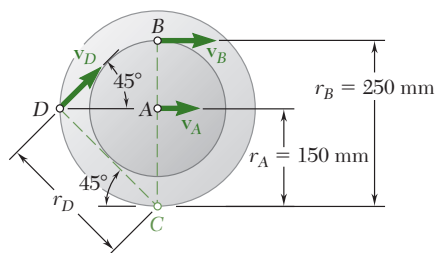



Figura 15.21

PROBLEMA RESOLVIDO 15.4

Solucione o Problema Resolvido 15.2 usando o método do centro instantâneo de rotação.

SOLUÇÃO

a. Velocidade angular da engrenagem. Uma vez que a engrenagem rola sobre a cremalheira inferior fixa, o ponto de contato C da engrenagem com a cremalheira não tem velocidade; logo, o ponto C é o centro instantâneo de rotação. Escrevemos

$$v_A = r_A\boldsymbol{\omega} \qquad 1{,}2 \text{ m/s} = (0{,}150 \text{ m})\boldsymbol{\omega}$$

$$\boldsymbol{\omega} = 8 \text{ rad/s} \circlearrowright \quad ◀$$

b. Velocidades. No que concerne às velocidades, todos os pontos da engrenagem parecem girar em torno do centro instantâneo de rotação.

Velocidade da cremalheira superior. Relembrando que $v_R = v_B$, escrevemos

$$v_R = v_B = r_B\boldsymbol{\omega} \qquad v_R = (0{,}250 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 2 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_R = 2 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$

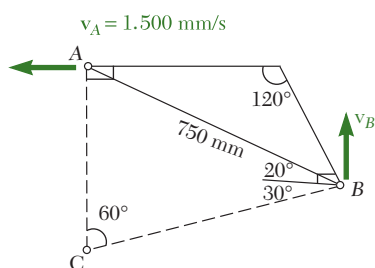
Velocidade do ponto *D*. Como $r_D = (0{,}150 \text{ m})\sqrt{2} = 0{,}2121$ m, escrevemos

$$v_D = r_D\boldsymbol{\omega} \qquad v_D = (0{,}2121 \text{ m})(8 \text{ rad/s}) = 1{,}697 \text{ m/s}$$

$$\mathbf{v}_D = 1{,}697 \text{ m/s} \measuredangle 45° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.5

Resolva o Problema Resolvido 15.3 usando o método do centro instantâneo de rotação.

SOLUÇÃO

A geometria da barra AB é conhecida e a velocidade de A é 1.500 mm/s para a esquerda. Para o corpo rígido AB, a direção da velocidade de A e a velocidade de B são conhecidos. Assim desenhamos perpendiculares a essas direções que interceptam em C, o centro instantâneo. Uma vez que a magnitude de VA é também conhecida, podemos encontrar w uma vez que o corpo rígido AB nesse instante move-se de maneira circular em torno de C.
A partir da geometria dada observamos que $\angle ACB = 60°$, e $\angle ABC = 20° + 30° = 50°$. Assim $\angle BAC = 70°$. Usando a lei dos senos para $\Delta\, ABC$,

$$\frac{AC}{\sin 50°} = \frac{750}{\sin 60°} = \frac{BC}{\sin 70°}$$

$$AC = 663{,}4 \text{ mm}$$

$$BC = 813{,}8 \text{ mm}$$

$$\mathbf{V}_A = AC\left(\omega_{AB}\right) \Rightarrow \omega_{AB} = \frac{\mathbf{V}_A}{AC} = \frac{1500}{663{,}4 \text{ mm}} = 2{,}26 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$

$$V_B = BC\left(\omega_{AB}\right) = \left(813{,}8 \text{ mm}\right)\left(2{,}26 \text{ rad/s}\right) = 1.839 \text{ mm/s}$$

$$= 1{,}84 \text{ m/s } 60° \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, introduzimos o *centro instantâneo de rotação* no movimento plano. Esse conceito nos fornece uma alternativa para resolver problemas envolvendo as *velocidades* dos vários pontos de um corpo em movimento plano.

Como seu nome sugere, o *centro instantâneo de rotação* é o ponto em torno do qual pode-se considerar que um corpo esteja girando em um dado instante ao determinar as velocidades dos pontos do corpo naquele instante.

A. Para determinar o centro instantâneo de rotação de um corpo em movimento plano, você deve usar um dos seguintes procedimentos.

1. Se a velocidade $\mathbf{v}_A$ de um ponto *A* e a velocidade angular ω do corpo são ambas conhecidas (Fig. 15.18):

a. Desenhe um esboço do corpo mostrando o ponto *A*, sua velocidade $\mathbf{v}_A$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo.

b. Partindo de *A*, trace uma linha perpendicular a $\mathbf{v}_A$ do lado de $\mathbf{v}_A$ pelo qual a velocidade é vista como tendo *o mesmo sentido de* $\boldsymbol{\omega}$.

c. Localize o centro instantâneo *C* sobre essa linha, a uma distância $r = v_A/\omega$ do ponto *A*.

2. Se as direções das velocidades de dois pontos *A* e *B* são conhecidas e são diferentes (Fig. 15.19*a*):

a. Desenhe um esboço do corpo mostrando os pontos *A* e *B* e suas velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$.

b. Partindo de *A* e *B*, trace linhas perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, respectivamente. O centro instantâneo *C* é localizado no ponto em que as duas linhas se interceptam.

c. Se a velocidade de um dos pontos é conhecida, você pode determinar a velocidade angular do corpo. Por exemplo, se você conhece $\boldsymbol{v}_A$, pode escrever $\omega = v_A/AC$, sendo *AC* a distância do ponto *A* ao centro instantâneo *C*.

3. Se as velocidades de dois pontos *A* e *B* são conhecidas e perpendiculares à linha *AB* (Fig. 15.19*b*):

a. Desenhe um esboço do corpo mostrando os pontos *A* e *B* com suas velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ *representadas em escala.*

b. Desenhe uma linha pelos pontos *A* e *B* e uma outra linha pelas pontas dos vetores $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$. O centro instantâneo *C* fica no ponto onde as duas linhas se interceptam.

c. A velocidade angular do corpo é obtida dividindo-se $\mathbf{v}_A$ por AC ou $\mathbf{v}_B$ por BC.

d. Se as velocidades $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ têm a mesma intensidade, as duas linhas traçadas na parte *b* não se interceptam; o centro instantâneo C está a uma distância infinita. A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é nula e *o corpo está em translação.*

B. Uma vez que você tenha determinado o centro instantâneo e a velocidade angular de um corpo, poderá determinar a velocidade $\mathbf{v}_P$ de qualquer ponto P do corpo da seguinte maneira.

1. Desenhe um esboço do corpo mostrando o ponto P, o centro instantâneo de rotação C e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

2. Trace uma linha de *P* ao centro instantâneo *C* e meça ou calcule a distância de P a C.

3. A velocidade $\mathbf{v}_P$ é um vetor perpendicular à linha *PC*, de mesmo sentido que $\boldsymbol{\omega}$, e de intensidade $v_P = (PC)\omega$.

Finalmente, lembre-se de que o centro instantâneo de rotação pode ser usado *apenas* para determinar velocidades. *Ele não pode ser usado para determinar acelerações.*

PROBLEMAS

15.73 A viga *AE* de 2,5 m está sendo baixada por dois guindastes. No instante mostrado na figura, sabe-se que a velocidade do ponto *D* é de 600 mm/s para baixo e que a velocidade do ponto *E* é de 900 mm/s para baixo. Determine (*a*) o centro instantâneo de rotação da viga, (*b*) a velocidade do ponto *A*.

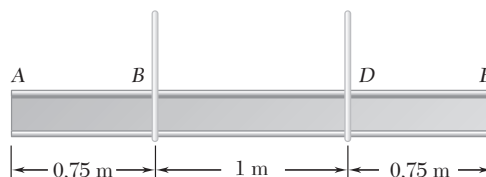



Figura P15.74

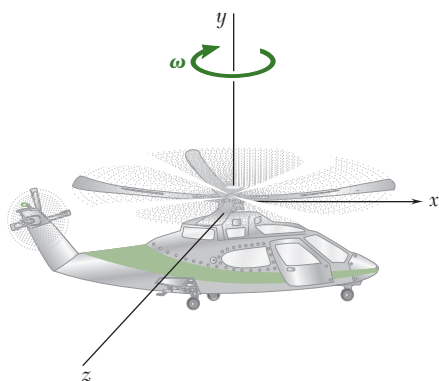



Figura P15.73

15.74 Um helicóptero desloca-se horizontalmente na direção *x* a uma velocidade de 200 km/h. Sabendo que as lâminas principais giram no sentido horário com uma velocidade angular de 180 rpm, determine o eixo instantâneo de rotação das lâminas principais.

15.75 O carretel de fita e sua estrutura de apoio são puxados para cima com uma velocidade v_A = 750 mm/s. Sabendo que o carretel de 80 mm de raio tem uma velocidade angular de 15 rad/s no sentido horário e que, no instante mostrado na figura, a espessura total da fita no carretel é de 20 mm, determine (*a*) o centro instantâneo de rotação do carretel, (*b*) as velocidades dos pontos *B* e *D*.

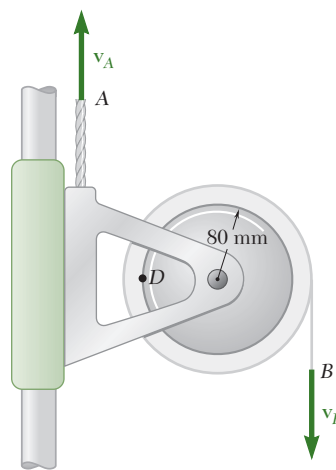



Figura P15.75 e P15.76

15.76 O carretel de fita e sua estrutura de apoio são puxados para cima com uma velocidade v_A = 100 mm/s. Sabendo que a extremidade *B* da fita é puxada para baixo com velocidade de 300 mm/s e que, no instante mostrado na figura, a espessura total da fita no carretel é de 20 mm, determine (*a*) o centro instantâneo de rotação do carretel, (*b*) a velocidade do ponto *D* do carretel.

15.77 Resolva o Problema Resolvido 15.2, considerando que a cremalheira inferior não é fixa, mas se desloca para a esquerda com velocidade de 0,6 m/s.

15.78 Uma polia dupla está presa a um bloco deslizante por um pino em A. A polia interna, de 30 mm de raio, está rigidamente presa à polia externa, de raio de 60 mm. Sabendo que cada uma das cordas é puxada com velocidade constante do modo mostrado na figura, determine (a) o centro instantâneo de rotação da polia dupla, (b) a velocidade do bloco deslizante e (c) o número de milímetros de corda enrolada ou desenrolada sobre cada polia por segundo.

Figura P15.78

15.79 Resolva o Problema 15.78, admitindo que a corda E seja puxada para cima a uma velocidade de 160 mm/s e que a corda F seja puxada para baixo a uma velocidade de 200 mm/s.

15.80 e 15.81 Um tambor de 75 mm de raio está rigidamente preso a um tambor de 125 mm de raio como ilustra a figura. Um dos tambores rola sem deslizar sobre a superfície mostrada e uma corda é enrolada ao redor do outro tambor. Sabendo que a extremidade E da corda é puxada para a esquerda com uma velocidade de 150 mm/s, determine (a) a velocidade angular dos tambores, (b) a velocidade do centro dos tambores e (c) o comprimento de corda enrolada ou desenrolada por segundo.

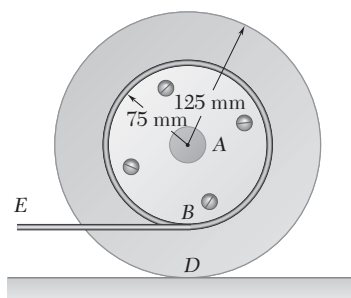



Figura *P15.80*

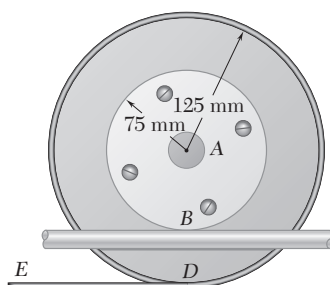
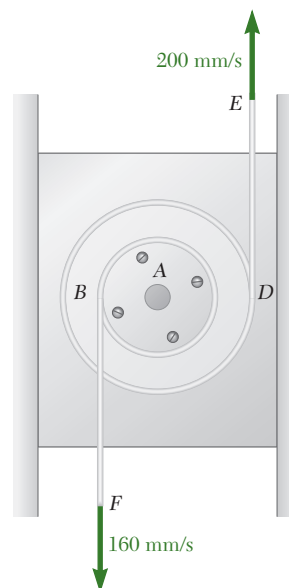



Figura *P15.81*

15.82 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a velocidade angular da barra AB é de 15 rad/s no sentido horário, determine (a) a velocidade angular da barra BD, (b) a velocidade do ponto médio da barra BD.

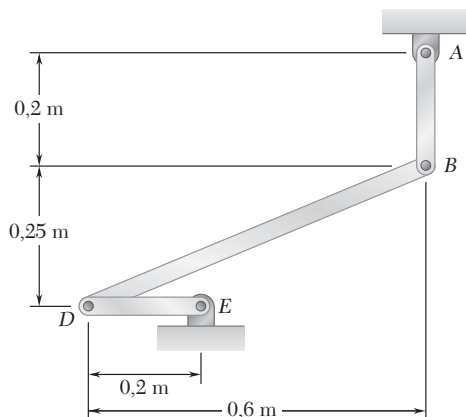



Figura P15.82 e P15.83

15.83 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a velocidade do ponto D é 2,4 m/s para cima, determine (a) a velocidade angular da barra AB, (b) a velocidade do ponto médio da barra BD.

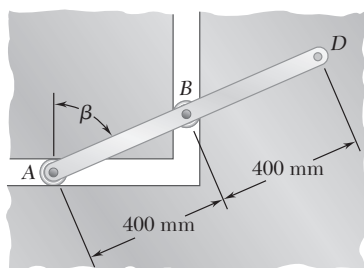



Figura P15.84

15.84 A barra ABD é guiada por roletes em A e B que rolam em uma pista horizontal e uma vertical. Sabendo que, no instante mostrado na figura, $\beta = 60°$ e a velocidade do rolete B é de 1.000 mm/s para baixo, determine (*a*) a velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade do ponto D.

15.85 Uma porta basculante é guiada por roletes em A e B que rolam em uma pista horizontal e uma vertical. Sabendo que, quando $\theta = 40°$, a velocidade do rolete B é de 0,5 m/s para cima, determine (*a*) a velocidade angular da porta, (*b*) a velocidade da extremidade D da porta.

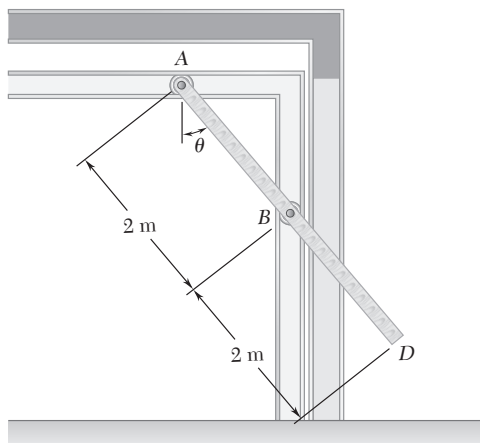



Figura P15.85

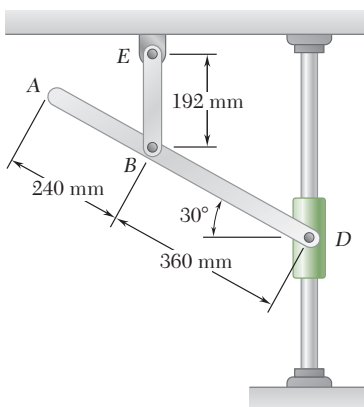



Figura P15.86 e P15.87

15.86 Sabendo que no instante mostrado na figura a velocidade angular da barra BE é de 4 rad/s no sentido anti-horário, determine (*a*) a velocidade angular da barra AD, (*b*) a velocidade do colar D, (*c*) a velocidade do ponto A.

15.87 Sabendo que no instante mostrado na figura a velocidade do colar D é de 1,6 m/s para cima, determine (*a*) a velocidade angular da barra AD, (*b*) a velocidade do ponto B, (*c*) a velocidade do ponto A.

15.88 A barra AB desliza livremente ao longo do chão e no plano inclinado. Deduza por $\mathbf{v}_A$ a velocidade do ponto A, obtenha uma expressão para (*a*) velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade da extremidade B.

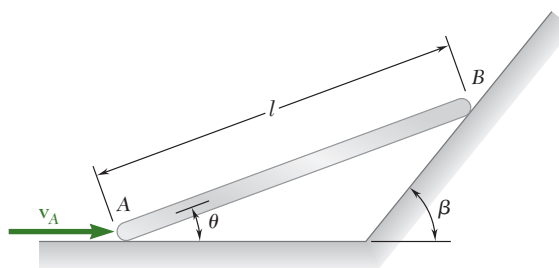



Figura P15.88, P15.89

15.89 A barra AB desliza livremente ao longo do chão e no plano inclinado. Sabendo que $\theta = 20°$, $\beta = 50°$, $l = 0{,}6$ m, $v_A = 3$ m/s, determine (*a*) velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade da extremidade B.

15.90 O braço ABD está conectado por pinos ao colar em B e à manivela DE. Sabendo que a velocidade do colar B é de 400 mm/s para cima, determine (*a*) a velocidade angular do braço ABD e (*b*) a velocidade do ponto A.

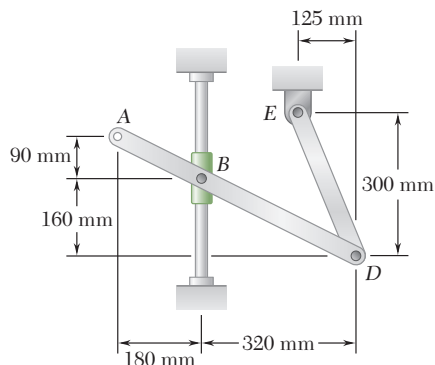
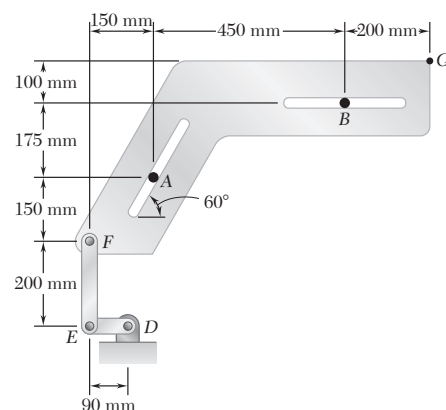



Figura P15.90 e *P15.91*

15.91 O braço ABD está conectado por pinos ao colar em B e à manivela DE. Sabendo que a velocidade angular da manivela DE é de 1,2 rad/s no sentido anti-horário, determine (*a*) a velocidade angular do braço ABD, (*b*) a velocidade do ponto A.

Figura P15.92

15.92 Dois rasgos foram abertos na placa FG e a placa foi posicionada de tal forma que os rasgos são ajustados a dois pinos fixos A e B. Sabendo que no instante mostrado na figura a velocidade angular da manivela DE é de 6 rad/s no sentido horário, determine (*a*) a velocidade do ponto F, (*b*) a velocidade do ponto G.

15.93 Duas barras idênticas ABF e DBE estão conectadas por um pino em B. Sabendo que, no instante mostrado na figura, a velocidade no ponto D é de 250 mm/s para cima, determine a velocidade (*a*) do ponto E, (*b*) do ponto F.

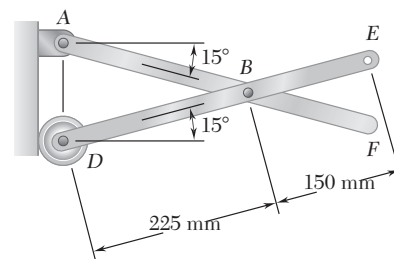



Figura P15.93

15.94 A barra AB é fixada ao colar em A e é equipada com uma pequena roda em B. Sabendo que quando $\theta = 60°$ a velocidade do colar é 250 mm/s para cima, determine (*a*) a velocidade angular da barra AB, (*b*) a velocidade do ponto B.

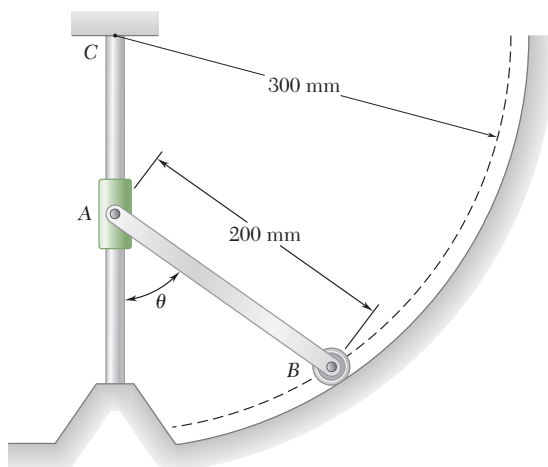



Figura *P15.94*

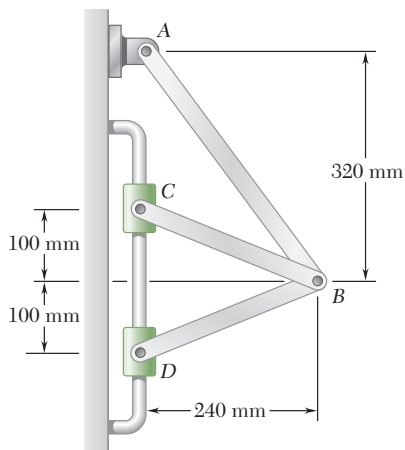



Figura P15.95

15.95 Dois colares C e D movem ao longo da barra vertical mostrada na figura. Sabendo que a velocidade do colar C é 660 mm/s para baixo, determine (a) a velocidade do colar D, (b) a velocidade angular na barra AB.

15.96 Duas barras de 500 mm estão conectados pelo pino D mostrado na figura. Sabendo que B se desloca para a esquerda com uma velocidade constante de 360 mm/s, determine, no instante mostrado (a) a velocidade angular de cada barra, (b) a velocidade de E.

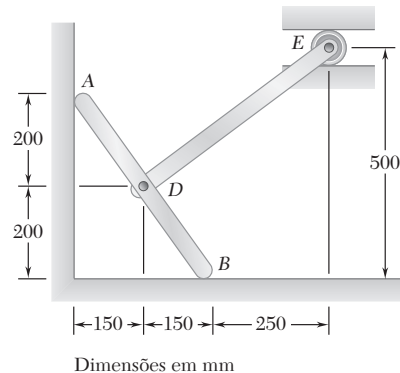



Figura P15.96

15.97 Duas barras AB e DE estão conectadas como mostra a figura. Sabendo que o ponto D desloca-se para a esquerda a uma velocidade de 1 m/s, determine, no instante mostrado, (a) a velocidade angular de cada barra, (b) a velocidade do ponto A.

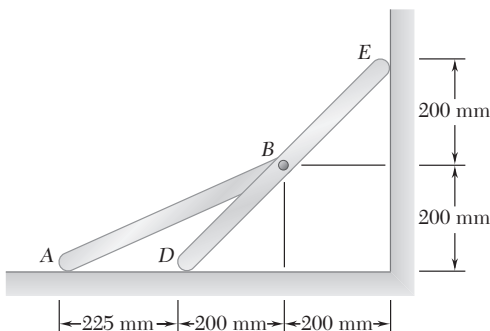



Figura P15.97

15.98 Duas barras AB e DE estão conectadas como mostra a figura. Sabendo que o ponto B desloca-se para baixo com uma velocidade de 1,5 m/s, determine, no instante mostrado, (a) a velocidade angular de cada barra e (b) a velocidade do ponto E.

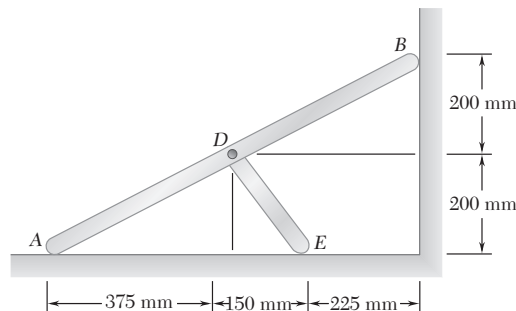



Figura P15.98

15.99 Descreva o centrodo espacial e o centrodo corporal da barra ABD do Problema 15.84. (*Dica:* o centrodo corporal não precisa estar sobre uma parte física da barra.)

15.100 Descreva o centrodo espacial e o centrodo corporal da engrenagem do Problema Resolvido 15.2 à medida que a engrenagem rola sobre a cremalheira horizontal fixa.

15.101 Usando o método da Seção 15.7, resolva o Problema 15.62.

15.102 Usando o método da Seção 15.7, resolva o Problema 15.64.

15.103 Usando o método da Seção 15.7, resolva o Problema 15.65.

15.104 Usando o método da Seção 15.7, resolva o Problema 15.70.

15.8 Aceleração absoluta e aceleração relativa no movimento plano

Foto 15.6 A engrenagem central gira em torno de um eixo fixo e está conectada por pinos a três barras que estão em movimento plano geral.

Vimos na Seção 15.5 que qualquer movimento plano pode ser substituído por uma translação definida pelo movimento de um ponto A de referência arbitrário e por uma rotação simultânea em torno de A. Essa propriedade foi usada na Seção 15.6 para determinar a velocidade dos vários pontos de uma placa móvel. A mesma propriedade será agora usada para determinar a aceleração dos pontos da placa.

Primeiro, recordemos que a aceleração absoluta $\mathbf{a}_B$ de uma partícula da placa pode ser obtida a partir da fórmula da aceleração relativa deduzida na Seção 11.12,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.21}$$

onde o segundo membro representa uma soma vetorial. A aceleração $\mathbf{a}_A$ corresponde à translação da placa junto com A, enquanto a aceleração relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ está associada à rotação da placa em torno de A e é medida em relação aos eixos centrados em A e de orientação fixa. Recordemos da Seção 15.3 que a aceleração relativa $\mathbf{a}_{B/A}$ pode ser decomposta em dois componentes, um *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ perpendicular à linha AB e um *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ orientado para A (Fig. 15.22). Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor de posição de B relativo a A e, respectivamente, por $\omega\mathbf{k}$ e $\alpha\mathbf{k}$ a velocidade angular e a aceleração angular da placa em relação aos eixos de orientação fixa, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_{B/A})_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad & (a_{B/A})_t &= r\alpha \\ (\mathbf{a}_{B/A})_n &= -\omega^2\mathbf{r}_{B/A} \qquad & (a_{B/A})_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.22}$$

onde r é a distância de A a B. Substituindo na Eq. (15.21) as expressões obtidas para os componentes tangencial e normal de $\mathbf{a}_{B/A}$, podemos escrever também

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A} \tag{15.21'}$$

Figura 15.22

Figura 15.23

Figura 15.24

Como exemplo, vamos considerar novamente a barra *AB*, cujas extremidades deslizam, respectivamente, ao longo de uma pista horizontal e de uma vertical (Fig. 15.23). Admitindo que a velocidade e a aceleração $\mathbf{v}_A$ de *A* são conhecidas, nos propomos a determinar a aceleração $\mathbf{a}_B$ de *B* e a aceleração angular α da barra. Escolhendo *A* como um ponto de referência, estabelecemos que o movimento dado é equivalente a uma translação junto com *A* e a uma rotação em torno de *A*. A aceleração absoluta de *B* deve ser igual à soma

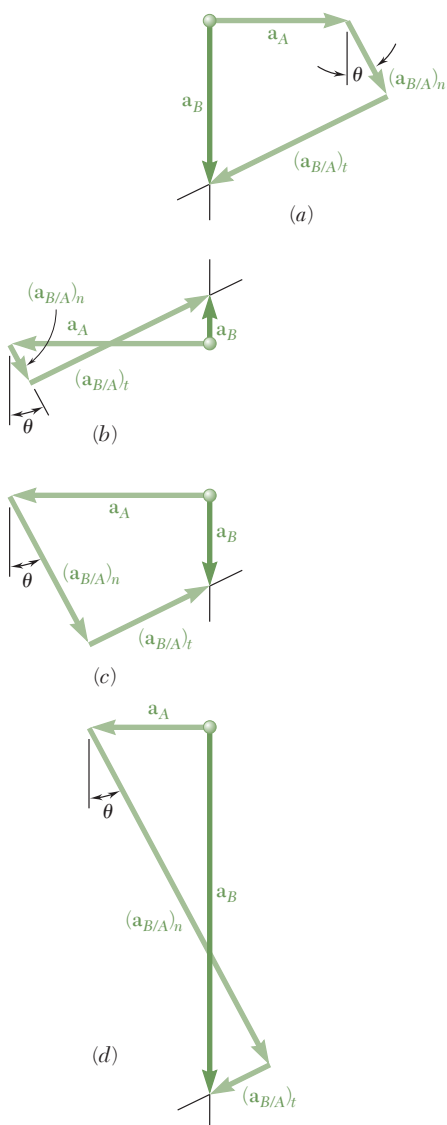
$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B &= \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \\ &= \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t \end{aligned} \tag{15.23}$$

onde $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ tem intensidade $l\omega^2$ e é *orientada para A*, enquanto $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ tem intensidade $l\alpha$ e é perpendicular a *AB*. Os estudantes devem notar que não há um meio de afirmar se o componente tangencial $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ está orientado para a esquerda ou para a direita e que, portanto, ambas as possíveis orientações para esse componente estão indicadas na Fig. 15.23. De modo análogo, ambos os sentidos possíveis para $\mathbf{a}_B$ estão indicados, pois não se sabe se o ponto *B* está acelerado para cima ou para baixo.

A Eq. (15.23) está representada geometricamente na Fig. 15.24. Quatro polígonos vetoriais diferentes podem ser obtidos, dependendo do sentido de $\mathbf{a}_A$ e da intensidade relativa de a_A e $(a_{B/A})_n$. Se tivermos de determinar a_B e α a partir de um desses diagramas, devemos conhecer não apenas a_A e θ, mas também ω. Logo, a velocidade angular da barra deve ser determinada separadamente por um dos métodos indicados nas Seções 15.6 e 15.7. Os valores de a_B e α podem então ser obtidos, considerando-se sucessivamente os componentes em *x* e em *y* dos vetores mostrados na Fig. 15.24. No caso do polígono *a*, por exemplo, escrevemos

$$\xrightarrow{+} \text{componentes de } x: \qquad 0 = a_A + l\omega^2 \operatorname{sen}\theta - l\alpha\cos\theta$$

$$+\uparrow \text{componentes de } y: \quad -a_B = -l\omega^2\cos\theta - l\alpha \operatorname{sen}\theta$$

e resolvemos para a_B e α. As duas incógnitas também podem ser obtidas por medição direta sobre o polígono vetorial. Nesse caso, deve-se ter o cuidado de desenhar primeiro os vetores conhecidos $\mathbf{a}_A$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_n$.

Fica bastante evidente que a determinação de acelerações é consideravelmente mais intrincada que a determinação de velocidades. Ainda no exemplo aqui considerado, as extremidades A e B da barra estavam deslocando-se ao longo de pistas retas e os diagramas desenhados eram relativamente simples. Se A e B estivessem movendo-se ao longo de pistas curvas, teria sido necessário decompor as acelerações $\mathbf{a}_A$ e $\mathbf{a}_B$ em componentes normal e tangencial, e a solução do problema teria envolvido seis vetores diferentes.

Quando um mecanismo consiste em diversas partes móveis conectadas por pinos, a análise do mecanismo pode ser efetuada considerando-se cada parte como um corpo rígido, atentando para o fato de que os pontos onde duas partes estão conectadas devem ter a mesma velocidade absoluta (ver Problema Resolvido 15.7). No caso de engrenamentos, os componentes tangenciais da aceleração dos dentes em contato são iguais, mas seus componentes normais são diferentes.

*15.9 Análise do movimento plano em termos de um parâmetro

No caso de certos mecanismos, é possível expressar as coordenadas x e y de todos os pontos significativos do mecanismo por meio de expressões analíticas simples contendo um único parâmetro. Em casos assim, às vezes é vantajoso determinar a velocidade absoluta e a aceleração absoluta dos vários pontos do mecanismo diretamente, pois os componentes da velocidade e da aceleração de um dado ponto podem ser obtidos por diferenciação das coordenadas x e y daquele ponto.

Figura 15.25

Vamos considerar outra vez a barra AB, cujas extremidades deslizam, respectivamente, em uma pista horizontal e em uma vertical (Fig. 15.25). As coordenadas x_A e y_B das extremidades da barra podem ser expressas em termos do ângulo θ que a barra faz com a vertical:

$$x_A + l \text{ sen } \theta \qquad y_B = l \cos \theta \tag{15.24}$$

Diferenciando as Eqs. (15.24) duas vezes em relação a t, escrevemos

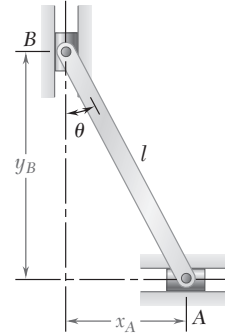
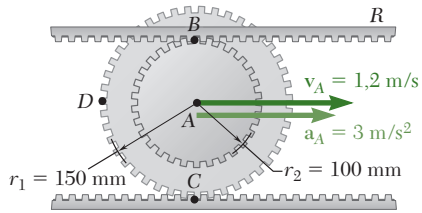
$$v_A = \dot{x}_A = l\dot{\theta} \cos \theta$$
$$a_A = \ddot{x}_A = -l\dot{\theta}^2 \text{ sen } \theta + l\ddot{\theta} \cos \theta$$

$$v_B = \dot{y}_B = -l\dot{\theta} \text{ sen } \theta$$
$$a_B = \ddot{y}_B = -l\dot{\theta}^2 \cos \theta - l\ddot{\theta} \text{ sen } \theta$$

Relembrando que $\dot{\theta} = \omega$ e $\ddot{\theta} = \alpha$, obtemos

$$v_A = l\omega \cos \theta \qquad v_B = -l\omega \text{ sen } \theta \tag{15.25}$$

$$a_A = -l\omega^2 \text{ sen } \theta + l\,\alpha \cos \theta \qquad a_B = -l\omega^2 \cos \theta - l\,\alpha \text{ sen } \theta \tag{15.26}$$

Observamos que um sinal positivo para v_A ou a_A indica que a velocidade $\mathbf{v}_A$ ou a aceleração $\mathbf{a}_A$ está orientada para a direita; um sinal positivo para v_B ou a_B indica que $\mathbf{v}_B$ ou $\mathbf{a}_B$ está orientada para cima. As Eqs. (15.25) podem ser usadas, por exemplo, para determinar v_B e ω quando v_A e θ são conhecidos. Substituindo ω na Eq. (15.26), podemos determinar a_B e α se a_A é conhecido.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.6

O centro da engrenagem dupla do Problema Resolvido 15.2 tem uma velocidade de 1,2 m/s para a direita e uma aceleração de 3 m/s^2 para a direita. Relembrando que a cremalheira inferior é fixa, determine (*a*) a aceleração angular da engrenagem e (*b*) a aceleração dos pontos *B*, *C* e *D* da engrenagem.

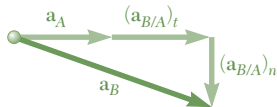
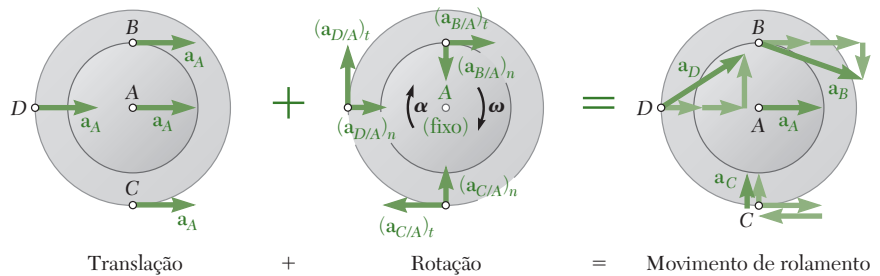
SOLUÇÃO

a. Aceleração angular da engrenagem. No Problema Resolvido 15.2, verificamos que $x_A = -r_1\theta$ e $v_A = -r_1\omega$. Diferenciando esta última em relação ao tempo, obtemos $a_A = -r_1\alpha$.

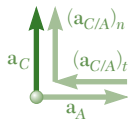
$$v_A = -r_1\omega \qquad 1{,}2 \text{ m/s} = -(0{,}150 \text{ m})\omega \qquad \omega = -8 \text{ rad/s}$$

$$a_A = -r_1\alpha \qquad 3 \text{ m/s}^2 = -(0{,}150 \text{ m})\alpha \qquad \alpha = -20 \text{ rad/s}^2$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = -(20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$

b. Acelerações. O movimento de rolamento da engrenagem é decomposto em uma translação junto com *A* e em uma rotação em torno de *A*.

Aceleração do ponto *B*. Somando vetorialmente as acelerações correspondentes à translação e à rotação, obtemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n =$$
$$= \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (0{,}100 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(0{,}100 \text{ m})\mathbf{j}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (2 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (6{,}40 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$$

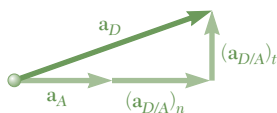
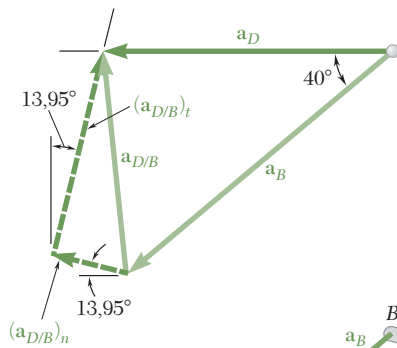
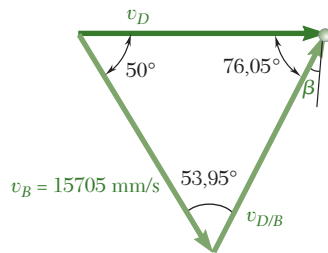
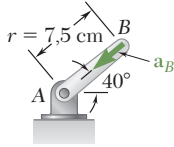
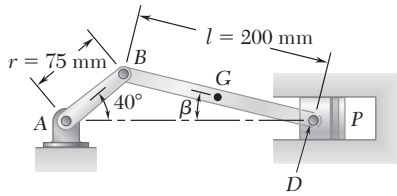
$$\mathbf{a}_B = 8{,}12 \text{ m/s}^2 \measuredangle 52{,}0° \quad ◀$$

Aceleração do ponto C

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{C/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega^2\mathbf{r}_{C/A}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0{,}150 \text{ m})\mathbf{j} - (8 \text{ rad/s})^2(-0{,}150 \text{ m})\mathbf{j}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (9{,}60 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_C = 9{,}60 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

Aceleração do ponto *D*

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{D/A} = \mathbf{a}_A + \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/A} - \omega^2\mathbf{r}_{D/A}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \times (-0{,}150 \text{ m})\mathbf{i} - (8 \text{ rad/s})^2(-0{,}150 \text{ m})\mathbf{i}$$
$$= (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (3 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (9{,}60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_D = 12{,}95 \text{ m/s}^2 \measuredangle 13{,}4° \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.7

A manivela AB do sistema biela-manivela de motor do Problema 15.40 tem uma velocidade angular constante no sentido horário de 2.000 rpm. Para a posição mostrada da manivela, determine a aceleração angular da barra de conexão BD e a aceleração do ponto D.

SOLUÇÃO

Primeiro determinamos o ângulo β e ω_{AB}. Usando a lei dos senos

$$\frac{200}{\sin 40°} = \frac{75\text{mm}}{\sin\beta} \Rightarrow \beta = 13{,}95°$$

$$\omega_{AB} = \left(2000\frac{\text{rev}}{\text{min}}\right)\left(\frac{1\,\text{min}}{60\text{ s}}\right)\left(\frac{2\pi\text{rad}}{1\text{ rev}}\right) = 209{,}4\text{ rad/s}$$

$$v_B = (AB)\omega_{AB} = (75\text{ mm})(209{,}4\text{ rad/s}) = 15705\text{ mm/s} = 15{,}705\text{ m/s}$$

$$v_B = 15{,}705\text{ m/s} \measuredangle 50°$$

Observamos que v deve ser horizontal.
Expressando $v_D = v_B = v_{D/B}$

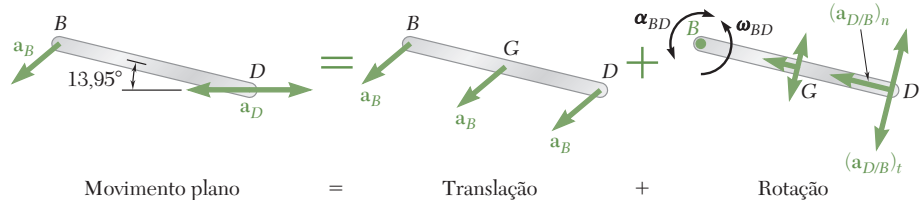
$$\frac{v_D}{\sin 53{,}95°} = \frac{v_{D/B}}{\sin 50°} = \frac{15705\text{ mm/s}}{\sin 76{,}05°} \Rightarrow v_{D/B} = 12400\text{ mm/s}$$

$$v_{D/B} = l\omega_{BD} \Rightarrow \omega_{BD} = \frac{v_{D/B}}{l} = \frac{12400}{200} = 62{,}0\text{ rad/s}$$

Movimento da manivela AB. Uma vez que a manivela gira em torno de A com uma constante ω_{AB} temos $\alpha_{AB} = 0$. A aceleração de B é assim em direção a A e tem uma magnitude

$$a_B = r\omega_{AB}^2 = \left(\frac{75}{1000}\text{ m}\right)(209{,}4\text{ rad/s})^2 = 3289\text{ m/s}^2$$

$$\mathbf{a}_B = 3289\text{ m/s}^2 \measuredangle 40°$$

Movimento da barra de conexão BD. $\omega_{BD} = 62{,}0\text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \beta = 13{,}95°$

O movimento de BD é decomposto em uma translação com B e uma rotação em torno de B. A aceleração relativa $\mathbf{a}_{D/B}$ é decomposta em componentes normais e tangenciais.

$$(a_{D/B})_n = (BD)\omega_{BD}^2 = \left(\frac{200}{1000}\text{m}\right)(62{,}0\text{ rad/s})^2 = 768{,}8\text{m/s}^2 \quad (\mathbf{a}_{D/B})_n = 768{,}8\text{m/s}^2 \measuredangle 13{,}95°$$

$$(a_{D/B})_t = (BD)\alpha_{BD} = \left(\frac{200}{1000}\text{m}\right)\alpha_{BD} = 0{,}2\,\alpha_{BD} \quad (\mathbf{a}_{D/B})_t = 0{,}2\,\alpha_{BD} \measuredangle 76{,}05°$$

Ainda que $(\mathbf{a}_{D/B})_t$ seja perpendicular a BD, seu sentido não é conhecido.

Notando que a aceleração $\mathbf{a}_D$ deve ser horizontal, escrevemos

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{D/B})_n + (\mathbf{a}_{D/B})_t$$

$$[a_D \leftrightarrow] = [3289 \measuredangle 40°] + [768{,}8 \measuredangle 13{,}95°] + [0{,}2\alpha_{BD} \measuredangle 76{,}05°]$$

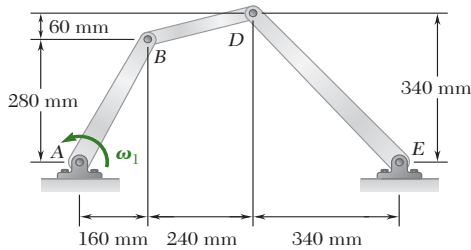
Igualando os componentes x e y obtemos as seguintes equações escalares:

$\overset{+}{\rightarrow} x$ componentes: $-a_D = -3.289\cos 40° - 768{,}8\cos 13{,}95° + 0{,}2\alpha_{BD}\text{ sen } 13{,}95°$

$+\uparrow y$ componentes: $0 = -3.289\text{ sen } 40° + 768{,}8\text{ sen } 13{,}95° + 0{,}2\alpha_{BD}\cos 13{,}95°$

Resolvendo as equações de forma simultânea, temos que $\alpha_{BD} = +9.940\text{ rad/s}^2$ e $\alpha_D = +2.790$ m. Os sinais positivos indicam que os sentidos mostrados no polígono vetorial são corretos. Escrevemos

$$\alpha_{BD} = 9.937\text{rad/s}^2 \circlearrowleft \quad ◀$$

$$\mathbf{a}_D = 2.787\text{ m/s}^2 \leftarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.8

A articulação *ABDE* movimenta-se no plano vertical. Sabendo que, na posição mostrada na figura, a manivela *AB* tem uma velocidade constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 20 rad/s no sentido anti-horário, determine as velocidades angulares e as acelerações angulares da barra de conexão *BD* e da manivela *DE*.

SOLUÇÃO

Este problema poderia ser resolvido pelo método usado no Problema Resolvido 15.7. Neste caso, no entanto, será usado o método vetorial. Os vetores de posição $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ e $\mathbf{r}_{D/B}$ são escolhidos do modo mostrado no esboço.

$\mathbf{r}_B = 160\mathbf{i} + 280\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_D = -340\mathbf{i} + 340\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_{D/B} = 240\mathbf{i} + 60\mathbf{j}$

Velocidades. Como o movimento de cada elemento da articulação está contido no plano da figura, temos

$$\boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k} = (20 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{BD} = \omega_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = \omega_{DE}\mathbf{k}$$

onde **k** é um vetor unitário que aponta para fora do papel. Escrevemos agora

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{D/B}$$
$$\omega_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D = \omega_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B + \omega_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B}$$
$$\omega_{DE}\mathbf{k} \times (-340\mathbf{i} + 340\mathbf{j}) = 20\mathbf{k} \times (160\mathbf{i} + 280\mathbf{j}) + \omega_{BD}\mathbf{k} \times (240\mathbf{i} + 60\mathbf{j})$$

Dividindo cada termo por 20, obtemos

$$-17\omega_{DE}\mathbf{j} - 17\omega_{DE}\mathbf{i} = 160\mathbf{j} - 280\mathbf{i} + 12\omega_{BD}\mathbf{j} - 3\omega_{BD}\mathbf{i}$$

Igualando os coeficientes dos vetores unitários **i** e **j**, obtemos as duas equações escalares seguintes:

$$-17\omega_{DE} = -280 - 3\omega_{BD}$$
$$-17\omega_{DE} = +160 + 12\omega_{BD}$$
$$\boldsymbol{\omega}_{BD} = -(29{,}33 \text{ rad/s})\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{DE} = (11{,}29 \text{ rad/s})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Acelerações. Notando que, no instante considerado, a manivela *AB* tem uma velocidade angular constante, escrevemos

$$\boldsymbol{\alpha}_{AB} = 0 \qquad \boldsymbol{\alpha}_{BD} = \alpha_{BD}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = \alpha_{DE}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{D/B} \qquad (1)$$

Expressando **r** em *m* temos

$$\mathbf{r}_B = 0{,}16\mathbf{i} + 0{,}28\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_D = -0{,}34\mathbf{i} + 0{,}34\mathbf{j}$$
$$\mathbf{r}_{D/B} = 0{,}24\mathbf{i} + 0{,}06\mathbf{j}$$

Cada termo da Eq. (1) é avaliado separadamente:

$$\mathbf{a}_D = \alpha_{DE}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_D - \omega_{DE}^2\mathbf{r}_D$$
$$= \alpha_{DE}\mathbf{k} \times (-0{,}34\mathbf{i} + 0{,}34\mathbf{j}) - (11{,}29)^2(-0{,}34\mathbf{i} + 0{,}34\mathbf{j})$$
$$= -0.34\alpha_{DE}\mathbf{j} - 0{,}34\alpha_{DE}\mathbf{i} + 43{,}33\mathbf{i} - 43{,}33\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_B = \alpha_{AB}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_B = 0 - (20)^2(16\mathbf{i} + 0{,}28\mathbf{j})$$
$$= -64\mathbf{i} - 112\mathbf{j}$$
$$\mathbf{a}_{D/B} = \alpha_{BD}\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{D/B} - \omega_{BD}^2\mathbf{r}_{D/B}$$
$$= \alpha_{BD}\mathbf{k} \times (0{,}24\mathbf{i} + 0{,}06\mathbf{j}) - (29{,}33)^2(0{,}24\mathbf{i} + 0{,}06\mathbf{j})$$
$$= 0{,}24\alpha_{BD}\mathbf{j} - 0{,}06\alpha_{BD}\mathbf{i} - 206{,}4\mathbf{i} - 51{,}61\mathbf{j}$$

Substituindo na Eq. (1) e igualando os coeficientes de **i** e **j**, obtemos

$$-0{,}34\alpha_{DE} + 0{,}06\alpha_{BD} = -313{,}7$$
$$-0{,}34\alpha_{DE} - 0{,}24\alpha_{BD} = -120{,}28$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{BD} = -(645 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\alpha}_{DE} = (809 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção foi dedicada à determinação das *acelerações* dos pontos de um *corpo rígido em movimento plano.* Como você fez anteriormente para as velocidades, irá considerar novamente o movimento plano de um corpo rígido como a soma de dois movimentos, a saber, *uma translação e uma rotação.*

Para resolver um problema envolvendo acelerações no movimento plano, você deve percorrer os seguintes passos:

1. Determine a velocidade angular do corpo. Para encontrar ω, você pode proceder de duas maneiras:

a. Considerar o movimento do corpo como a soma de uma translação e de uma rotação, como você fez na Seção 15.6; ou então

b. Usar o centro instantâneo de rotação do corpo, como na Seção 15.7. Entretanto, *atente para o fato de que você não pode usar o centro instantâneo para determinar acelerações.*

2. Comece desenhando uma "equação de diagramas" para usar em sua resolução. Essa "equação" envolverá os seguintes diagramas (Fig. 15.44).

a. Diagrama do movimento plano. Desenhe um esboço do corpo incluindo todas as dimensões, bem como a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Mostre a aceleração angular com sua intensidade e sentido, caso você os conheça. Mostre também os pontos para os quais você conheça ou procure as acelerações, indicando tudo o que souber a respeito delas.

b. Diagrama de translação. Selecione um ponto de referência A do qual você conheça a direção, intensidade ou um componente da aceleração $\mathbf{a}_A$. Desenhe um segundo diagrama, mostrando o corpo em translação, com cada ponto tendo a mesma aceleração que o ponto A.

c. Diagrama de rotação. Considerando o ponto A como um ponto de referência fixo, desenhe um terceiro diagrama mostrando o corpo em rotação em torno de A. Indique os componentes normal e tangencial das acelerações relativas de outros pontos, tais como os componentes $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ e $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ da aceleração do ponto B em relação ao ponto A.

3. Escreva a fórmula da aceleração relativa

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad \text{ou} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_n + (\mathbf{a}_{B/A})_t$$

Os problemas resolvidos ilustram três maneiras diferentes de usar essa equação vetorial:

a. Se α é dado ou pode ser facilmente determinado, você pode usar essa equação para determinar as acelerações dos vários pontos do corpo [Problema Resolvido 15.6].

(*continua*)

b. Se α não pode ser determinado facilmente, selecione para o ponto B um ponto do qual você conheça a direção, a intensidade ou um componente da aceleração $\mathbf{a}_B$ e desenhe um diagrama vetorial da equação. Partindo do mesmo ponto, desenhe todos os componentes de aceleração conhecidos, seguindo o padrão de ponta-a-cauda para cada membro da equação. Complete o diagrama desenhando os dois vetores remanescentes nos sentidos apropriados e de forma que as duas somas de vetores terminem em um ponto comum.

As intensidades dos dois vetores remanescentes podem ser encontradas graficamente ou analiticamente. Em geral, uma resolução analítica requererá a solução de duas equações simultâneas [Problema Resolvido 15.7]. Entretanto, considerando em primeiro lugar os componentes dos vários vetores em uma direção perpendicular a um dos vetores desconhecidos, você será capaz de obter uma equação com uma única incógnita.

Um dos vetores obtidos pelo método que acabamos de descrever será $(\mathbf{a}_{B/A})_t$, a partir do qual você pode calcular α. Uma vez determinado α, a equação vetorial pode ser usada para estabelecer a aceleração de qualquer outro ponto do corpo.

c. Uma abordagem totalmente vetorial pode ser usada para resolver a equação vetorial. Isso está ilustrado no Problema Resolvido 15.8.

4. A análise do movimento plano em termos de um parâmetro completa esta lição. Esse método deve ser usado *somente se for possível* expressar as coordenadas x e y de todos os pontos significativos do corpo em termos de um único parâmetro (Seção 15.9). Diferenciando duas vezes as coordenadas x e y de um dado ponto em relação a t, você poderá determinar os componentes retangulares da velocidade absoluta e da aceleração absoluta daquele ponto.

PROBLEMAS

15.105 Uma barra de 900 mm repousa em uma mesa horizontal. A força **P** aplicada como mostrado na figura produz as seguintes acelerações: $\mathbf{a}_A$ = 3,6 m/s² para a direita, α = 6 rad/s² no sentido anti-horário se visto de cima. Determine a aceleração (*a*) do ponto *G*, (*b*) do ponto *B*.

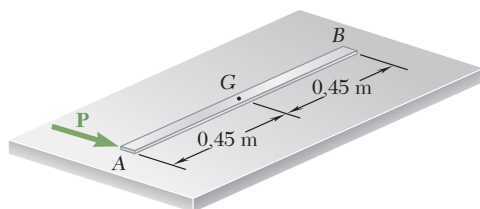



Figura P15.105 e P15.106

15.106 No Problema 15.105, determine o ponto da barra que (*a*) não tem aceleração, (*b*) tem uma aceleração de 2,4 m/s² para a direita.

15.107 Uma viga de aço de 5 m está sendo baixada por meio de dois cabos que se desenrolam de guindastes à mesma velocidade. Assim que a viga aproxima-se do solo, os operadores dos guindastes aplicam freios para desacelerar a descida. No instante considerado, a desaceleração do cabo preso em *A* é de 6 m/s², enquanto a do cabo preso em *B* é de 10 m/s². Determine (*a*) a aceleração angular da viga e (*b*) a aceleração do ponto *C*.

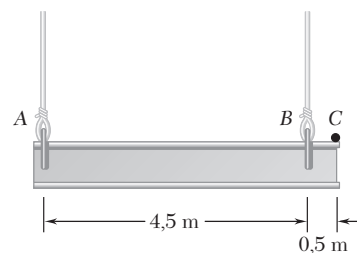



Figura P15.107 e P15.108

15.108 A aceleração do ponto *C* é de 0,5 m/s² para baixo e a aceleração angular da viga é de 0,8 rad/s² no sentido anti-horário. Sabendo que, no instante considerado, a velocidade angular da viga é nula, determine a aceleração de cada cabo.

15.109 e 15.110 A barra *BDE* está presa a duas hastes *AB* e *CD*. Sabendo que, no instante mostrado na figura, a haste *AB* gira com uma velocidade angular constante de 3 rad/s no sentido horário, determine a aceleração (*a*) do ponto *D* e (*b*) do ponto *E*.

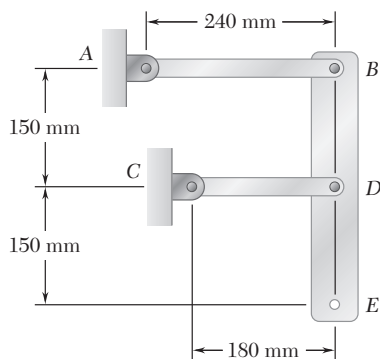



Figura P15.109

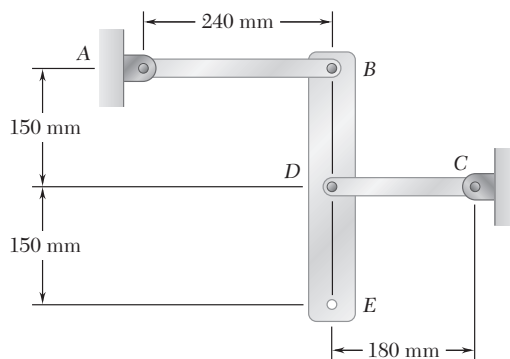



Figura P15.110

15.111 Um automóvel desloca-se para a esquerda a uma velocidade constante de 80 km/h. Sabendo que o diâmetro da roda é de 500 mm, determine a aceleração (*a*) do ponto *B*, (*b*) do ponto *C*, (*c*) do ponto *D*.

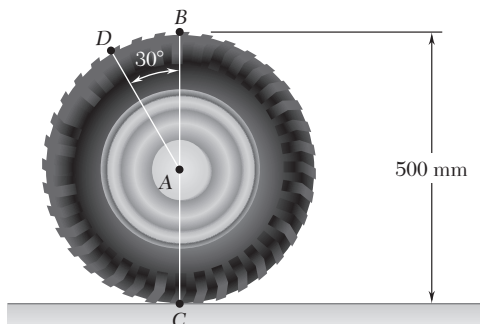



Figura P15.111

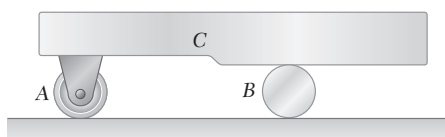



Figura P15.112

15.112 Um carro *C* é suportado por um rodízio *A* e um cilindro *B*, cada um com 50 mm de diâmetro. Sabendo que no instante mostrado na figura o carro tem uma aceleração de 2,4 m/s^2 e uma velocidade de 1,5 m/s, ambas orientadas para a esquerda, determine (*a*) a aceleração do rodízio e do cilindro, (*b*) as acelerações dos centros do rodízio e do cilindro.

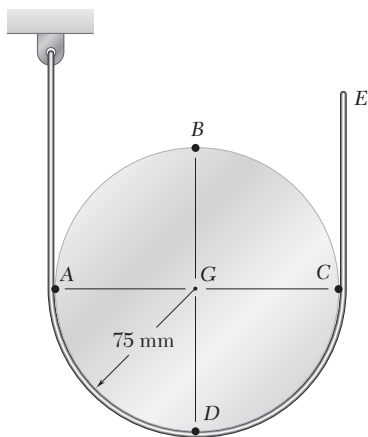



Figura P15.113 e *P15.114*

15.113 O movimento do cilindro de 75 mm de raio é controlado pela corda mostrada na figura. Sabendo que a extremidade *E* da corda tem velocidade de 300 mm/s e aceleração de 480 mm/s^2, ambas orientadas para cima, determine a aceleração (*a*) do ponto *A*, (*b*) do ponto *B*.

15.114 O movimento do cilindro de 75 mm de raio é controlado pela corda mostrada na figura. Sabendo que a extremidade *E* da corda tem velocidade de 300 mm/s e aceleração de 480 mm/s^2, ambas orientadas para cima, determine as acelerações dos pontos *C* e *D* do cilindro.

15.115 e 15.116 Um tambor de 75 mm de raio está preso rigidamente a um tambor de 125 mm de raio, como mostra a figura. Um dos tambores rola sem deslizar sobre a superfície mostrada e uma corda é enrolada ao redor do outro tambor. Sabendo que, no instante mostrado, a extremidade *D* da corda tem velocidade de 200 mm/s e aceleração de 750 mm/s^2, ambas orientadas para a esquerda, determine as acelerações dos pontos *A*, *B* e *C* dos tambores.

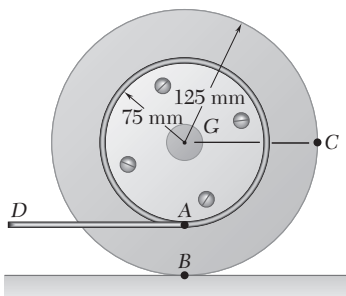



Figura P15.115

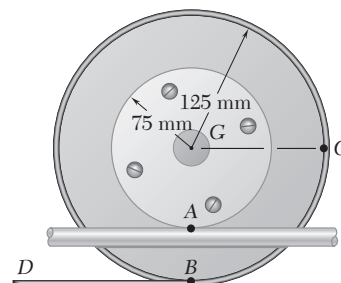



Figura P15.116

15.117 O tambor de 150 mm de raio gira sem escorregar sobre uma correia que se move para a esquerda com uma velocidade constante de 300 mm/s. No instante em que a velocidade e a aceleração do centro D do tambor estão indicadas, determine as acelerações A, B e C do tambor.

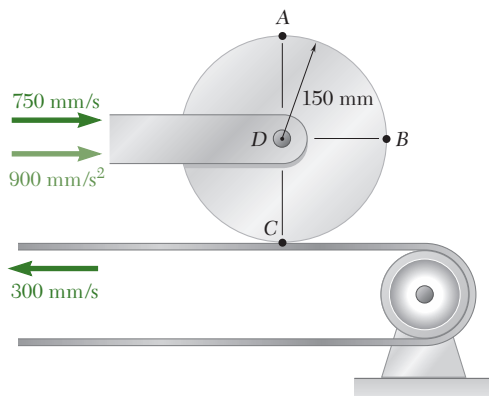



Figura P15.117

15.118 O volante de 500 mm de raio está rigidamente preso a um eixo de 40 mm de raio que pode rolar ao longo de trilhos paralelos. Sabendo que, no instante mostrado na figura, o centro do eixo tem velocidade de 32 mm/s e aceleração de 10 mm/s^2, ambas orientadas para baixo e para a esquerda, determine a aceleração (*a*) do ponto A, (*b*) do ponto B.

Figura P15.118

15.119 No sistema de engrenagens planetárias mostrado na figura, o raio das engrenagens A, B, C e D é 100 mm e o raio da engrenagem externa E é 300 mm. Sabendo que a engrenagem A tem uma velocidade angular constante de 150 rpm, de sentido horário, e que a engrenagem externa E é fixa, determine a intensidade da aceleração do dente da engrenagem D que faz contato com (*a*) a engrenagem A, (*b*) a engrenagem E.

Figura P15.119

15.120 O disco mostrado na figura tem uma velocidade angular constante de 500 rpm no sentido anti-horário. Sabendo que a barra BD tem 250 mm de comprimento, determine a aceleração do colar D quando (*a*) $\theta = 90°$, (*b*) $\theta = 180°$.

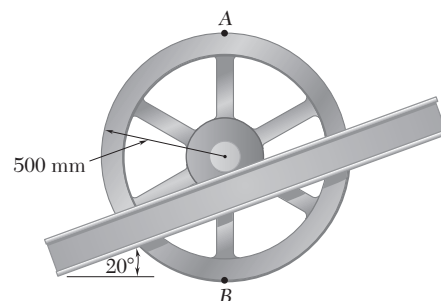



Figura P15.120

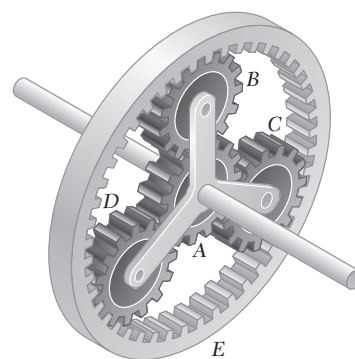
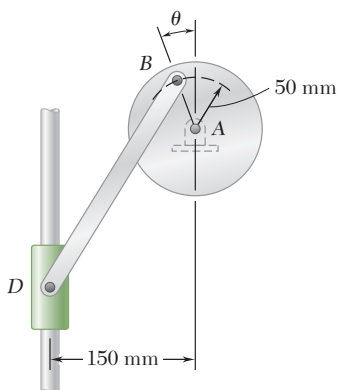
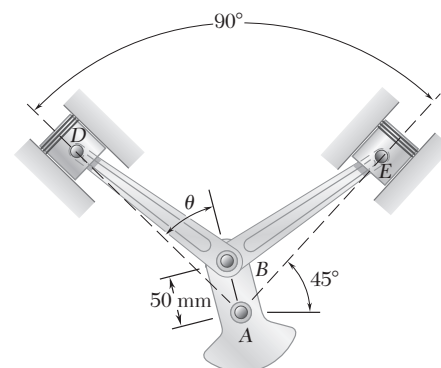



Figura P15.121

15.121 Em um compressor de dois cilindros mostrado na figura estão conectadas as barras BD e BE, cada uma com o comprimento de 190 mm e a manivela AB que gira em torno do ponto fixo A com velocidade

angular constante de 1.500 rpm no sentido horário. Determine a aceleração de cada pistão quando $\theta = 0$.

15.122 O braço *AB* tem uma velocidade angular constante de 16 rad/s no sentido anti-horário. No instante em que $\theta = 0$, determine a aceleração (*a*) do colar *D*, (*b*) do ponto médio *G* da barra *BD*.

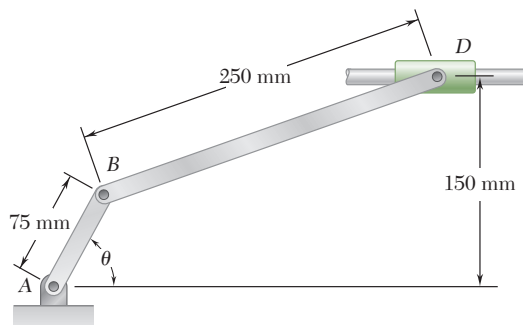



Figura P15.122, *P15.123* e *P15.124*

15.123 O braço *AB* tem uma velocidade angular constante de 16 rad/s no sentido anti-horário. No instante em que $\theta = 90°$, determine a aceleração (*a*) do colar *D*, (*b*) do ponto médio *G* da barra *BD*.

15.124 O braço *AB* tem uma velocidade angular constante de 16 rad/s no sentido anti-horário. No instante em que $\theta = 60°$, determine a aceleração do colar *D*.

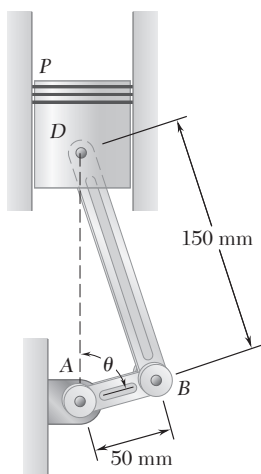



Figura P15.125 e P15.126

15.125 Sabendo que a manivela *AB* gira em torno do ponto *A* com uma velocidade angular constante de 900 rpm no sentido horário, determine a aceleração do pistão *P* quando $\theta = 60°$.

15.126 Sabendo que a manivela *AB* gira em torno do ponto *A* com uma velocidade angular constante de 900 rpm no sentido horário, determine a aceleração do pistão *P* quando $\theta = 120°$.

15.127 Sabendo que no instante mostrado a barra *AB* tem aceleração angular nula e velocidade angular de 15 rad/s no sentido anti-horário, determine (*a*) a aceleração angular do braço *DE*, (*b*) a aceleração do ponto *D*.

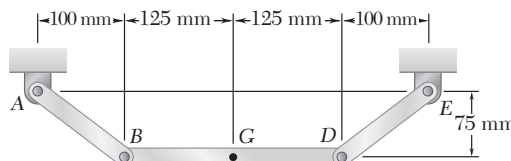



Figura P15.127 e P15.128

15.128 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a barra *AB* tem aceleração angular nula e velocidade angular de 15 rad/s no sentido anti-horário, determine (*a*) a aceleração angular do braço *BD*, (*b*) a aceleração do ponto *G*.

Figura P15.129 e P15.130

15.129 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a barra *AB* tem uma velocidade angular constante de 6 rad/s no sentido horário, determine a aceleração do ponto *D*.

15.130 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a barra AB tem uma velocidade angular constante de 6 rad/s no sentido horário, determine (*a*) a aceleração angular do membro BDE, (*b*) a aceleração do ponto E.

15.131 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a barra AB tem uma aceleração angular nula e uma velocidade angular constante de ω_0 no sentido horário, determine (*a*) a aceleração angular do braço DE, (*b*) a aceleração do ponto D.

Figura *P15.131* e P15.132

15.132 No instante mostrado na figura, a barra AB tem uma aceleração angular nula e uma velocidade angular constante de 8 rad/s no sentido horário. Sabendo que $l = 0{,}3$ m, determine a aceleração do ponto médio C do membro BD.

15.133 e *15.134* Sabendo que, nos instantes mostrados nas figuras, a barra AB tem uma velocidade angular constante de 4 rad/s no sentido horário, determine a aceleração angular (*a*) da barra BD, (*b*) da barra DE.

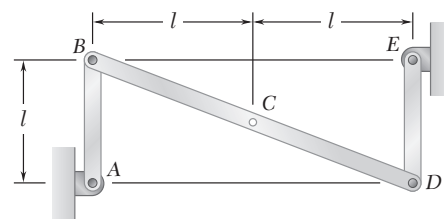
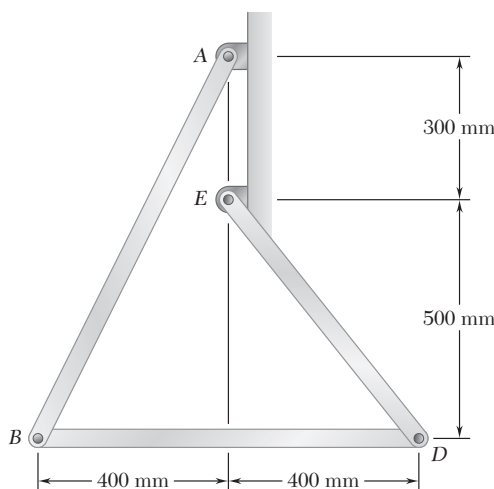



Figura P15.133 e P15.135

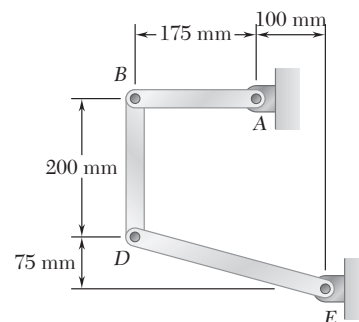



Figura P15.134 e *P15.136*

15.135 e *15.136* Sabendo que, nos instantes mostrados nas figuras, a barra AB tem uma velocidade angular constante de 4 rad/s e uma aceleração angular de 2 rad/s^2, ambas no sentido horário, determine a aceleração angular (*a*) da barra BD, (*b*) da barra DE usando a aproximação do vetor como foi feito no Problema Resolvido 15.8.

15.137 Representando por $\mathbf{r}_A$ o vetor de posição do ponto A de uma placa rígida que está em movimento plano, mostre que (*a*) o vetor de posição $\mathbf{r}_C$ do centro instantâneo de rotação é

$$\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_A + \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A}{\omega^2}$$

onde ω é a velocidade angular da placa e $\mathbf{v}_A$ é a velocidade do ponto A, (*b*) a aceleração do centro de rotação instantâneo é nula se, e somente se

$$\mathbf{a}_A = \frac{\alpha}{\omega}\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_A$$

onde $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ é a aceleração angular da placa.

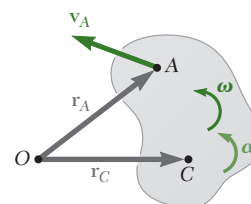



Figura P15.137

***15.138** As rodas fixadas às extremidades da barra AB rola ao longo das superfícies mostradas na figura. Usando o método da Seção 15.9, deduza uma expressão para a velocidade angular da barra em termos de v_B, θ, l e β.

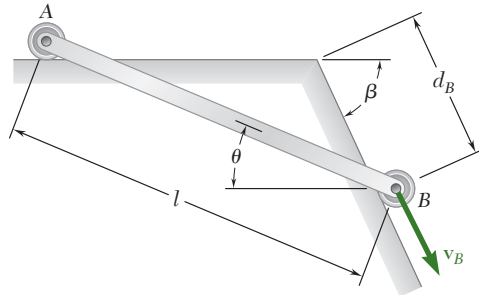



Figura P15.138 e P15.139

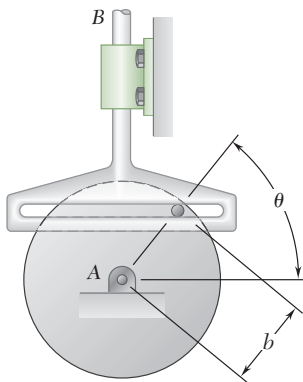



Figura P15.140

***15.139** As rodas fixadas às extremidades da barra AB rolam ao longo das superfícies mostradas na figura. Usando o método da Seção 15.9 e sabendo que a aceleração da roda B é zero, deduza uma expressão para a velocidade angular da barra em termos de v_B, θ, l e β.

***15.140** O disco de acionamento do mecanismo de cruzeta escocesa mostrado na figura tem uma velocidade angular ω e uma aceleração angular α, ambas no sentido anti-horário. Usando o método da Seção 15.9, deduza expressões para a velocidade e a aceleração do ponto B.

***15.141** A barra AB desloca-se sobre um rolete em C enquanto a extremidade A se move para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{v}_A$. Usando o método da Seção 15.9, deduza expressões para a velocidade angular e para a aceleração angular da barra.

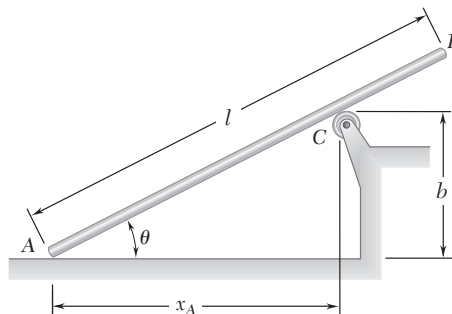



Figura P15.141 e *P15.142*

****15.142*** A barra AB desloca-se sobre um rolete em C enquanto a extremidade A se move para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{v}_A$. Usando o método da Seção 15.9, deduza expressões para os componentes horizontal e vertical da velocidade do ponto B.

***15.143** Um disco de raio r rola para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{v}$. Representando por P o ponto do aro em contato com o solo em $t = 0$, deduza expressões para os componentes horizontal e vertical da velocidade do ponto P em um instante qualquer t.

***15.144** No instante mostrado na figura, a barra AB gira com uma velocidade angular constante ω e uma aceleração angular α, ambas no sentido horário. Usando o método da Seção 15.9, deduza expressões para a velocidade e a aceleração do ponto C.

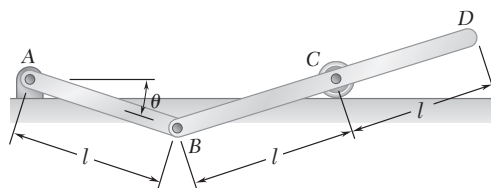



Figura P15.144 e P15.145

***15.145** No instante mostrado na figura, a barra AB gira com uma velocidade angular constante ω e uma aceleração angular α, ambas no sentido horário. Usando o método da Seção 15.9, deduza expressões para os componentes horizontal e vertical da velocidade e da aceleração do ponto D.

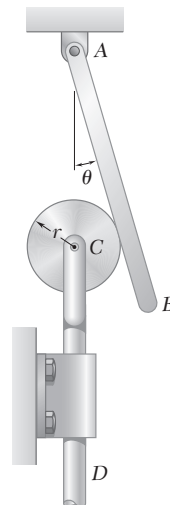
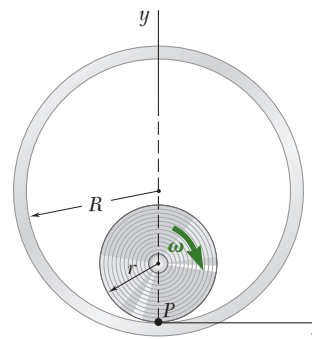
***15.146** A posição da barra AB é controlada por um disco de raio r que está preso no balancim CD. Sabendo que o balancim se desloca verticalmente para cima com velocidade constante $\mathbf{v}_0$, deduza uma expressão para a aceleração angular da barra AB.

Figura P15.146

***15.147** No Problema 15.146, deduza uma expressão para a aceleração angular da barra AB.

***15.148** Uma roda de raio r rola sem escorregar ao longo do interior de um cilindro fixo de raio R com uma velocidade angular constante ω. Representando por P o ponto da roda em contato com o cilindro em $t = 0$, deduza expressões para os componentes horizontal e vertical da velocidade de P em qualquer instante t. (A curva descrita pelo ponto P é uma *hipocicloide*.)

Figura P15.148

***15.149** No Problema 15.148, mostre que a trajetória de P é uma linha reta vertical quando $r = R/2$. Deduza expressões para a velocidade e aceleração de P correspondentes em qualquer instante t.

15.10 Taxa de variação de um vetor em relação a um sistema de referência rotativo

Vimos na Seção 11.10 que a taxa de variação de um vetor é a mesma em relação a um sistema de referência fixo e em relação a um sistema de referência em translação. Nesta seção, serão consideradas as taxas de variação de um vetor $\mathbf{Q}$ em relação a um sistema de referência fixo e a um sistema de referência rotativo.* Você aprenderá a determinar a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em relação a um sistema de referência quando $\mathbf{Q}$ estiver definido por seus componentes em outro sistema de referência.

Foto 15.7 O mecanismo de Genebra é usado para converter movimento rotativo em movimento intermitente.

* Lembre-se de que a escolha de um sistema de referência fixo é arbitrária. Qualquer sistema de referência pode ser designado como "fixo"; todos os outros serão, então, considerados móveis.

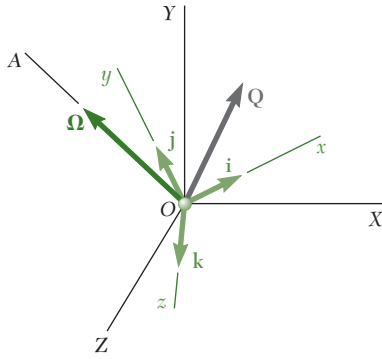



Figura 15.26

Considere dois sistemas de referência centrados em O, um sistema de referência fixo $OXYZ$ e um sistema de referência $Oxyz$ que gira em torno do eixo fixo OA; seja $\mathbf{\Omega}$ a velocidade angular do sistema de referência $Oxyz$ em um dado instante (Fig. 15.26). Considere agora uma função vetorial $\mathbf{Q}(t)$ representada pelo vetor $\mathbf{Q}$ ligado a O; com a variação do tempo t, tanto a direção como a intensidade de $\mathbf{Q}$ variam. Uma vez que a variação de $\mathbf{Q}$ é vista de modo diferente por um observador que usa $OXYZ$ como um sistema de referência e por outro que utiliza $Oxyz$, devemos esperar que a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ dependa do sistema de referência escolhido. Logo, a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$ será representada por $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$, e a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em relação ao sistema de referência rotativo $Oxyz$ será representada por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. Propomos determinar a relação existente entre essas duas taxas de variação.

Vamos, em primeiro lugar, decompor o vetor $\mathbf{Q}$ em componentes ao longo dos eixos x, y e z do sistema de referência rotativo. Representando por $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ os vetores unitários correspondentes, escrevemos

$$\mathbf{Q} = Q_x\mathbf{i} + Q_y\mathbf{j} + Q_z\mathbf{k} \tag{15.27}$$

Diferenciando (15.27) em relação a t e considerando os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ como fixos, obtemos a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ *em relação ao sistema de referência rotativo Oxyz:*

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} \tag{15.28}$$

Para obter a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ *em relação ao sistema de referência fixo OXYZ*, devemos considerar os vetores unitários $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ e $\mathbf{k}$ como variáveis ao diferenciar (15.27). Portanto, escrevemos

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = \dot{Q}_x\mathbf{i} + \dot{Q}_y\mathbf{j} + \dot{Q}_z\mathbf{k} + Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{15.29}$$

Retomando (15.28), observamos que a soma dos três primeiros termos do segundo membro de (15.29) representa a taxa de variação $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$. Por outro lado, observamos que a taxa de variação $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ se reduziria aos três últimos termos em (15.29), caso o vetor $\mathbf{Q}$ estivesse fixo no sistema de referência $Oxyz$, pois, assim, $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ seja nula. Mas, nesse caso, $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ representaria a velocidade de uma partícula localizada na ponta de $\mathbf{Q}$ e pertencente a um corpo rigidamente ligado ao sistema de referência $Oxyz$. Logo, os três últimos termos em (15.29) representam a velocidade daquela partícula; como o sistema de referência $Oxyz$ tem uma velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ em relação a $OXYZ$ no instante considerado, escrevemos, usando a Eq. (15.5),

$$Q_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + Q_y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + Q_z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.30}$$

Considerando as Eqs. (15.28) e (15.30) na Eq. (15.29), obtemos a relação fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

Concluímos que a taxa de variação do vetor $\mathbf{Q}$ em relação a um sistema de referência fixo $OXYZ$ é composta de duas partes: a primeira representa a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em relação ao sistema de referência rotativo $Oxyz$; a segunda parte, $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q}$, é induzida pela rotação do sistema de referência $Oxyz$.

O uso da relação (15.31) simplifica a determinação da taxa de variação de um vetor **Q** em relação a um sistema de referência fixo *OXYZ* quando o vetor **Q** é definido por seus componentes ao longo de eixos de um sistema de referência rotativo *Oxyz*, já que essa relação não requer o cálculo em separado das derivadas dos vetores unitários que definem a orientação do sistema de referência rotativo.

15.11 Movimento plano de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo. Aceleração de Coriolis

Considere dois sistemas de referência, ambos centrados em *O* e ambos no plano da figura, um sistema de referência fixo *OXY* e um sistema de referência rotativo *Oxy* (Fig. 15.27). Seja *P* uma partícula que se move no plano da figura. O vetor de posição **r** de *P* é o mesmo em ambos os sistemas de referência, mas sua taxa de variação depende do sistema de referência escolhido.

Figura 15.27

A velocidade absoluta $\mathbf{v}_P$ da partícula é definida como a velocidade observada do sistema de referência fixo *OXY* e é igual à taxa de variação $(\dot{\mathbf{r}})_{OXY}$ de **r** em relação àquele sistema de referência. Podemos, porém, expressar $\mathbf{v}_P$ em termos da taxa de variação $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ observada a partir do sistema de referência rotativo se fizermos uso da Eq. (15.31). Representando por $\mathbf{\Omega}$ a velocidade angular do sistema de referência *Oxy* em relação a *OXY* no instante considerado, escrevemos

$$\mathbf{v}_P = (\dot{\mathbf{r}})_{OXY} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} \tag{15.32}$$

Mas $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ define a velocidade da partícula *P* relativa ao sistema de referência rotativo *Oxy*. Representando, de modo abreviado, o sistema de referência rotativo por $\mathcal{F}$, expressamos a velocidade $(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$ de *P* relativa ao sistema de referência rotativo como $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Imaginemos que uma placa rígida tenha sido fixada ao sistema de referência rotativo. Então, $v_{P/\mathcal{F}}$ representa a velocidade da partícula *P* ao longo da trajetória que ela descreve sobre a placa (Fig. 15.28) e o termo $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$ em (15.32) representa a velocidade $\mathbf{v}_{P'}$ do ponto *P′* sobre a placa – ou sistema de referência rotativo – que coincide com *P* no instante considerado. Logo, temos

Figura 15.28

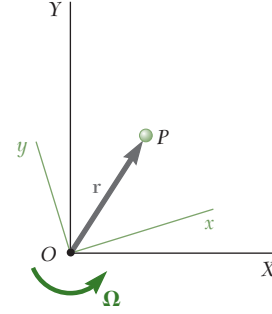
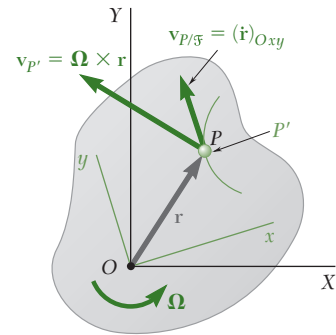
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$

onde $\mathbf{v}_P$ = velocidade absoluta da partícula *P*
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidade do ponto *P′* do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com *P*.
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidade de *P* relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$.

A aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ da partícula é definida como a taxa de variação de $\mathbf{v}_P$ em relação ao sistema de referência fixo *OXY*. Calculando as taxas de variação relativamente a *OXY* dos termos em (15.32), escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] \tag{15.34}$$

onde todas as derivadas são definidas em relação a *OXY*, exceto quando indicação em contrário. Em referência à Eq. (15.31), notamos que o último termo em (15.34) pode ser expresso como

$$\frac{d}{dt}[(\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}] = (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} + \mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy}$$

Por outro lado, $\dot{\mathbf{r}}$ representa a velocidade $\mathbf{v}_P$ e pode ser substituído pelo segundo membro da Eq. (15.32). Após completarmos essas duas substituições na Eq. (15.34), escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxy} \qquad (15.35)$$

Com relação à expressão (15.8) obtida na Seção 15.3 para a aceleração de uma partícula em um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, verificamos que a soma dos dois primeiros termos representa a aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ do ponto P' do sistema de referência rotativo que coincide com P no instante considerado. Por outro lado, o último termo define a aceleração $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ da partícula P relativa ao sistema de referência rotativo. Se não fosse pelo terceiro termo, que não foi levado em conta no caso, uma relação semelhante à (15.33) poderia ter sido escrita para as acelerações, e $\mathbf{a}_P$ poderia ter sido expressa como a soma de $\mathbf{a}_{P'}$ e $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$. Todavia, é claro que *tal relação seria incorreta* e que devemos incluir o termo adicional. Esse termo, que será representado por $\mathbf{a}_c$, é denominado *aceleração complementar,* ou *aceleração de Coriolis,* em homenagem ao matemático francês de Coriolis (1792-1843). Escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.36)$$

onde $\mathbf{a}_P$ = aceleração absoluta da partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleração do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleração de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} =$
= aceleração complementar, ou de Coriolis*

Como o ponto P' move-se em um círculo em torno da origem O, sua aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ tem, em geral, dois componentes: um componente $(\mathbf{a}_{P'})_t$, tangente ao círculo, e um componente $(\mathbf{a}_{P'})_n$, orientado para O. De modo análogo, a aceleração $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$. tem, em geral, dois componentes: um componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_t$, tangente à trajetória descrita por P sobre a placa rotativa, e um componente $(\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}})_n$, orientado paia o centro de curvatura da trajetória. Notamos ainda que, como o vetor Ω, é perpendicular ao plano do movimento e, portanto, a $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$, a intensidade da aceleração de Coriolis $\mathbf{a}_c = 2\Omega \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ é igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, e sua direção pode ser obtida girando-se 90° o vetor $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ no sentido de rotação do sistema de referência móvel (Fig. 15.29). A aceleração de Coriolis se reduz a zero quando Ω ou $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ são zero.

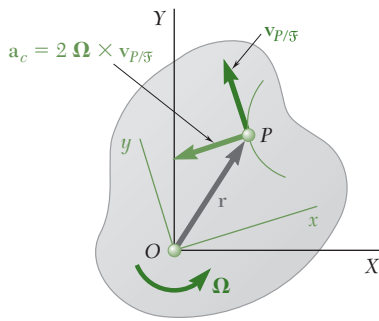



Figura 15.29

* É importante observar a diferença entre a Eq. (15.36) e a Eq. (15.21) da Seção 15.8. Quando escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \qquad (15.21)$$

na Seção 15.8, estávamos expressando a aceleração absoluta do ponto B como a soma de sua aceleração $\mathbf{a}_{B/A}$ relativamente a um *sistema de referência em translação* e da aceleração $\mathbf{a}_A$ de um ponto daquele sistema de referência. Agora, tentamos relacionar a aceleração absoluta do ponto P da partícula à sua aceleração $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ relativa a um *sistema de referência rotativo* $\mathcal{F}$ e à aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ do ponto P' daquele sistema de referência que coincide com P. A Eq. (15.36) mostra que, pelo fato de o sistema de referência ser rotativo, é necessário incluir um termo adicional representando a aceleração de Coriolis $\mathbf{a}_c$.

O exemplo seguinte ajudará na compreensão do significado físico da aceleração de Coriolis. Considere um colar P que é posto para deslizar a uma velocidade relativa constante u ao longo de uma barra OB que gira a uma velocidade angular constante ω em torno de O (Fig. 15.30a). De acordo com a Eq. (15.36), a aceleração absoluta de P pode ser obtida pela soma vetorial da aceleração do ponto A da barra coincidente com P, da aceleração relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ de P em relação à barra e da aceleração de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Como a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da barra é constante, $\mathbf{a}_A$ se reduz ao seu componente normal $(\mathbf{a}_A)_n$ de intensidade $r\omega^2$ e como u é constante, a aceleração relativa $\mathbf{a}_{P/OB}$ é nula. De acordo com a definição dada anteriormente, a aceleração de Coriolis é um vetor perpendicular a OB, de intensidade $2\omega u$, e orientado pelo modo mostrado na figura. Logo, a aceleração do colar P consiste dos dois vetores mostrados na Fig. 15.30a. Note que o resultado obtido pode ser verificado aplicando-se a relação (11.44).

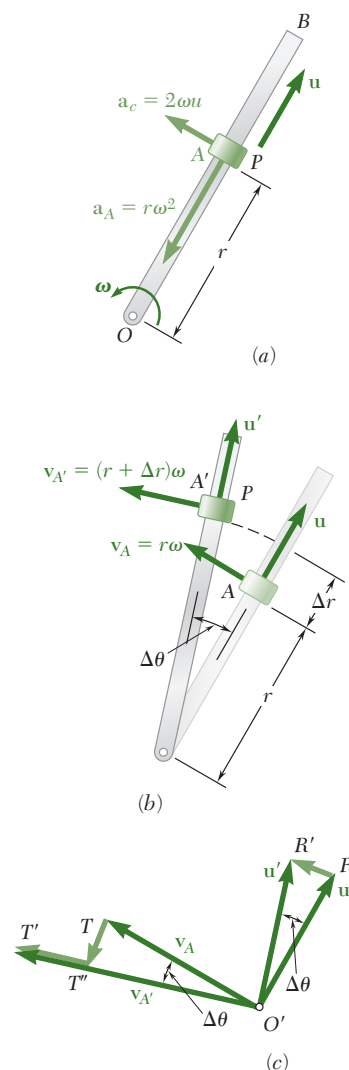
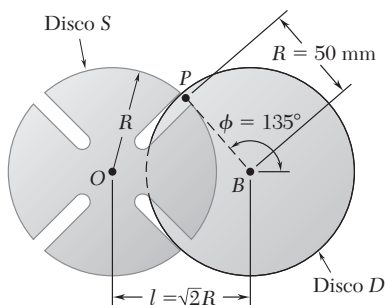
Para uma melhor compreensão do significado da aceleração de Coriolis, consideremos a velocidade absoluta de P nos instantes t e $t + \Delta t$ (Fig. 15.30b). A velocidade no instante t pode ser decomposta em seus componentes $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}_A$; a velocidade no instante $t + \Delta t$ pode ser decomposta em seus componentes $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}_{A'}$. Desenhando esses componentes a partir da mesma origem (Fig. 15.30c), verificamos que a variação da velocidade durante o intervalo Δt pode ser representada pela soma de três vetores, $\overrightarrow{RR'}$, $\overrightarrow{TT''}$ e $\overrightarrow{T''T'}$. O vetor $\overrightarrow{TT''}$ mede a variação na direção da velocidade $\mathbf{v}_A$ e o quociente $\overrightarrow{TT''}/\Delta t$ representa a aceleração $\mathbf{a}_A$ quando Δt tende a zero. Verificamos que a direção de $\overrightarrow{TT''}$ é aquela de $\mathbf{a}_A$ quando Δt tende a zero e que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{TT''}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_A \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega\omega = r\omega^2 = a_A$$

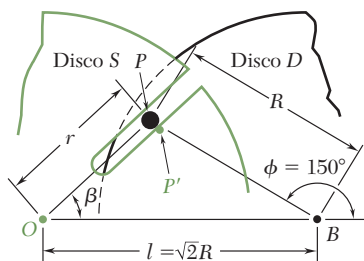
Figura 15.30

O vetor $\overrightarrow{RR'}$ mede a variação na direção de $\mathbf{u}$ devido à rotação da barra; o vetor $\overrightarrow{T''T'}$ mede a variação da intensidade de $\mathbf{v}_A$ decorrente do movimento de P sobre a barra. Os vetores $\overrightarrow{RR'}$ e $\overrightarrow{T''T'}$ resultam do *efeito combinado* da velocidade relativa de P e da rotação da barra; eles desapareceriam se *qualquer* um desses dois movimentos cessasse. E fácil verificar que a soma desses dois vetores define a aceleração de Coriolis. Sua direção é aquela de $\mathbf{a}_c$ quando Δt tende a zero e, como $RR' = u\ \Delta\theta$ e $T''T' = v_{A'} - v_A = (r + \Delta r)\omega - r\omega = \omega\ \Delta r$, verificamos que $\mathbf{a}_c$ é igual a:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{RR'}{\Delta t} + \frac{T''T'}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(u \frac{\Delta\theta}{\Delta t} + \omega \frac{\Delta r}{\Delta t} \right) = u\omega + \omega u = 2\omega u$$

As fórmulas (15.33) e (15.36) podem ser usadas para analisar o movimento de mecanismos que contêm partes que deslizam umas sobre as outras. Elas tornam possível, por exemplo, relacionar os movimentos absoluto e relativo de pinos e colares deslizantes (ver Problemas Resolvidos 15.9 e 15.10). O conceito de aceleração de Coriolis também é muito útil no estudo de projéteis de longo alcance e de outros corpos cujos movimentos são muito afetados pela rotação da Terra. Conforme salientado na Seção 12.2, um sistema de eixos ligado à Terra não constitui verdadeiramente um sistema de referência newtoniano; de fato, tal sistema de eixos deve ser considerado como rotativo. Assim, as fórmulas deduzidas nesta seção facilitarão o estudo do movimento de corpos em relação a eixos ligados à Terra.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.9

O mecanismo de Genebra, como mostra a figura, é usado em muitos instrumentos de contagem e em outras aplicações onde um movimento rotatório intermitente é necessário. O disco D gira a uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_D$ de 10 rad/s no sentido anti-horário. Um pino é preso ao disco D e desliza ao longo de uma das várias ranhuras cortadas no disco S. É desejável que a velocidade angular do disco S seja nula nos instantes em que o pino entra e sai de cada ranhura; no caso de quatro ranhuras, isso acontecerá se a distância entre os centros dos discos for $l = \sqrt{2}\,R$.

No instante em que $\phi = 150°$, determine (a) a velocidade angular do disco S e (b) a velocidade do pino P relativa ao disco S.

SOLUÇÃO

Resolvemos o triângulo OPB, que corresponde à posição $\phi = 150°$. Usando a lei dos cossenos, escrevemos

$$r^2 = R^2 + l^2 - 2Rl\cos 30° = 0{,}551R^2 \qquad r = 0{,}742R = 37{,}1 \text{ mm}$$

Da lei dos senos

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{R} = \frac{\text{sen}\,30°}{r} \qquad \text{sen}\,\beta = \frac{\text{sen}\,30°}{0{,}742} \qquad \beta = 42{,}4°$$

Como o pino P está preso ao disco D e como o disco D gira em torno do ponto B, a intensidade da velocidade absoluta de P é:

$$v_P = R\omega_D = (50 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}) = 500 \text{ mm/s}$$

$$\mathbf{v}_P = 500 \text{ mm/s} \angle 60°$$

Consideremos agora o movimento do pino P ao longo da ranhura no disco S. Representando por P' o ponto do disco S que coincide com P no instante considerado e escolhendo um sistema de referência rotativo $\mathcal{S}$ ligado ao disco S, escrevemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$$

Observando que $\mathbf{v}_{P'}$ é perpendicular ao raio OP e que $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ está dirigido ao longo da ranhura, desenhamos o triângulo de velocidades correspondente à equação anterior. Do triângulo, calculamos

$$\gamma = 90° - 42{,}4° - 30° = 17{,}6°$$

$$v_{P'} = v_P \text{ sen}\,\gamma = (500 \text{ mm/s})\text{ sen}\,17{,}6°$$

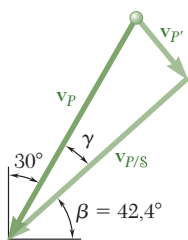
$$\mathbf{v}_{P'} = 151{,}2 \text{ mm/s} \angle 42{,}4°$$

$$v_{P/\mathcal{S}} = v_P \cos\gamma = (500 \text{ mm/s})\cos 17{,}6°$$

$$\mathbf{v}_{P/S} = \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \angle 42{,}4° \quad ◀$$

Como $\mathbf{v}_{P'}$ é perpendicular ao raio OP, escrevemos

$$v_{P'} = r\omega_{\mathcal{S}} \qquad 151{,}2 \text{ mm/s} = (37{,}1 \text{ mm})\omega_{\mathcal{S}}$$

$$\boldsymbol{\omega}_S = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{S}} = 4{,}08 \text{ rad/s} \circlearrowright \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.10

No mecanismo de Genebra do Problema Resolvido 15.9, o disco D gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_D$ de 10 rad/s de intensidade no sentido anti-horário. No instante em que $\phi = 150°$, determine a aceleração angular do disco S.

SOLUÇÃO

Reportando-nos ao Problema Resolvido 15.9, obtemos a velocidade angular do sistema de referência $\mathcal{S}$ ligado ao disco S e a velocidade do pino relativa a $\mathcal{S}$:

$$\omega_{\mathcal{S}} = 4{,}08 \text{ rad/s} \circlearrowright$$

$$\beta = 42{,}4° \qquad \mathbf{v}_{P/\mathcal{S}} = 477 \text{ mm/s} \nearrow 42{,}4°$$

Como o pino P move-se em relação ao sistema de referência rotativo $\mathcal{S}$, escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c \qquad (1)$$

Cada termo dessa equação vetorial é tratado separadamente.

Aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$. Como o disco D gira com velocidade angular constante, a aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ é orientada para B. Temos

$$a_P = R\omega_D^2 = (500 \text{ mm})(10 \text{ rad/s}^2) = 5.000 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_P = 5.000 \text{ mm/s}^2 \searrow 30°$$

Aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ do ponto coincidente P'. A aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ do ponto P' do sistema de referência $\mathcal{S}$, coincidente com P no instante considerado, é decomposta em componentes normal e tangencial. (Recordemos do Problema Resolvido 15.9 que $r = 37{,}1$ mm.)

$$(a_{P'})_n = r\omega_{\mathcal{S}}^2 = (37{,}1 \text{ mm})(4{,}08 \text{ rad/s})^2 = 618 \text{ mm/s}^2$$

$$(\mathbf{a}_{P'})_n = 618 \text{ mm/s}^2 \nearrow 42{,}4°$$

$$(a_{P'})_t = r\alpha_{\mathcal{S}} = 37{,}1\alpha_{\mathcal{S}} \qquad (\mathbf{a}_{P'})_t = 37{,}1\alpha_{\mathcal{S}} \searrow 42{,}4°$$

Aceleração relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$. Como o pino P move-se em uma ranhura reta do disco S, a aceleração relativa $\mathbf{a}_{P/\mathcal{S}}$ precisa ser paralela à ranhura; ou seja, sua direção deve ser $\swarrow 42{,}4°$.

Aceleração de Coriolis $\mathbf{a}_c$. Girando a velocidade relativa $\mathbf{v}_{P/\mathcal{S}}$ em 90° no sentido de $\omega_{\mathcal{S}}$, obtemos a direção da aceleração de Coriolis: $\nwarrow 42{,}4°$. Escrevemos

$$a_c = 2\omega_{\mathcal{S}} v_{P/\mathcal{S}} = 2(4{,}08 \text{ rad/s})(477 \text{ mm/s}) = 3.890 \text{ mm/s}^2$$

$$\mathbf{a}_c = 3.890 \text{ mm/s}^2 \nwarrow 42{,}4°$$

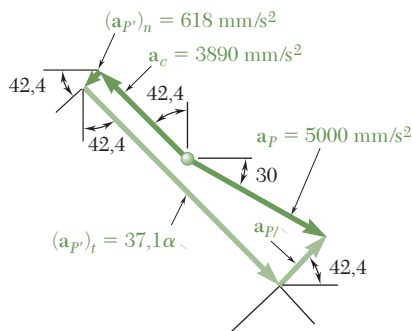
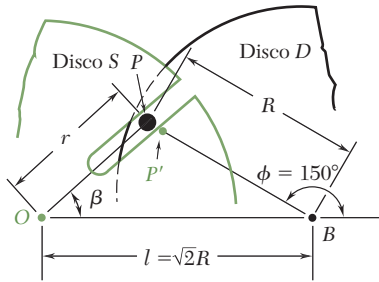
Rescrevemos a Eq. (1) e substituímos as acelerações encontradas anteriormente:

$$\mathbf{a}_P = (\mathbf{a}_{P'})_n + (\mathbf{a}_{P'})_t + \mathbf{a}_{P/\mathcal{S}} + \mathbf{a}_c$$

$$[5.000 \searrow 30°] = [618 \nearrow 42{,}4°] + [37{,}1\alpha_{\mathcal{S}} \searrow 42{,}4°]$$
$$+ [a_{P/\mathcal{S}} \swarrow 42{,}4°] + [3.890 \nwarrow 42{,}4°]$$

Igualando os componentes de acordo com a direção perpendicular à ranhura

$$5.000 \cos 17{,}6° = 37{,}1\alpha_{\mathcal{S}} - 3.890$$

$$\boldsymbol{\alpha}_S = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{S}} = 233 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você estudou a taxa de variação de um vetor em relação a um sistema de referência rotativo e em seguida aplicou seu conhecimento à análise do movimento plano de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo.

1. Taxa de variação de um vetor em relação a um sistema de referência fixo e em relação a um sistema de referência rotativo. Representando por $(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ}$ a taxa de variação de um vetor **Q** em relação a um sistema de referência fixo *OXYZ* e por $(\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz}$ sua taxa de variação em relação a um sistema de referência rotativo *Oxyz*, obtivemos a relação fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \qquad (15.31)$$

onde Ω é a velocidade angular do sistema de referência rotativo.

Essa relação fundamental será aplicada agora à solução de problemas bidimensionais.

2. Movimento plano de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo. Usando a relação fundamental anterior e representando por $\mathcal{F}$ o sistema de referência rotativo, obtivemos as seguintes expressões para a velocidade e para a aceleração da partícula *P*:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (15.33)$$
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.36)$$

Nessas equações:

a. O subscrito *P* refere-se ao movimento absoluto da partícula *P*, ou seja, ao seu movimento em relação a um sistema de referência fixo *OXY*.

b. O subscrito *P′* refere-se ao movimento do ponto *P′* do sistema de referência rotativo $\mathcal{F}$ que coincide com *P* no instante considerado.

c. O subscrito $P/\mathcal{F}$ refere-se ao movimento da partícula *P* relativo ao sistema de referência rotativo $\mathcal{F}$.

d. O termo $\mathbf{a}_c$ representa a aceleração de Coriolis do ponto *P*. Sua intensidade é de $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ e sua orientação é encontrada girando-se 90° $v_{P/\mathcal{F}}$ no sentido de rotação do sistema de referência $\mathcal{F}$.

Você deve ter em mente que a aceleração de Coriolis precisa ser levada em consideração sempre que uma parte do mecanismo que está sendo analisado move-se em relação a uma outra parte que está girando. Os problemas que encontrará aqui envolvem colares que deslizam sobre barras rotativas, lanças de guindastes que giram em um plano vertical etc.

Ao resolver um problema envolvendo um sistema de referência rotativo, você verificará que é conveniente desenhar diagramas vetoriais representando as Eqs. (15.33) e (15.36), respectivamente, e usar esses diagramas para obter tanto uma solução analítica como uma solução gráfica.

PROBLEMAS

15.150 e 15.151 Duas barras rotativas estão conectadas por um bloco deslizante P. A barra presa em A gira com velocidade angular constante ω_A. Para os dados fornecidos, determine para a posição mostrada nas figuras (*a*) a velocidade angular da barra presa em B, (*b*) a velocidade relativa do bloco deslizante P com relação à barra na qual ele desliza.

15.150 $b = 200$ mm, $\omega_A = 6$ rad/s.

15.151 $b = 300$ mm, $\omega_A = 10$ rad/s.

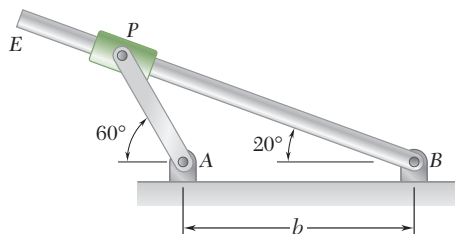



Figura P15.150 e P15.152

Figura P15.151 e P15.153

15.152 e 15.153 Duas barras rotativas estão conectadas por um bloco deslizante P. A velocidade $\mathbf{v}_0$ do bloco deslizante relativa à barra em que ele desliza tem velocidade constante e está orientada para fora. Para os dados fornecidos, determine a velocidade angular de cada barra para a posição mostrada nas figuras.

15.152 $b = 300$ mm, $v_0 = 480$ mm/s.

15.153 $b = 200$ mm, $v_0 = 200$ mm/s.

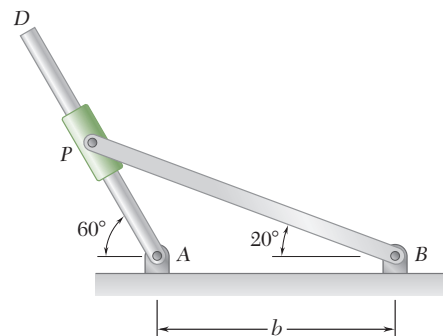
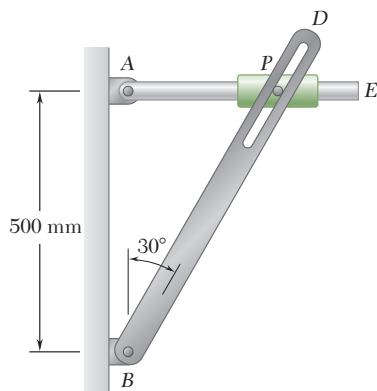



Figura P15.154 e P15.155

15.154 e 15.155 O pino P está preso ao colar mostrado na figura; o movimento do pino é guiado por um rasgo cortado na barra BD e pelo colar que desliza sobre a barra AE. Sabendo que, no instante considerado, as barras giram no sentido horário com velocidades angulares constantes, determine a velocidade do pino P para os dados fornecidos.

15.154 $\omega_{AE} = 4$ rad/s, $\omega_{bd} = 1{,}5$ rad/s.

15.155 $\omega_{AE} = 3{,}5$ rad/s, $\omega_{BD} = 2{,}4$ rad/s.

Figura P15.156 e P15.157

15.156 e 15.157 Duas barras AE e BD passam por meio de furos usinados em um bloco hexagonal. (Os furos são usinados em planos diferentes para que as barras não se toquem.) Sabendo que, no instante considerado, a barra AE gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine, para os dados fornecidos, a velocidade relativa do bloco com respeito a cada barra.

15.156 (*a*) $\theta = 90°$, (*b*) $\theta = 60°$.

15.157 $\theta = 45°$.

15.158 Quatro pinos deslizam em quatro ranhuras separadas cortadas em uma placa circular como mostrado na figura. Quando a placa está em repouso, cada pino tem uma velocidade orientada conforme a figura, com a mesma intensidade constante u. Se cada pino mantém a mesma velocidade relativamente à placa quando ela gira em torno de O a uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, no sentido anti-horário, determine a aceleração de cada pino.

Figura *P15.158*

15.159 Resolva o Problema 15.158 admitindo que a placa gire em torno de O com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, no sentido horário.

15.160 No instante mostrado na figura, o comprimento da lança AB está sendo *diminuído* a uma taxa constante de 0,2 m/s e a lança está sendo baixada a uma taxa constante de 0,08 rad/s. Determine (*a*) a velocidade do ponto B, (*b*) a aceleração do ponto B.

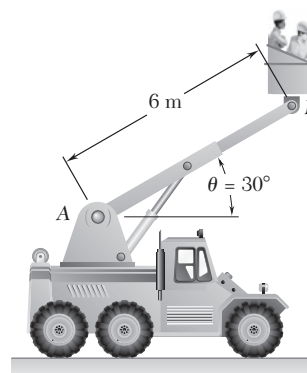



Figura P15.160 e P15.161

15.161 No instante mostrado na figura, o comprimento da lança AB está sendo *aumentado* a uma taxa constante de 0,2 m/s e a lança está sendo baixada a uma taxa constante de 0,08 rad/s. Determine (*a*) a velocidade do ponto B, (*b*) a aceleração do ponto B.

Figura P15.162 e P15.163

15.162 e 15.163 Uma luva BC é soldada a um braço que gira em torno de A com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Na posição mostrada na figura, a barra DF está sendo movida para a esquerda a uma velocidade constante $u = 400$ mm/s em relação a luva. Para a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ fornecida, determine a aceleração (*a*) do ponto D, (*b*) do ponto da barra DF que coincide com E.

15.162 $\boldsymbol{\omega} = (3 \text{ rad/s})\mathbf{i}$.

15.163 $\boldsymbol{\omega} = (3 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

15.164 A cabine de um elevador de mina move-se para baixo com uma velocidade constante de 12 m/s. Determine a intensidade e a orientação da aceleração de Coriolis da cabine se o elevador estiver localizado (*a*) na linha do equador, (*b*) a 40° de latitude norte, (*c*) a 40° de latitude sul.

15.165 Um trenó com propulsão por foguete é testado em uma pista reta construída ao longo de um meridiano. Sabendo que a pista está localizada a 40° de latitude norte, determine a aceleração de Coriolis do trenó quando ele se move para o norte a uma velocidade de 900 km/h.

15.166 O movimento do bocal *D* é controlado pelo braço *AB*. No instante mostrado na figura, o braço está girando no sentido anti-horário a uma taxa constante $\omega = 2{,}4$ rad/s, e a porção *BC* está sendo estendida a uma taxa constante $u = 250$ mm/s em relação ao braço. Para cada um dos sistemas mostrados, determine a aceleração do bocal *D*.

Figura P15.166

15.167 Resolva o Problema 15.166 admitindo que a direção da velocidade relativa *u* seja invertida, de modo que a porção *BD* esteja sendo retraída.

15.168 e 15.169 Uma corrente é enrolada em torno de duas engrenagens de 40 mm de raio, que podem girar livremente em relação ao braço *AB*, de 320 mm. A corrente move-se em torno do braço *AB* no sentido horário a uma taxa constante de 80 mm/s relativamente ao braço. Sabendo que, na posição mostrada na figura, o braço *AB* gira no sentido horário em torno de *A* a uma taxa constante $\omega = 0{,}75$ rad/s, determine a aceleração de cada um dos elos indicados da corrente.

15.168 Elos 1 e 2.

15.169 Elos 3 e 4.

Figura P15.168 e P15.169

15.170 A barra *AB* de comprimento *R* gira em torno *A* com velocidade angular constante ω_1 no *sentido horário*. Ao mesmo tempo, a barra *BD* de comprimento *r* gira em torno de *B* com velocidade angular constante ω_2 no *sentido anti-horário* com relação da barra *AB*. Mostre que se $\omega_2 = 2\omega_1$, a aceleração do ponto *D* passa por meio do ponto *A*. Além disso, mostre que o resultado é independente de *R*, *r* e θ.

Figura *P15.170* e P15.171

15.171 A barra *AB* de comprimento $R = 300$ mm gira em torno *A* com velocidade angular constante ω_1 de 5 rad/s no *sentido horário*. Ao mesmo tempo, a barra *BD* de comprimento $r = 160$ mm gira em torno de *B* com velocidade angular constante $\omega_2 = 3$ rad/s no *sentido anti-horário* com relação da barra *AB*. Sabendo que $\theta = 60°$, determine, para a posição mostrada na figura, a aceleração do ponto *D*.

15.172 O colar P desliza para fora a uma velocidade relativa constante u ao longo da barra AB, que gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante de 20 rpm. Sabendo que $r = 250$ mm quando $\theta = 0$ e que o colar atinge B quando $\theta = 90°$, determine a intensidade da aceleração do colar P no momento exato em que ele atinge B.

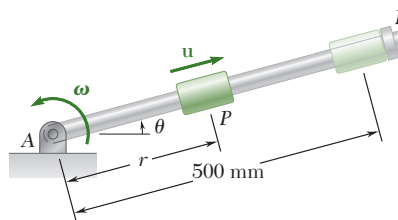



Figura *P15.172*

15.173 O pino P desliza em uma ranhura circular cortada na placa mostrada na figura com uma velocidade relativa constante $u = 90$ mm/s. Sabendo que, no instante mostrado na figura, a placa gira no sentido horário em torno de A a uma taxa constante $\omega = 3$ rad/s, determine a aceleração do pino se ele estiver localizado (*a*) no ponto A, (*b*) no ponto B, (*c*) no ponto C.

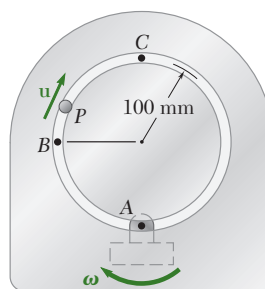



Figura *P15.173* e P15.174

15.174 O pino P desliza em uma ranhura circular cortada na placa mostrada na figura com uma velocidade relativa constante $u = 90$ mm/s. Sabendo que, no instante mostrado, a velocidade angular ω da placa é de 3 rad/s no sentido horário e que ela decresce a uma taxa de 5 rad/s^2, determine a aceleração do pino se ele estiver localizado (*a*) no ponto A, (*b*) no ponto B, (*c*) no ponto C.

15.175 e 15.176 Sabendo que, no instante mostrado na figura, a barra articulada em B gira no sentido anti-horário com velocidade angular constante ω_B de 6 rad/s, determine a velocidade angular e a aceleração angular da barra articulada em A.

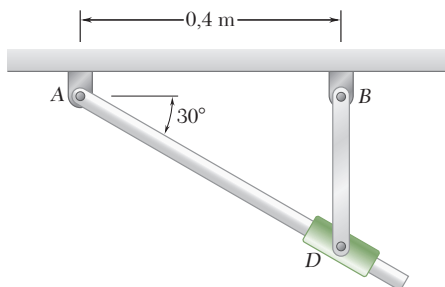



Figura P15.175

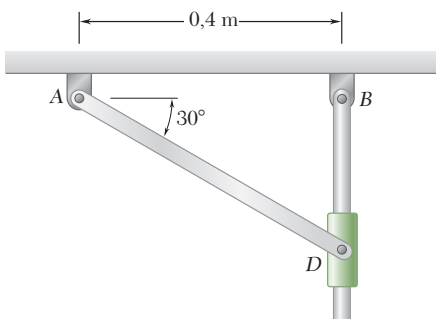



Figura P15.176

15.177 No instante mostrado na figura, a barra BC tem uma velocidade angular de 3 rad/s e uma aceleração de 2 rad/s^2, ambas no sentido anti-horário. Determine a aceleração angular da placa.

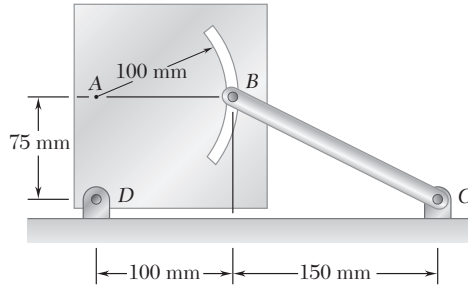



Figura P15.177 e P15.178

15.178 No instante mostrado na figura, a barra BC tem uma velocidade angular de 3 rad/s e uma aceleração de 2 rad/s^2, ambas no sentido horário. Determine a aceleração angular da placa.

15.179 O mecanismo de Genebra mostrado na figura é usado para atribuir um movimento rotatório intermitente ao disco S. O disco D gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular constante ω_D de 8 rad/s. Um pino P é preso ao disco D e pode deslizar em uma das seis ranhuras igualmente espaçadas no disco S. É desejável que a velocidade angular do disco S seja nula nos instantes em que o pino entra e sai de cada uma das seis ranhuras; isso acontecerá se a distância entre os centros dos discos e os raios dos discos estiver relacionada do modo indicado. Determine a velocidade angular e a aceleração angular do disco S no instante em que $\phi = 150°$.

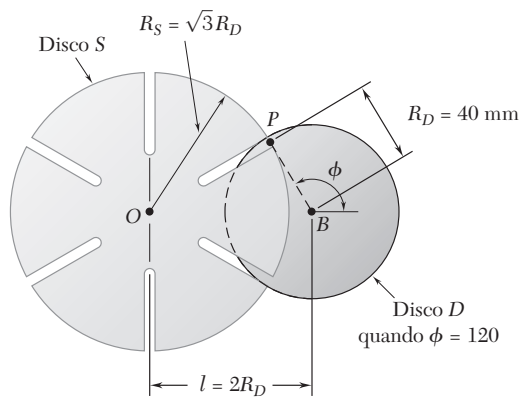



Figura P15.179

15.180 No Problema 15.179, determine a velocidade e a aceleração angulares do disco S no instante em que $\phi = 135°$.

15.181 O disco mostrado na figura gira no sentido horário com uma velocidade angular constante de 12 rad/s. No instante mostrado na figura, determine (a) a velocidade angular e a aceleração angular da barra BD, (b) a velocidade e a aceleração do ponto da barra coincidente com E.

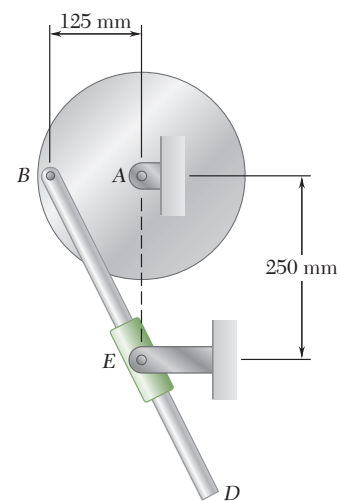



Figura P15.181

***15.182** A barra AB passa por meio de um colar que está soldado na ligação DE. Sabendo que no instante mostrado o bloco A se desloca para a direita em uma velocidade constante de 2 m/s, determine (*a*) a velocidade angular da barra AB, (*b*) a velocidade relativa ao colar do ponto da barra em contato com o colar, (*c*) a aceleração do ponto da barra em contato com o colar. (*Dica:* a barra AB e a ligação DE tem o mesmo ω e o mesmo α.)

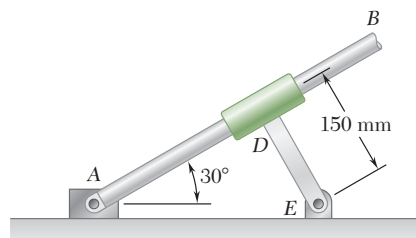



Figura P15.182

***15.183** Resolva o Problema 15.182 considerando que o bloco A se desloca para a esquerda com velocidade constante de 2 m/s.

*15.12 Movimento em torno de um ponto fixo

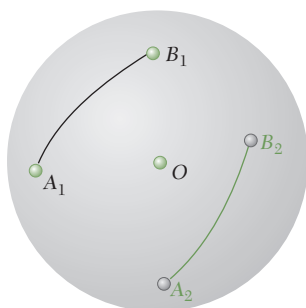
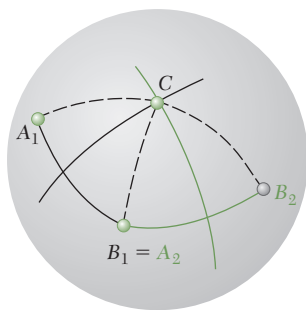
(*a*)

(*b*)

Figura 15.31

Na Seção 15.3, o movimento de um corpo rígido forçado a girar em torno de um eixo fixo foi considerado. O caso mais geral do movimento de um corpo rígido que tem um ponto fixo O será examinado agora.

Primeiramente, será demonstrado que *o deslocamento mais geral de um corpo rígido com um ponto fixo O é equivalente à uma rotação do corpo em torno de um eixo* por meio *de O*.* Em vez de considerar o próprio corpo rígido, podemos destacar uma esfera de centro O do corpo e analisar o movimento dessa esfera. Naturalmente, o movimento da esfera caracteriza por completo o movimento do corpo dado. Como três pontos definem a posição de um sólido no espaço, o centro O e dois pontos A e B sobre a superfície da esfera definirão a sua posição e, portanto, a posição do corpo. Considere os pontos A_1 e B_1 como caracterizando a posição da esfera em um instante, e A_2 e B_2 os mesmos pontos caracterizando a posição da esfera em um instante posterior (Fig. 15.31*a*). Como a esfera é rígida, os comprimentos dos arcos de grande círculo A_1B_1 e A_2B_2 precisam ser os mesmos, mas, exceto por esse requisito, as posições de A_1, A_2, B_1 e B_2 são arbitrárias. Propomo-nos a demonstrar que os pontos A e B podem ser levados, respectivamente, de A_1 e B_1 para A_2 e B_2 por uma rotação única da esfera em torno de um eixo.

Por conveniência, e sem perda de generalidade, selecionamos o ponto B de modo que sua posição inicial coincida com a posição final de A; logo, $B_1 = A_2$ (Fig. 15.31*b*). Desenhamos os arcos de grande círculo A_1B_1, A_2B_2 e os arcos bissetores, respectivamente, de A_1A_2 e A_2B_2. Seja C o ponto de interseção desses dois últimos arcos; completamos a construção, desenhando A_1C, A_2C e B_2C. Conforme mencionado anteriormente, por causa da rigidez da esfera, $A_1B_1 = A_2B_2$. Como C é equidistante de A_1, A_2 e B_2 por construção, temos também que $A_1C = A_2C = B_2C$.

* Este resultado é conhecido como *teorema de Euler*.

Resultado disso é que os triângulos esféricos A_1CA_2 e B_1CB_2 são congruentes e que os ângulos A_1CA_2 e B_1CB_2 são iguais. Representado por θ o valor comum desses ângulos, concluímos que a esfera pode ser levada de sua posição inicial para sua posição final com uma rotação única da esfera de um ângulo θ em torno do eixo OC.

Por conseguinte, o movimento durante um intervalo de tempo Δt de um corpo rígido com um ponto fixo O pode ser considerado como uma rotação de $\Delta\theta$ em torno de um certo eixo. Desenhando ao longo desse eixo um vetor de intensidade $\Delta\theta/\Delta t$ e fazendo Δt tender a zero, obtemos no limite *o eixo instantâneo de rotação* e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo no instante considerado (Fig. 15.32). A velocidade de uma partícula P do corpo pode ser obtida, como na Seção 15.3, efetuando-se o produto vetorial de $\boldsymbol{\omega}$ e do vetor de posição $\mathbf{r}$ da partícula:

Figura 15.32

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

A aceleração da partícula é obtida por diferenciação de (15.37) com relação a t. Assim, como na Seção 15.3, obtemos

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

onde a aceleração angular α é definida como sendo a derivada

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{15.39}$$

da velocidade angular ω.

No caso do movimento de um corpo rígido com um ponto fixo, a direção de $\boldsymbol{\omega}$ e do eixo instantâneo de rotação varia de instante para instante. Portanto, a aceleração angular α reflete a variação na direção de $\boldsymbol{\omega}$, assim como sua variação de intensidade e, em geral, *não está orientada ao longo do eixo instantâneo de rotação.* Embora as partículas do corpo localizadas sobre o eixo instantâneo de rotação tenham velocidade nula no instante considerado, elas não têm aceleração nula. E ainda, as acelerações das várias partículas do corpo *não podem* ser determinadas como se o corpo estivesse girando permanentemente em torno do eixo instantâneo.

Relembrando a definição da velocidade de uma partícula com vetor de posição $\mathbf{r}$, notamos que a aceleração angular α, conforme expresso na Eq. (15.39) representa a velocidade da ponta do vetor ω. Essa propriedade pode ser útil para a determinação da aceleração angular de um corpo rígido. Por exemplo, resulta que o vetor α é tangente à curva descrita no espaço pela ponta do vetor $\boldsymbol{\omega}$.

Deve-se notar que o vetor $\boldsymbol{\omega}$ se move no interior do corpo, assim como no espaço. Logo, ele gera dois cones denominados, respectivamente, *cone corporal* e *cone espacial* (Fig. 15.33).* Pode-se mostrar que, em um instante dado qualquer, os dois cones são tangentes ao longo do eixo instantâneo de rotação e que, à medida que o corpo se desloca, o cone corporal parece *rolar* sobre o cone espacial.

Figura 15.33

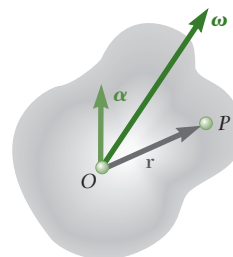
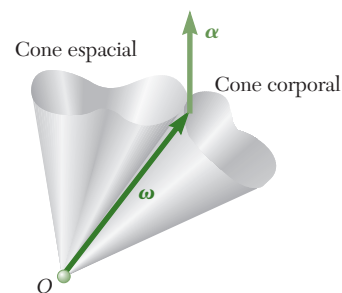
Antes de concluir nossa análise do movimento de um corpo rígido com um ponto fixo, devemos demonstrar que as velocidades angulares são de fato vetores. Conforme indicado na Seção 2.3, algumas grandezas,

* Lembre-se de que um *cone* é, por definição, uma superfície gerada por uma linha reta que passa por um ponto fixo, Em geral, os cones considerados aqui não *serão cones circulares*.

Foto 15.8 Quando a escada gira em torno de sua base fixa, sua velocidade angular pode ser obtida pela adição das velocidades angulares correspondentes a rotações simultâneas em torno de dois eixos diferentes.

como as *rotações finitas* de um corpo rígido, têm intensidade e direção, mas não obedecem à lei de adição do paralelogramo; essas grandezas não podem ser consideradas como vetores. Em contraste, conforme se demonstrará a seguir, as velocidades angulares (assim como as *rotações infinitesimais*) *obedecem* à lei do paralelogramo e, portanto, são realmente grandezas vetoriais.

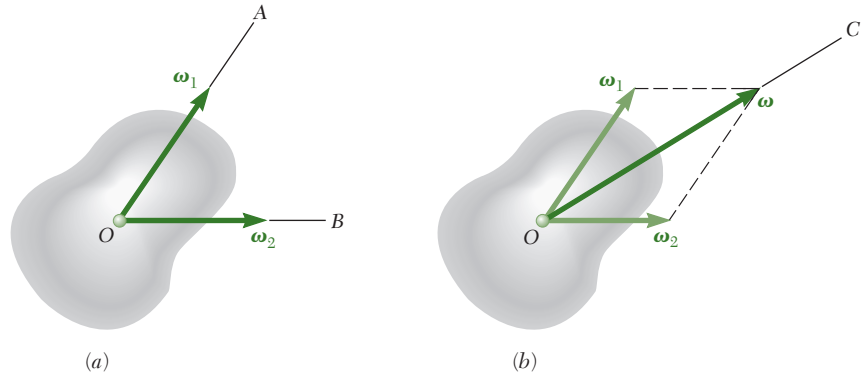



Figura 15.34

Considere um corpo rígido com um ponto fixo O que, em um instante dado, gira simultaneamente em torno dos eixos OA e OB com velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ (Fig. 15.34*a*). Sabemos que, no instante considerado, esse movimento deve ser equivalente a uma rotação única de velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Propomo-nos a demonstrar que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \tag{15.40}$$

ou seja, que a velocidade angular resultante pode ser obtida pela adição de $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ segundo a lei do paralelogramo (Fig. 15.34*b*).

Considere a partícula P do corpo, definida pelo vetor de posição $\mathbf{r}$. Representando por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}$ a velocidade de P quando o corpo gira, respectivamente, em torno de OA apenas, em torno de OB apenas e em torno de ambos os eixos simultaneamente, escrevemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} \qquad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r} \tag{15.41}$$

Mas o caráter vetorial das velocidades *lineares* está bem estabelecido (pois elas representam derivadas de vetores posição). Temos, portanto,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

onde o sinal de adição indica adição vetorial. Substituindo (15.41), escrevemos

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}$$
$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}$$

onde o sinal de adição ainda indica adição vetorial. Como a relação obtida vale para um $\mathbf{r}$ arbitrário, concluímos que (15.40) deve ser verdadeira.

*15.13 Movimento geral

O movimento mais geral de um corpo rígido no espaço será agora considerado. Sejam A e B duas partículas do corpo. Relembrando a partir da Seção 11.12 que a velocidade de B em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$ pode ser expressa como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

onde $\mathbf{v}_{B/A}$ é a velocidade de B relativa a um sistema de referência $AX'Y'Z'$ ligado a A e de orientação fixa (Fig. 15.35). Uma vez que A está fixo nesse sistema de referência, o movimento do corpo relativo a $AX'Y'Z'$ é o movimento de um corpo com um ponto fixo. A velocidade relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ pode então ser obtida da Eq. (15.37) após a troca de $\mathbf{r}$ pelo vetor de posição $\mathbf{r}_{B/A}$ de B em relação a A. Substituindo $\mathbf{v}_{B/A}$ na Eq. (15.42), escrevemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo no instante considerado.

A aceleração de B é obtida por um raciocínio semelhante. Primeiro, escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

e retomando a Eq. (15.38)

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é a aceleração angular do corpo no instante considerado.

As Eqs. (15.43) e (15.44) mostram que *o movimento mais geral de um corpo rígido, em um instante dado qualquer, é equivalente à soma de uma translação,* na qual todas as partículas do corpo têm a mesma velocidade e aceleração de uma partícula de referência A, *e de um movimento no qual a partícula A é considerada fixa.**

Resolvendo (15.43) e (15.44) para $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{a}_A$, mostra-se facilmente que o movimento do corpo em relação a um sistema de referência ligado a B seria caracterizado pelos mesmos vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ do seu movimento relativo a $AX'Y'Z'$. Logo, a velocidade angular e a aceleração angular de um corpo rígido em um dado instante são independentes da escolha do ponto de referência. Por outro lado, deve-se ter em mente que, esteja o sistema de referência ligado a A ou a B, ele precisa manter uma orientação fixa; isto é, ele deve permanecer paralelo ao sistema de referência fixo $OXYZ$ durante todo movimento do corpo rígido. Em muitos problemas será mais conveniente usar um sistema de referência móvel que possa gi-

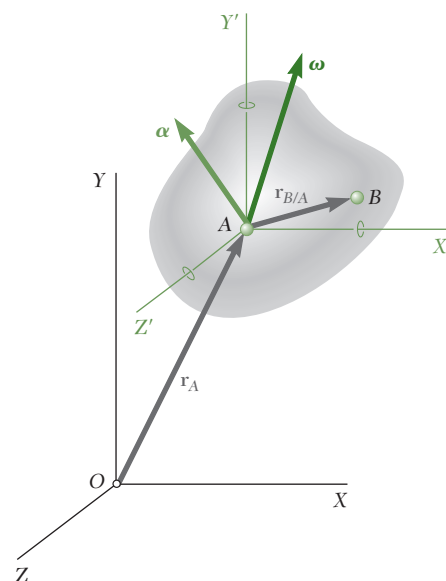
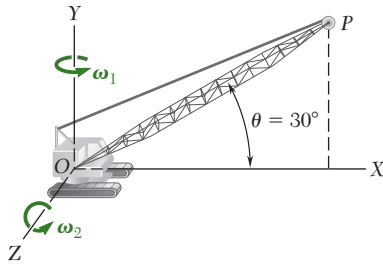
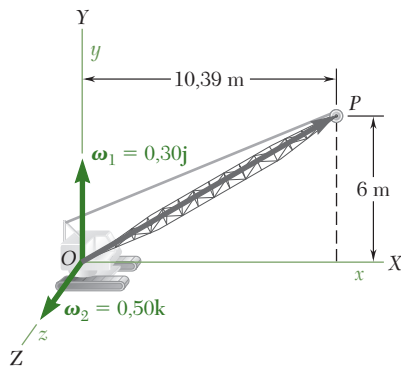



Figura 15.35

* A partir da Seção 15.12, lembre-se de que, em geral, os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ não são colineares e que a aceleração das partículas do corpo em seu movimento relativo ao sistema de referência $AX'Y'Z'$ não pode ser obtida como se o corpo estivesse girando permanentemente em torno do eixo instantâneo que passa por A.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.11

O guindaste mostrado na figura gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 0,30 rad/s. Simultaneamente, a lança está sendo erguida com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 0,50 rad/s em relação à cabine. Sabendo que o comprimento da lança OP é l = 12 m, determine (*a*) a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da lança, (*b*) a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ da lança, (*c*) a velocidade **v** da ponta da lança e (*d*) a aceleração **a** da ponta da lança.

SOLUÇÃO

a. Velocidade angular da lança. Adicionando a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ da cabine e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_2$ da lança em relação à cabine, obtemos a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da lança no instante considerado

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \qquad \boldsymbol{\omega} = (0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j} + (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$

b. Aceleração angular da lança. A aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ da lança é obtida por diferenciação de $\boldsymbol{\omega}$. Como o vetor $\boldsymbol{\omega}_1$ é constante em intensidade e direção, temos

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = 0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2$$

onde a taxa de variação $\dot{\boldsymbol{\omega}}_2$ deve ser calculada em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$. Entretanto, é mais conveniente usar um sistema de referência $Oxyz$ ligado à cabine e girando com ela, pois o vetor $\boldsymbol{\omega}_2$ também gira com a cabine e, portanto, tem taxa de variação nula em relação a esse sistema de referência. Usando a Eq. (15.31) com $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}_2$ e $\Omega = \boldsymbol{\omega}_1$, escrevemos

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q}$$
$$(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{OXYZ} = 0 + (0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (0{,}15 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i} \quad ◀$$

c. Velocidade da ponta da lança. Observando que o vetor de posição do ponto P é $\mathbf{r} = (10{,}39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}$ e usando a expressão encontrada para $\boldsymbol{\omega}$ na parte *a*, escrevemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0{,}30 \text{ rad/s} & 0{,}50 \text{ rad/s} \\ 10{,}39 \text{ m} & 6 \text{ m} & 0 \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{v} = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5{,}20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3{,}12 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

d. Aceleração da ponta da lança. Relembrando que $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, escrevemos

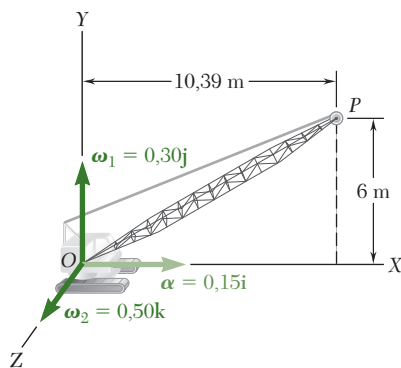
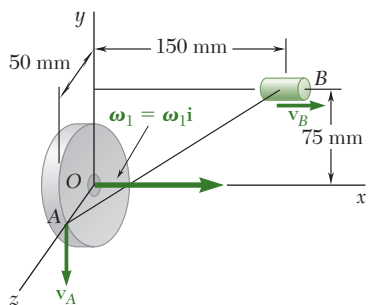
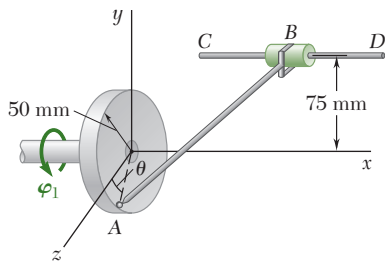
$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0{,}15 & 0 & 0 \\ 10{,}39 & 6 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0{,}30 & 0{,}50 \\ -3 & 5{,}20 & -3{,}12 \end{vmatrix}$$
$$= 0{,}90\mathbf{k} - 0{,}94\mathbf{i} - 2{,}60\mathbf{i} - 1{,}50\mathbf{j} + 0{,}90\mathbf{k}$$

$$\mathbf{a} = -(3{,}54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1{,}50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1{,}80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.12

A barra AB de comprimento de 175 mm está presa ao disco por uma junta articulada e ao colar B por um grampo em U. O disco gira no plano yz a uma taxa constante $\omega_1 = 12$ rad/s, ao passo que o colar está livre para deslizar ao longo da barra horizontal CD. Para a posição $\theta = 0$, determine (a) a velocidade do colar e (b) a velocidade angular da barra.

SOLUÇÃO

$\boldsymbol{\omega}_1 = 12\,\mathbf{i}$
$\mathbf{r}_A = 500\text{ mm}\mathbf{k}$
$\mathbf{r}_B = 150\text{ mm}\mathbf{i} + 75\text{ mm}\mathbf{j}$
$\mathbf{r}_{B/A} = 150\text{ mm}\mathbf{i} + 75\text{ mm}\mathbf{j} - 50\text{ mm}\mathbf{k}$

a. Velocidade do colar. Como o ponto A está preso ao disco e como o colar B desloca-se em uma direção paralela ao eixo x, temos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_A = 12\mathbf{i} \times 5\mathbf{k} = -600\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_B = v_B\mathbf{i}$$

Representando por $\boldsymbol{\omega}$ a velocidade angular da barra, escrevemos

$$v_B\mathbf{i} = -600\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 150 & 75 & -50 \end{vmatrix}$$

$$v_B\mathbf{i} = -600\mathbf{j} + (-50\omega_y - 75\omega_z)\mathbf{i} + (150\omega_z + 50\omega_x)\mathbf{j} + (75\omega_x - 150\omega_y)\mathbf{k}$$

Igualando os coeficientes dos vetores unitários, obtemos

$$v_B = -50\omega_y - 75\omega_z \qquad (1)$$
$$600 = 50\omega_x + 150\omega_z \qquad (2)$$
$$0 = 75\omega_x - 150\omega_y \qquad (3)$$

Claramente, as três equações obtidas não podem ser resolvidas para as quatro incógnitas v_B, $\boldsymbol{\omega}_x$, $\boldsymbol{\omega}_y$ e $\boldsymbol{\omega}_z$. Uma equação adicional, refletindo o tipo de conexão em B, será obtida na parte b. Todavia, uma vez que a velocidade de B não depende dessa conexão, devemos ser capazes de obter v_B por eliminação das outras incógnitas das Eqs. (1), (2) e (3). Notemos que $\boldsymbol{\omega}_x$ pode ser eliminada multiplicando-se a Eq. (2) por 3, a Eq. (3) por -2 e somando-as, e que $\boldsymbol{\omega}_y$ e $\boldsymbol{\omega}_z$ podem ser eliminadas de modo semelhante. Multiplicando as Eqs. (1), (2) e (3) por 6, 3 e -2, respectivamente, e somando-as, verificamos que todos os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ são eliminados, resultando em uma equação que pode se resolvida para $\mathbf{v}_B$:

$$6v_B + 1.800 = 0 \qquad v_B = -300 \qquad \mathbf{v}_B = -(300\text{ mm/s})\mathbf{i} \quad ◀$$

b. Velocidade angular da barra *AB*. Observamos que a velocidade angular não pode ser determinada somente a partir das Eqs. (1), (2) e (3). Uma equação adicional é obtida considerando-se a restrição imposta pelo grampo em B.

A conexão colar-grampo em B permite a rotação de AB em torno da barra CD e também em torno de um eixo perpendicular ao plano que contém AB e CD. Ela impede a rotação de AB em torno do eixo EB, que é perpendicular a CD e pertence ao plano contendo AB e CD. Assim, a projeção de $\boldsymbol{\omega}$ sobre $\mathbf{r}_{E/B}$ deve ser nula e escrevemos*

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{E/B} = 0 \qquad (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (-75\mathbf{j} + 50\mathbf{k}) = 0$$
$$-75\omega_y + 50\omega_z = 0 \qquad (4)$$

Resolvendo as Eqs. de (1) até (4) simultaneamente, obtemos

$$v_B = -300 \qquad \omega_x = 3{,}69 \qquad \omega_y = 1{,}846 \qquad \omega_z = 2{,}77$$
$$\boldsymbol{\omega} = (3{,}69\text{ rad/s})\mathbf{i} + (1{,}846\text{ rad/s})\mathbf{j} + (2{,}77\text{ rad/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

---

* Poderíamos ter observado também que a direção de EB é aquela do produto vetorial triplo $\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})$ e escrito $\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r}_{B/C} \times (\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{B/A})] = 0$. Essa formulação seria particularmente útil caso a barra CD estivesse inclinada.

rar, assim como fazer o movimento de translação. O uso de tais sistemas de referência móveis será discutido nas Seções 15.14 e 15.15.

Nesta seção, você iniciou o estudo da *cinemática de corpos rígidos em três dimensões.* Primeiramente, estudou o *movimento de um corpo rígido em torno de um ponto fixo* e, em seguida, o *movimento geral de um corpo rígido.*

A. Movimento de um corpo rígido em torno de um ponto fixo. Para analisar o movimento de um ponto B de um corpo rígido que gira em torno de um ponto fixo O, você pode precisar seguir alguns ou todos os seguintes passos.

1. Determine o vetor de posição r que liga o ponto fixo O ao ponto B.

2. Determine a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo em relação a um sistema de referência fixo. Frequentemente, a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ será obtida pela adição de dois componentes de velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$. [Problema Resolvido 15.11].

3. Calcule a velocidade de *B* usando a equação

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

Normalmente, seu cálculo ficará mais fácil se você expressar o produto vetorial como um determinante.

4. Determine a aceleração angular α do corpo. A aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ representa a taxa de variação $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ}$ do vetor $\boldsymbol{\omega}$ *em relação a um sistema de referência fixo OXYZ* e reflete tanto *uma variação da intensidade como da direção* da velocidade angular. Entretanto, ao calcular $\boldsymbol{\alpha}$, você pode achar conveniente calcular em primeiro lugar a taxa de variação $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz}$ de $\boldsymbol{\omega}$ em relação a um sistema de referência rotativo $Oxyz$ de sua escolha e usar a Eq. (15.31) da lição anterior para obter $\boldsymbol{\alpha}$. Você escreverá

$$\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular do sistema de referência rotativo $Oxyz$ [Problema Resolvido 15.11].

5. Calcule a aceleração de *B* usando a equação

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

Observe que o produto vetorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ representa a velocidade do ponto B e foi calculado no passo 3. Além disso, o cálculo do primeiro produto vetorial em (15.38) ficará mais fácil se você expressar esse produto sob a forma de determinante. Lembre-se de que, como no caso do movimento plano de um corpo rígido, o eixo instantâneo de rotação *não pode* ser usado para determinar as acelerações.

B. Movimento geral de um corpo rígido. O movimento geral de um corpo rígido pode ser considerado como *a soma de uma translação e de uma rotação.* Tenha em mente o seguinte:

a. Na parte de translação do movimento, todos os pontos do corpo têm *a mesma velocidade* $\mathbf{v}_A$ *e a mesma aceleração* $\mathbf{a}_A$ do ponto A do corpo que foi selecionado como ponto de referência.

b. Na parte de rotação do movimento, o mesmo ponto de referência A é admitido como um *ponto fixo.*

1. Para determinar a velocidade do ponto *B* do corpo rígido quando você conhece a velocidade do ponto de referência A e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo, você deve simplesmente adicionar $\mathbf{v}_A$ à velocidade $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ de B em sua rotação em torno de A:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

Como indicado anteriormente, o cálculo do produto vetorial normalmente ficará facilitado se você expressar esse produto sob a forma de determinante.

A Eq. (15.43) também pode ser usada para determinar a intensidade de $\mathbf{v}_B$ quando sua direção é conhecida, mesmo que $\boldsymbol{\omega}$ seja desconhecida. Embora as três equações escalares correspondentes sejam linearmente dependentes e os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ permaneçam indeterminados, esses componentes podem ser eliminados e $\mathbf{v}_A$ pode ser encontrado usando-se uma combinação linear apropriada das três equações [Problema Resolvido 15.12, parte *a*]. Alternativamente, você pode atribuir um valor arbitrário a um dos componentes de $\boldsymbol{\omega}$ e resolver as equações para $\mathbf{v}_A$. Entretanto, uma equação adicional precisa ser procurada a fim de determinar os valores reais dos componentes de $\boldsymbol{\omega}$ [Problema Resolvido 15.12, parte *b*].

2. Para determinar a aceleração do ponto *B* do corpo rígido quando você conhece a aceleração $\mathbf{a}_A$ do ponto de referência A e a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ do corpo, você deve simplesmente adicionar $\mathbf{a}_A$ à aceleração de B em sua rotação em torno de A, do modo expresso na Eq. (15.38):

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

Observe que o produto vetorial $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ representa a velocidade $\mathbf{v}_{B/A}$ *de* B relativa a A e já pode ter sido determinada como parte do seu cálculo de $\mathbf{v}_B$. Lembre-se também de que o cálculo dos dois outros produtos vetoriais ficará mais fácil se você expressar esses produtos sob a forma de determinante.

As três equações escalares associadas à Eq. (15.44) também podem ser usadas para determinar a intensidade de $\mathbf{a}_B$ quando sua direção é conhecida, mesmo que $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ não sejam conhecidas. Embora os componentes $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ sejam indeterminados, você pode atribuir valores arbitrários a um dos componentes de $\boldsymbol{\omega}$ e a um dos componentes de $\boldsymbol{\alpha}$ e resolver as equações para $\mathbf{a}_B$.

PROBLEMAS

15.184 Uma placa *ABD* e uma barra *OB* estão rigidamente conectadas e giram sobre a junta rotulada *O* com velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_x\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Sabendo que $\mathbf{v}_A = (75 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (350 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (v_A)_z\mathbf{k}$ e $\omega_x = 1{,}5$ rad/s, determine (*a*) a velocidade angular da montagem, (*b*) a velocidade angular do ponto *D*.

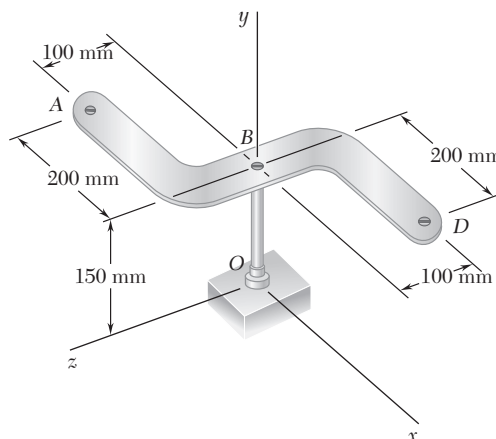



Figura P15.184

15.185 Resolva o Problema 15.184, considerando que $\omega_x = -1{,}5$ rad/s.

15.186 No instante considerado, a antena de radar mostrada na figura gira em torno da origem das coordenadas com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Sabendo que $(v_A)_y = 300$ mm/s, $(v_B)_y = 180$ mm/s e $(v_B)_z = 360$ mm/s, determine (*a*) a velocidade angular da antena, (*b*) a velocidade do ponto *A*.

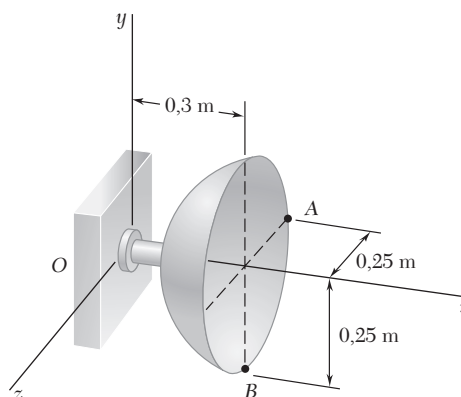



Figura P15.186 e P15.187

15.187 No instante considerado, a antena de radar mostrada na figura gira em torno da origem das coordenadas com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$. Sabendo que $(v_A)_x = 100$ mm/s, $(v_A)_y = -90$ mm/s e $(v_B)_z = 120$ mm/s, determine (*a*) a velocidade angular da antena, (*b*) a velocidade do ponto *A*.

15.188 O conjunto de pás de um ventilador oscilante gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1 = -(360 \text{ rpm})\mathbf{i}$ em relação à caixa do motor.

Determine a aceleração angular do conjunto de pás, sabendo que, no instante mostrado na figura, a velocidade angular e a aceleração angular da caixa do motor são, respectivamente, $\boldsymbol{\omega}_2 = -(2{,}5 \text{ rpm})\mathbf{j}$ e $\alpha_2 = 0$.

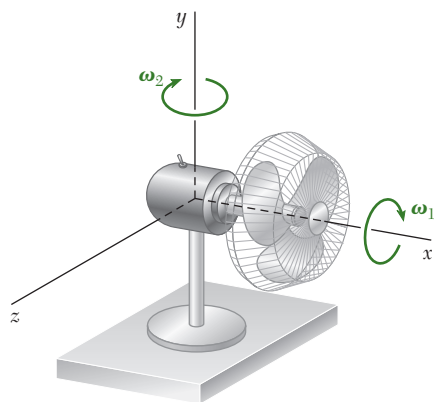



Figura P15.188

15.189 Um rotor de um motor elétrico gira a uma taxa constante $\omega_1 = 1.800$ rpm. Determine a aceleração angular do rotor quando o motor é girado sobre o eixo y com a velocidade constante ω_2 de 6 rpm no sentido anti-horário quando visto na direção positiva do eixo y.

Figura P15.189

15.190 No sistema mostrado na figura, o disco A é livre para girar sobre a barra horizontal AO. Considerando que o disco B é estacionário ($\omega_2 = 0$) e que o eixo OC gira com velocidade angular constante ω_1, determine (*a*) a velocidade angular do disco A, (*b*) a aceleração angular do disco A.

15.191 No sistema mostrado na figura, o disco A é livre para girar sobre a barra horizontal AO. Considerando que o eixo OC e o disco B giram com velocidades angulares constantes ω_1 e ω_2 respectivamente, ambas no sentido anti-horário, determine (*a*) a velocidade angular do disco A, (*b*) a aceleração angular do disco A.

15.192 O braço BCD em forma de L gira em torno do eixo z com uma velocidade angular constante ω_1 de 5 rad/s. Sabendo que o disco de 150 mm de raio gira em torno de BC com uma velocidade angular constante ω_2 de 4 rad/s, determine a aceleração angular do disco.

Figura P15.190 e P15.191

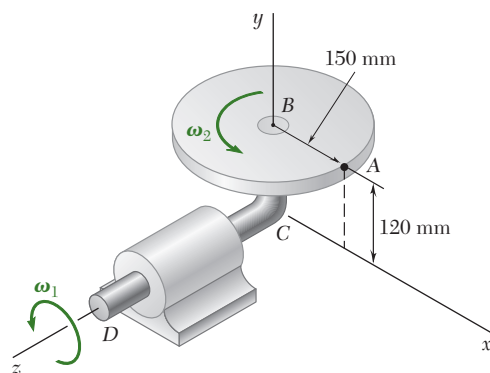



Figura *P15.192*

15.193 No Problema 15.193, determine (*a*) a velocidade do ponto A, (*b*) a aceleração do ponto A.

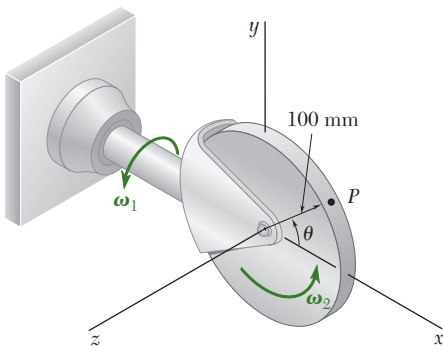



Figura P15.194 e P15.195

15.194 Um disco de 100 mm de raio gira à taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s em torno de um eixo apoiado em uma estrutura presa a uma barra horizontal que gira à taxa constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração angular do disco, (*b*) a aceleração do ponto *P* sobre a periferia do disco se $\theta = 0$, (*c*) a aceleração do ponto *P* sobre a periferia do disco se $\theta = 90°$.

15.195 Um disco de 100 mm de raio gira à taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s em torno de um eixo apoiado em uma estrutura presa a uma barra horizontal que gira a uma taxa constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Sabendo que $\theta = 30°$, determine a aceleração do ponto *P* sobre a periferia do disco.

15.196 Um cano de canhão de comprimento $OP = 4$ m está montado sobre uma torre blindada do modo mostrado na figura. Para manter o cano com a mira em um alvo móvel, o ângulo azimutal β é aumentado a uma taxa $d\beta/dt = 30°/s$ e o ângulo de elevação γ é aumentado a uma taxa $d\gamma/dt = 10°/s$. Para a posição $\beta = 90°$ e $\gamma = 30°$, determine (*a*) a velocidade angular do cano, (*b*) a aceleração angular do cano, (*c*) a velocidade e aceleração do ponto *P*.

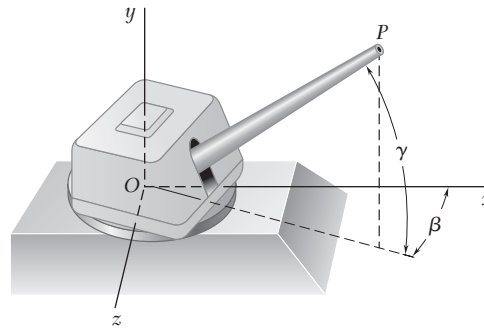



Figura P15.196

15.197 No sistema de engrenagens planetárias mostrado na figura, as engrenagens *A* e *B* estão rigidamente conectadas entre si e giram como uma unidade em torno do eixo inclinado. As engrenagens *C* e *D* giram com velocidades angulares constantes de 30 rad/s e 20 rad/s, respectivamente (ambas no sentido anti-horário quando vistas a partir da direita). Escolhendo o eixo *x* para a direita, o eixo *y* para cima e o eixo *z* apontando para fora do plano da figura, determine (*a*) a velocidade angular comum das engrenagens *A* e *B*, (*b*) a velocidade angular do eixo *FH*, que está rigidamente fixado ao eixo inclinado.

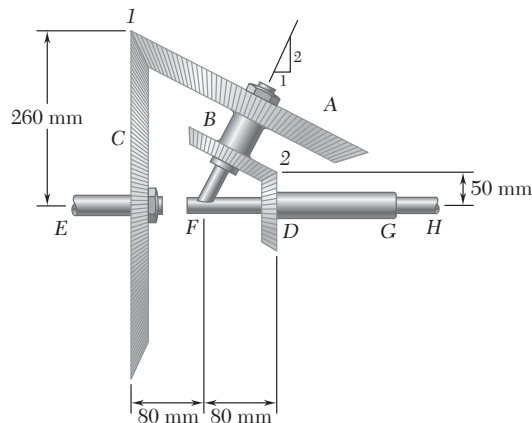



Figura *P15.197*

15.198 Uma roda de 30 mm de raio é montada sobre um eixo OB de comprimento de 100 mm. Ela rola sem deslizar sobre o piso horizontal e seu eixo é perpendicular ao plano da roda. Sabendo que o sistema gira em torno do eixo y a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 2{,}4$ rad/s, determine (*a*) a velocidade angular da roda, (*b*) a aceleração angular da roda e (*c*) a aceleração do ponto C localizado na parte mais elevada da periferia da roda.

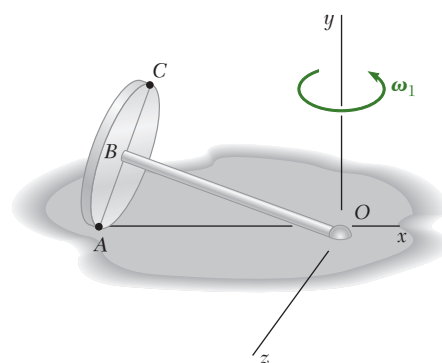



Figura P15.198

15.199 Várias barras estão soldadas juntas para formar um braço guia robótico mostrado na figura que é preso a uma junta rotulada em O. A barra OA desliza na ranhura reta inclinada enquanto a barra OB desliza na ranhura paralela ao eixo z. Sabendo que no instante mostrado $\mathbf{v}_B = (180 \text{ mm/s})\mathbf{k}$, determine (*a*) a velocidade angular do braço guia, (*b*) a velocidade do ponto A, (*c*) a velocidade de ponto C.

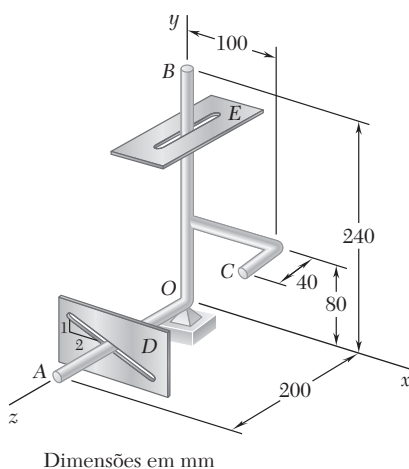
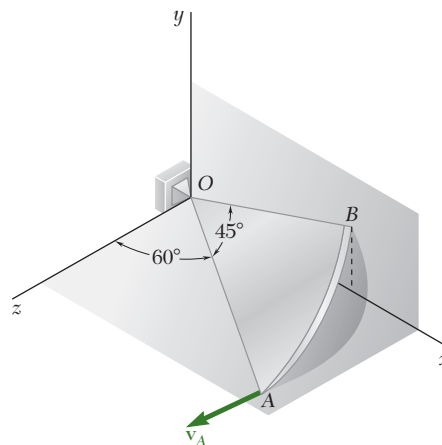



Figura P15.199

15.200 No Problema 15.199, a velocidade do ponto B é conhecida e é constante. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração angular do braço guia, (*b*) a aceleração do ponto C.

Figura P15.201

15.201 Um setor circular de uma placa de 45° com 250 mm de raio é preso a uma junta rotulada em O. Enquanto a aresta OA se desloca na superfície horizontal, a aresta OB de desloca ao longo da parede vertical. Sabendo que o ponto A se desloca com velocidade constante de 1.500 mm/s, determine para a posição mostrada na figura (*a*) a velocidade angular da placa, (*b*) a velocidade do ponto B.

15.202 A barra AB de comprimento de 275 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B se move em direção a uma velocidade constante de 180 mm/s, determine a velocidade do colar A quando $c = 175$ mm.

15.203 A barra AB de comprimento de 275 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B se move em direção a uma velocidade constante de 180 mm/s, determine a velocidade do colar A quando $c = 50$ mm.

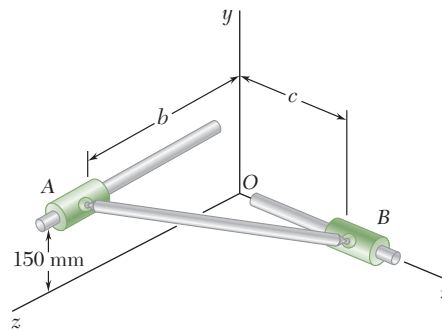



Figura P15.202 e P15.203

Figura P15.204

15.204 A barra AB está conectada por juntas rotuladas ao colar A e ao disco C de 400 mm de diâmetro. Sabendo que o disco C gira no sentido anti-horário à taxa constante $\omega_0 = 3$ rad/s no plano zx, determine a velocidade do colar A para a posição mostrada na figura.

15.205 A barra AB de comprimento de 580 mm está conectada por juntas rotuladas à manivela BC e ao colar A. A manivela BC tem 160 mm de comprimento e gira no plano horizontal xz á taxa constante $\omega_0 = 10$ rad/s. No instante mostrado na figura, quando a manivela BC está paralela ao eixo z, determine a velocidade do colar A.

Figura P15.205

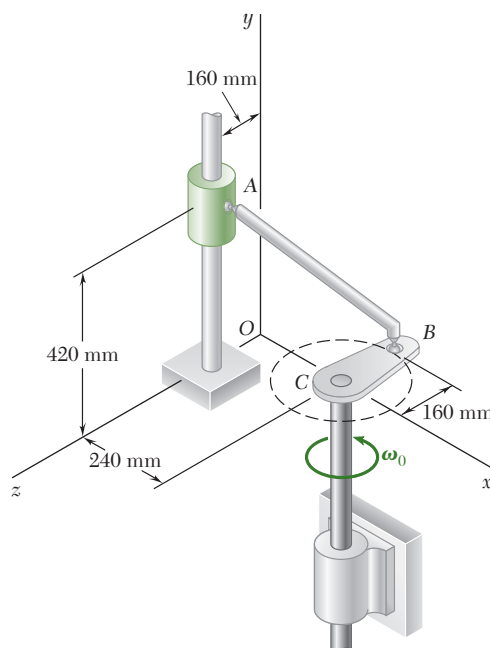



Figura P15.206 e P15.207

15.206 A barra AB de comprimento de 300 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B aproxima-se do ponto D a uma velocidade constante de 50 mm/s, determine a velocidade do colar A quando $c = 80$ mm.

15.207 A barra AB de comprimento de 300 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B aproxima-se do ponto D a uma velocidade constante de 50 mm/s, determine a velocidade do colar A quando $c = 120$ mm.

15.208 A barra AB de comprimento de 500 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B aproxima-se do ponto E a uma velocidade constante de 400 mm/s, determine a velocidade do colar A quando o colar B passa pelo ponto D.

15.209 A barra AB de comprimento de 500 mm está conectada por juntas rotuladas aos colares A e B, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. Sabendo que o colar B aproxima-se do ponto E a uma velocidade constante de 400 mm/s, determine a velocidade do colar A quando o colar B passa pelo ponto C.

Figura P15.208 e P15.209

15.210 Dois eixos AC e EG, que se situam no plano vertical yz, estão conectados por uma junta universal em D. O eixo AC gira com uma velocidade angular constante ω_1 do modo mostrado na figura. No instante em que o braço da cruzeta preso ao eixo AC está na vertical, determine a velocidade angular do eixo EG.

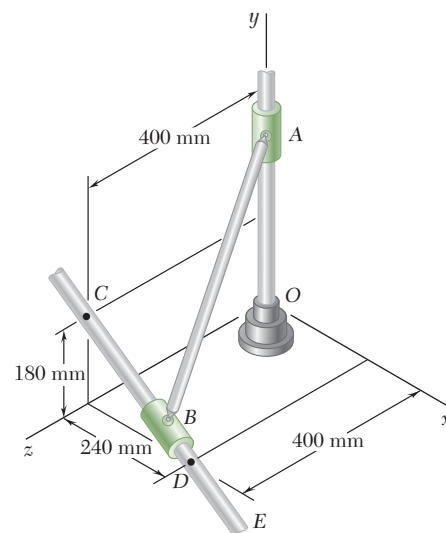
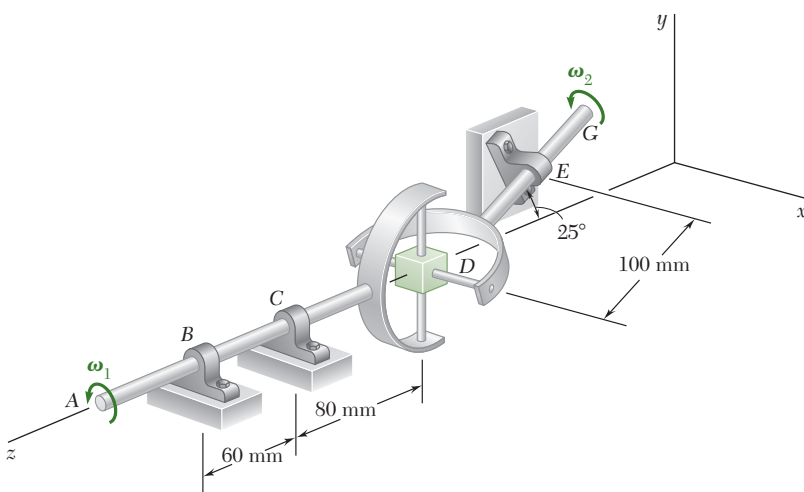



Figura P15.210

15.211 Resolva o Problema 15.210, considerando que o braço da cruzeta preso ao eixo AC está na horizontal.

15.212 No Problema 15.203, a junta rotulada entre a barra e o colar A é substituída por um grampo em U como mostrado na figura. Determine, (a) a velocidade angular da barra, (b) a velocidade do colar A.

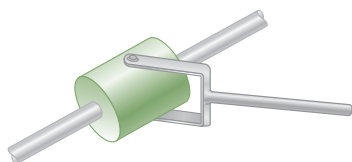
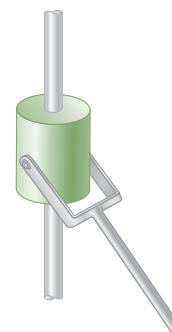



Figura P15.212

Figura P15.213

15.213 No Problema 15.204, a junta rotulada entre a barra e o colar A é substituída por um grampo em U como mostrado na figura. Determine, (a) a velocidade angular da barra, (b) a velocidade do colar A.

15.214 a 15.219 Para o mecanismo do problema indicado nas figuras, determine a aceleração do colar A.

15.214 Mecanismo do Problema 15.202.
15.215 Mecanismo do Problema 15.203.
15.216 Mecanismo do Problema 15.204.
15.217 Mecanismo do Problema 15.205.
15.218 Mecanismo do Problema 15.206.
15.219 Mecanismo do Problema 15.207.

*15.14 Movimento tridimensional de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo. Aceleração de Coriolis

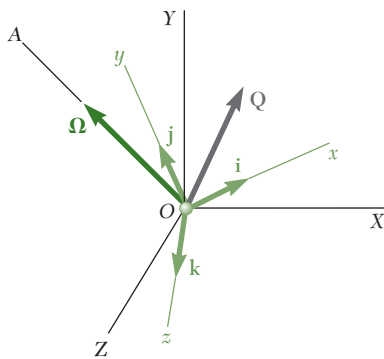



Figura 15.36

Vimos na Seção 15.10 que, dada uma função vetorial $\mathbf{Q}(t)$ e dois sistemas de referência centrados em O − um sistema de referência fixo $OXYZ$ e um sistema de referência rotativo $Oxyz$ –, as taxas de variação de $\mathbf{Q}$ em relação aos dois sistemas de referência satisfazem a relação:

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

Havíamos admitido na ocasião que o sistema de referência $Oxyz$ era obrigado a girar em torno de um eixo fixo OA. Entretanto, a dedução dada na Seção 15.10 permanece válida quando o sistema de referência $Oxyz$ é forçado tão somente a ter um ponto fixo O. Mediante essa hipótese mais geral, o eixo OA representa o eixo *instantâneo* de rotação do sistema de referência $Oxyz$ (Seção 15.12) e o vetor $\mathbf{\Omega}$, sua velocidade angular no instante considerado (Fig.15.36).

Vamos considerar agora o movimento tridimensional de uma partícula P em relação a um sistema de referência rotativo $Oxyz$ forçado a ter uma origem fixa O. Seja $\mathbf{r}$ o vetor de posição de P em um dado instante e $\mathbf{\Omega}$ a velocidade angular do sistema de referência $Oxyz$ em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$ no mesmo instante (Fig. 15.37). As deduções fornecidas na Seção 15.11 para o movimento bidimensional de uma partícula podem ser prontamente estendidas ao caso tridimensional, e a velocidade absoluta $\mathbf{v}_P$ de P (isto é, sua velocidade em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$) pode ser expressa como

Figura 15.37

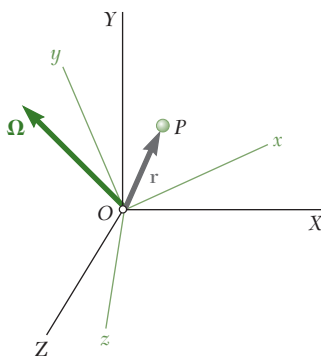
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} + (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.45}$$

Representando por $\mathcal{F}$ o sistema de referência rotativo $Oxyz$, escrevemos essa relação na forma alternativa

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

onde $\mathbf{v}_P$ = velocidade absoluta da partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidade do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidade de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$

A aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ de P pode ser expressa como

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} + (\ddot{\mathbf{r}})_{Oxyz} \tag{15.47}$$

Uma forma alternativa é

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (15.48)$$

onde $\mathbf{a}_P$ = aceleração absoluta da partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleração do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleração de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleração complementar, ou de Coriolis*

Observamos que a aceleração de Coriolis é perpendicular ao vetor $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$. Todavia, como esses vetores usualmente não são perpendiculares entre si, a intensidade de $\mathbf{a}_c$ em geral *não é* igual a $2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$, como era no caso do movimento plano de uma partícula. Observamos ainda que a aceleração de Coriolis se reduz a zero quando os vetores $\mathbf{\Omega}$ e $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ são paralelos ou quando algum deles é nulo.

Os sistemas de referência rotativos são particularmente úteis no estudo do movimento tridimensional de corpos rígidos. Se o corpo rígido tem um ponto fixo O, como era o caso do guindaste do Problema Resolvido 15.11, podemos usar um sistema de referência $Oxyz$ que não é fixo nem rigidamente ligado ao corpo rígido. Representado por $\mathbf{\Omega}$ a velocidade angular do sistema de referência $Oxyz$, decompomos então a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo nos componentes $\mathbf{\Omega}$ e $\boldsymbol{\omega}_{B/F}$, onde o segundo componente representa a velocidade angular do corpo em relação ao sistema de referência $Oxyz$ (ver Problema Resolvido 15.14). Uma escolha apropriada do sistema de referência rotativo muitas vezes conduz a uma análise mais simples do movimento de um corpo rígido do que seria possível com eixos de orientação fixa. Isso é particularmente verdadeiro no caso do movimento tridimensional de um corpo rígido, ou seja, quando o corpo rígido em consideração não possui um ponto fixo (ver Problema Resolvido 15.15).

*15.15 Sistema de referência em movimento geral

Considere um sistema de referência fixo $OXYZ$ e um sistema de referência $Axyz$ que se move de maneira arbitrária, mas conhecida, em relação a $OXYZ$ (Fig. 15.38). Seja P uma partícula movendo-se no espaço. A posição de P é definida em qualquer instante pelo vetor $\mathbf{r}_P$, no sistema de referência fixo, e pelo vetor $\mathbf{r}_{P/A}$, no sistema de referência móvel. Representando por $\mathbf{r}_A$ o vetor de posição de A no sistema de referência fixo, temos

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{P/A} \qquad (15.49)$$

A velocidade absoluta $\mathbf{v}_P$ da partícula é obtida escrevendo-se

$$\mathbf{v}_P = \dot{\mathbf{r}}_P = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{P/A} \qquad (15.50)$$

onde as derivadas estão definidas em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$. Logo, o primeiro termo do membro à direita de (15.50) representa a velocidade $\mathbf{v}_A$ da origem A dos eixos móveis. Por outro lado, como a taxa de variação de um vetor é a mesma em relação a um sistema de referência fixo e a um sistema de referência em translação (Seção

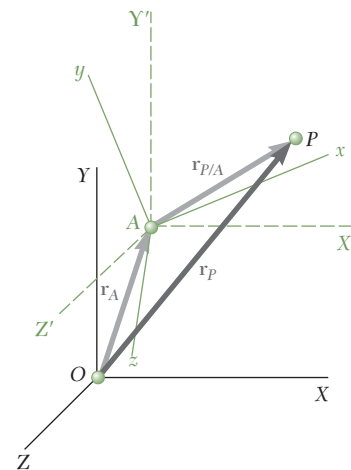



Figura 15.38

* É importante observar a diferença entre a Eq. (15.48) e a Eq. (15.21) da *Seção* 15.8. Ver a nota de rodapé na página 978.

11.10), o segundo termo pode ser tratado como a velocidade $\mathbf{v}_{P/A}$ de P em relação ao sistema de referência $AX'Y'Z'$ de mesma orientação que $OXYZ$ e de mesma origem que $Axyz$. Temos, portanto, que

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{P/A} \tag{15.51}$$

Mas a velocidade $\mathbf{v}_{P/A}$ de P em relação a $AX'Y'Z'$ pode ser obtida de (15.45), trocando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}_{P/A}$ naquela equação. Escrevemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} + (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} \tag{15.52}$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ é a velocidade angular do sistema de referência $Axyz$ no instante considerado.

A aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ da partícula é obtida por diferenciação de (15.51) e escrevendo-se

$$\mathbf{a}_P = \dot{\mathbf{v}}_P = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{v}}_{P/A} \tag{15.53}$$

onde as derivadas estão definidas em relação a qualquer um dos sistemas de referência $OXYZ$ ou $AX'Y'Z'$. Portanto, o primeiro termo do segundo membro de (15.53) representa a aceleração $\mathbf{a}_A$ da origem A dos eixos móveis e o segundo termo representa a aceleração $\mathbf{a}_{P/A}$ de P em relação ao sistema de referência $AX'Y'Z'$. Essa aceleração pode ser obtida de (15.47), trocando $\mathbf{r}$ por $\mathbf{r}_{P/A}$. Logo, escrevemos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{P/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A}) \\ + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz} + (\ddot{\mathbf{r}}_{P/A})_{Axyz}\end{aligned} \tag{15.54}$$

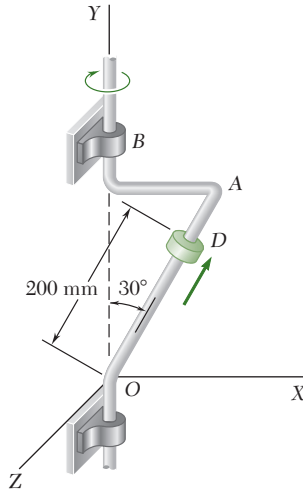
Foto 15.9 O movimento das partículas de ar de um furacão pode ser considerado como o movimento relativo a um sistema de referência ligado à Terra e que gira com ela.

As Eqs. (15.52) e (15.54) tornam possível a determinação da velocidade e aceleração de uma dada partícula em relação a um sistema de referência fixo quando o movimento da partícula é conhecido em relação a um sistema de referência móvel. Essas fórmulas tornam-se mais significativas, e substancialmente mais fáceis de se memorizar, se notarmos que a soma dos dois primeiros termos em (15.52) representa a velocidade do ponto P' do sistema de referência móvel coincidente com P no instante considerado, e que a soma dos três primeiros termos em (15.54) representa a aceleração do mesmo ponto. Logo, as relações (15.46) e (15.48) da seção anterior ainda são válidas no caso de um sistema de referência em movimento geral, e podemos escrever

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

onde os vários vetores envolvidos foram definidos na Seção 15.14.

Deve-se notar que, se o sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ (ou $Axyz$) está em translação, a velocidade e a aceleração do ponto P' do sistema de referência coincidente com P tornam-se iguais, respectivamente, à velocidade e à aceleração da origem A do sistema de referência. Por outro lado, como o sistema de referência mantém uma orientação fixa, $\mathbf{a}_c$ é nula e as relações (15.46) e (15.48) reduzem-se, respectivamente, às relações (11.33) e (11.34), deduzidas na Seção 11.12.

PROBLEMA RESOLVIDO 15.13

A barra dobrada *OAB* gira em torno da vertical *OB*. No instante considerado, sua velocidade e aceleração angulares são, respectivamente, de 20 rad/s e 200 rad/s^2, ambas no sentido horário quando vistas do eixo *Y* positivo. O colar *D* desloca-se ao longo da barra e, no instante considerado, *OD* = 200 mm. A velocidade e a aceleração do colar relativas à barra são, respectivamente, de 1,25 m/s e 15 m/s^2, ambas para cima. Determine (*a*) a velocidade do colar e (*b*) a aceleração do colar.

SOLUÇÃO

Sistemas de referência. O sistema de referência *OXYZ* é fixo. Ligamos o sistema de referência rotativo *Oxyz* à barra dobrada. Portanto, sua velocidade angular e sua aceleração angular relativas a *OXYZ* são $\Omega = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ e $\dot{\Omega} = (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$, respectivamente. O vetor de posição de *D* é

$$\mathbf{r} = (200 \text{ mm})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (100 \text{ mm})\mathbf{i} + (173{,}25 \text{ mm})\mathbf{j}$$

a. Velocidade $\mathbf{v}_D$. Representando por D' o ponto da barra que coincide com *D* e por $\mathcal{F}$ o sistema de referência rotativo *Oxyz* e considerando a Eq. (15.46), escrevemos

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_{D'} + \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

onde

$$\mathbf{v}_{D'} = \Omega \times \mathbf{r} = (-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(100 \text{ mm})\mathbf{i} + (173{,}25 \text{ mm})\mathbf{j}] = (2.000 \text{ mm/s})\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}} = (1.250 \text{ mm/s})(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (625 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (1.083 \text{ mm/s})\mathbf{j}$$

Substituindo os valores obtidos para $\mathbf{v}_{D'}$ e $\mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$ na Eq. (1), encontramos

$$\mathbf{v}_D = (625 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (1083 \text{ mm/s})\mathbf{j} + (2000 \text{ mm/s})\mathbf{k}$$
$$= (0{,}625 \text{ m/s})\mathbf{i} + (1{,}083 \text{ m/s})\mathbf{j} + (2 \text{ m/s})\mathbf{k} \quad ◀$$

b. Aceleração $\mathbf{a}_D$. Considerando a Eq. (15.48), escrevemos

$$\mathbf{a}_D = \mathbf{a}_{D'} + \mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (2)$$

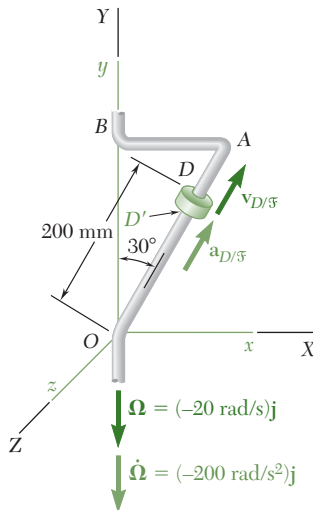
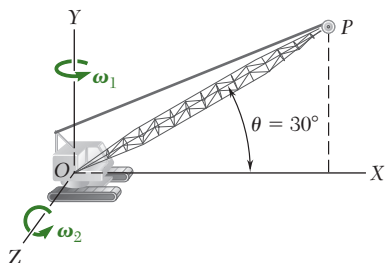
onde

$$\mathbf{a}_{D'} = \dot{\Omega} \times \mathbf{r} + \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$$
$$= (-200 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j} \times [(100 \text{ mm})\mathbf{i} + (173{,}25 \text{ mm})\mathbf{j}] - (20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (2.000 \text{ mm/s})\mathbf{k}$$
$$= +(20.000 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k} - (40.000 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}} = (15.000 \text{ mm/s}^2)(\text{sen } 30°\mathbf{i} + \cos 30°\mathbf{j}) = (7.500 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} + (12.990 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}_c = 2\Omega \times \mathbf{v}_{D/\mathcal{F}}$$
$$= 2(-20 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(625 \text{ mm/s})\mathbf{i} + (1.083 \text{ mm/s})\mathbf{j}] = (25.000 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$$

Substituindo os valores obtidos para $\mathbf{a}_{D'}$, $\mathbf{a}_{D/\mathcal{F}}$ e $\mathbf{a}_c$ na Eq. (2), encontramos

$$\mathbf{a}_D = -(32.5000 \text{ mm/s}^2)\mathbf{i} + (12.990 \text{ mm/s}^2)\mathbf{j} + (45.000 \text{ mm/s}^2)\mathbf{k}$$
$$= -(32{,}5 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} + (12{,}99 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (45 \text{ m/s}^2)\mathbf{k} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.14

O guindaste mostrado na figura gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ de 0,30 rad/s. Simultaneamente, a lança está sendo erguida com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_2$ de 0,50 rad/s em relação à cabine. Sabendo que o comprimento da lança OP é $l = 12$ m, determine (*a*) a velocidade da ponta da lança e (*b*) a aceleração da ponta da lança.

SOLUÇÃO

Sistemas de referência. O sistema de referência $OXYZ$ é fixo. Ligamos o sistema de referência rotativo $Oxyz$ à cabine. Portanto, sua velocidade angular em relação ao sistema de referência $OXYZ$ é $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = (0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j}$. A velocidade angular da lança em relação à cabine e ao sistema de referência rotativo $Oxyz$ (ou $\mathcal{F}$, abreviadamente) é $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_2 = (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

a. Velocidade $\mathbf{v}_P$. Considerando a Eq. (15.46), escrevemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

onde $\mathbf{v}_{P'}$ é a velocidade do ponto P' do sistema de referência rotativo coincidente com P:

$$\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = (0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [(10{,}39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] = -(3{,}12 \text{ m/s})\mathbf{k}$$

e onde $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ é a velocidade de P relativa ao sistema de referência rotativo $Oxyz$. Mas a velocidade angular da lança relativa a $Oxyz$ foi determinada como $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} = (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k}$. Logo, a velocidade da ponta P em relação a $Oxyz$ é

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r} &= (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [(10{,}39 \text{ m})\mathbf{i} + (6 \text{ m})\mathbf{j}] \\ &= -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5{,}20 \text{ m/s})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos para $\mathbf{v}_{P'}$ e $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ na Eq. (1), encontramos

$$\mathbf{v}_P = -(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5{,}20 \text{ m/s})\mathbf{j} - (3{,}12 \text{ m/s})\mathbf{k}$$

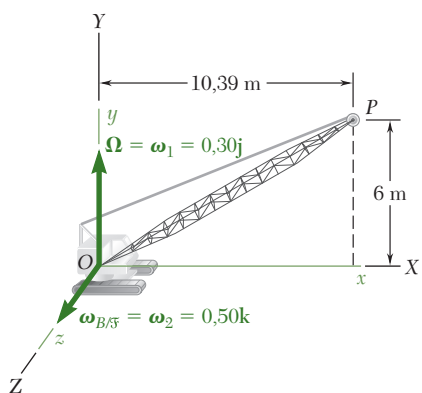
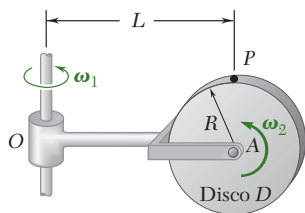
b. Aceleração $\mathbf{a}_P$. Considerando a Eq. (15.48), escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (2)$$

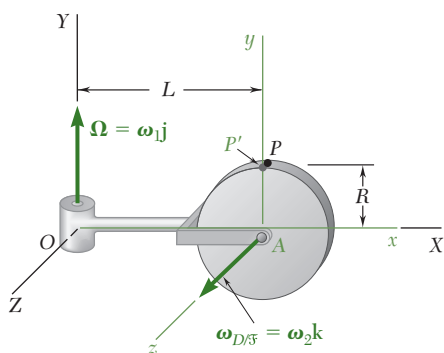
Como $\boldsymbol{\Omega}$ e $\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}}$ são ambas constantes, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_{P'} &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = (0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times (-3{,}12 \text{ m/s})\mathbf{k} = -(0{,}94 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} &= \boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{B/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}) = \\ &= (0{,}50 \text{ rad/s})\mathbf{k} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5{,}20 \text{ m/s})\mathbf{j}] = \\ &= -(1{,}50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} - (2{,}60 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} \\ \mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \\ &= 2(0{,}30 \text{ rad/s})\mathbf{j} \times [-(3 \text{ m/s})\mathbf{i} + (5{,}20 \text{ m/s})\mathbf{j}] = (1{,}80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos para $\mathbf{a}_{P'}$, $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ e $\mathbf{a}_c$ na Eq. (2), encontramos

$$\mathbf{a}_P = -(3{,}54 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (1{,}50 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (1{,}80 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$$

PROBLEMA RESOLVIDO 15.15

O disco D de raio R está preso por pino à extremidade A do braço OA de comprimento L localizado no plano do disco. O braço gira em torno de um eixo vertical que passa por O a uma taxa constante ω_1 e o disco gira em torno de A a uma taxa constante ω_2. Determine (*a*) a velocidade do ponto P localizado diretamente acima de A, (*b*) a aceleração de P e (*c*) a velocidade angular e a aceleração angular do disco.

SOLUÇÃO

Sistemas de referência. O sistema de referência $OXYZ$ é fixo. Ligamos o sistema de referência rotativo $Axyz$ ao braço OA. Portanto, sua velocidade angular em relação a $OXYZ$ é $\boldsymbol{\Omega} = \omega_1\mathbf{j}$. A velocidade angular do disco D em relação ao sistema de referência móvel $Axyz$ (ou $\mathcal{F}$, abreviadamente) é $\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} = \omega_2\mathbf{k}$. O vetor de posição de P em relação a O é $\mathbf{r} = L\mathbf{i} + R\mathbf{j}$ e o vetor de posição em relação a A é $\mathbf{r}_{P/A} = R\mathbf{j}$.

a. Velocidade $\mathbf{v}_P$. Representando por P' o ponto do sistema de referência móvel que coincide com P e considerando a Eq. (15.46), escrevemos

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \qquad (1)$$

onde $\mathbf{v}_{P'} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = \omega_1\mathbf{j} \times (L\mathbf{i} + R\mathbf{j}) = -\omega_1 L\mathbf{k}$

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A} = \omega_2\mathbf{k} \times R\mathbf{j} = -\omega_2 R\mathbf{i}$$

Substituindo os valores obtidos para $\mathbf{v}_{P'}$ e $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ na Eq. (1), encontramos

$$\mathbf{v}_P = -\omega_2 R\mathbf{i} - \omega_1 L\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

b. Aceleração $\mathbf{a}_P$. Considerando a Eq. (15.48), escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \qquad (2)$$

Como Ω e $\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}}$ são ambas constantes, temos

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{P'} &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \omega_1\mathbf{j} \times (-\omega_1 L\mathbf{k}) = -\omega_1^2 L\mathbf{i} \\
\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} &= \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times (\boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \times \mathbf{r}_{P/A}) = \omega_2\mathbf{k} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = -\omega_2^2 R\mathbf{j} \\
\mathbf{a}_c &= 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = 2\omega_1\mathbf{j} \times (-\omega_2 R\mathbf{i}) = 2\omega_1\omega_2 R\mathbf{k}
\end{aligned}$$

Substituindo os valores obtidos na Eq. (2), encontramos

$$\mathbf{a}_P = -\omega_1^2 L\mathbf{i} - \omega_2^2 R\mathbf{j} + 2\omega_1\omega_2 R\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

c. Velocidade angular e aceleração angular do disco.

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}_{D/\mathcal{F}} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{j} + \omega_2\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Usando a Eq. (15.31) com $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\omega}$, escrevemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{OXYZ} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{Axyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} \\
&= 0 + \omega_1\mathbf{j} \times (\omega_1\mathbf{j} + \omega_2\mathbf{k})
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \omega_1\omega_2\mathbf{i} \quad \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você concluiu seu estudo da cinemática de corpos rígidos aprendendo a usar um sistema de referência auxiliar $\mathcal{F}$ para analisar o movimento tridimensional de um corpo rígido. Esse sistema de referência auxiliar pode se um *sistema de referência rotativo* com uma origem fixa O ou pode ser um *sistema de referência em movimento geral.*

A. Usando um sistema de referência rotativo. Ao abordar um problema envolvendo o uso de um sistema de referência rotativo $\mathcal{F}$, você deve seguir os seguintes passos.

1. Selecione o sistema de referência rotativo $\mathcal{F}$ que você deseja usar e desenhe os eixos de coordenadas correspondentes x, y e z a partir do ponto fixo O.

2. Determine a velocidade angular Ω do sistema de referência $\mathcal{F}$ em relação a um sistema de referência fixo $OXYZ$. Na maioria dos casos, você terá selecionado um sistema de referência que está ligado a algum elemento rotativo do sistema; assim, $\mathbf{\Omega}$ será a velocidade angular daquele elemento.

3. Designe como P' o ponto do sistema de referência rotativo $\mathcal{F}$ coincidente com o ponto P de interesse no instante que você está considerando. Determine a velocidade $\mathbf{v}_{P'}$ e a aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ do ponto P'. Como P' é parte de $\mathcal{F}$ e tem o mesmo vetor de posição $\mathbf{r}$ de P, você encontrará que

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}_{P'} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})$$

onde α é a aceleração angular de $\mathcal{F}$. Entretanto, em muitos dos problemas que abordará, a velocidade angular de $\mathcal{F}$ é constante, tanto em intensidade como em direção, e $\alpha = 0$.

4. Determine a velocidade e a aceleração do ponto P em relação ao sistema de referência $\mathcal{F}$ Quando estiver tentando determinar $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ e $\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$, você verificará que é útil visualizar o movimento de P no sistema de referência $\mathcal{F}$ quando este sistema não está girando. Se P é um ponto de um corpo rígido $\mathcal{B}$ que tem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{B}}$ e uma aceleração angular $\alpha_{\mathcal{B}}$ relativas a $\mathcal{F}$ [Problema Resolvido 15.14], você encontrará que

$$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} = \boldsymbol{\alpha}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times (\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{B}} \times \mathbf{r})$$

Em muitos dos problemas de que se ocupará, a velocidade angular do corpo $\mathcal{B}$ relativa ao sistema de referência $\mathcal{F}$ é constante tanto em intensidade como em direção, e $\alpha_{\mathcal{B}} = 0$.

5. Determine a aceleração de Coriolis. Considerando a velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ do sistema de referência $\mathcal{F}$ e a velocidade $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ do ponto P em relação àquele sistema de referência, calculada na etapa anterior, escrevemos

$$\mathbf{a}_c = 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$$

6. A velocidade e a aceleração do ponto *P* em relação ao sistema de referência fixo *OXYZ* pode agora ser obtida adicionando as expressões que você determinou:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

B. Usando um sistema de referência em movimento geral. Os passos que você deverá seguir diferem apenas ligeiramente daqueles listados sob *A*. Eles consistem do seguinte:

1. Selecione o sistema de referência *F* que você deseja usar e um ponto de referência *A* naquele sistema de referência, a partir do qual você desenhará os eixos de coordenadas x, y e z definindo o sistema de referência. Você considerará o movimento do sistema de referência como a soma de uma *translação com A e de uma rotação em torno de A.*

2. Determine a velocidade v_A do ponto *A* e a velocidade angular Ω do sistema de referência. Na maioria dos casos, você terá selecionado um sistema de referência que está ligado a algum elemento rotativo do sistema; assim, $\mathbf{\Omega}$ será a velocidade angular daquele elemento.

3. Designe como *P'* o ponto do sistema de referência rotativo *F* coincidente com o ponto *P* de interesse no instante que você está considerando e determine a velocidade $\mathbf{v}_{P'}$ e a aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ daquele ponto. Em alguns casos, isso pode ser feito visualizando o movimento de *P* como se aquele ponto fosse impedido de se mover em relação a F [Problema Resolvido 15.15]. Uma abordagem mais geral é relembrar que o movimento de *P'* é a soma de uma translação com o ponto de referência *A* e de uma rotação em torno de *A*. Assim, a velocidade $\mathbf{v}_{P'}$ e a aceleração $\mathbf{a}_{P'}$ de *P'* podem ser obtidas adicionando-se $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{a}_A$, respectivamente, às expressões encontradas no item A3 e trocando o vetor de posição $\mathbf{r}$ pelo vetor $\mathbf{r}_{P/A}$ desenhado de *A* a *P*:

$$\mathbf{v}_{P'} = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A} \qquad \mathbf{a}_{P'} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{P/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{P/A})$$

Os passos 4, 5 e 6 são os mesmos da Parte *A*, com a exceção de que o vetor $\mathbf{r}$ deve ser novamente trocado por $\mathbf{r}_{P/A}$. Assim, as Eqs. (15.46) e (15.48) ainda podem ser usadas para obter-se a velocidade e a aceleração de *P* em relação ao sistema de referência fixo *OXYZ*.

PROBLEMAS

15.220 A barra AB está soldada em uma placa de 300 mm de raio que gira com uma taxa constante $\omega_1 = 6$ rad/s. Sabendo que o colar D se desloca na direção da extremidade B da barra a uma velocidade constante $u = 2$ m/s, determine, para a posição mostrada na figura, (a) a velocidade de D, (b) a aceleração de D.

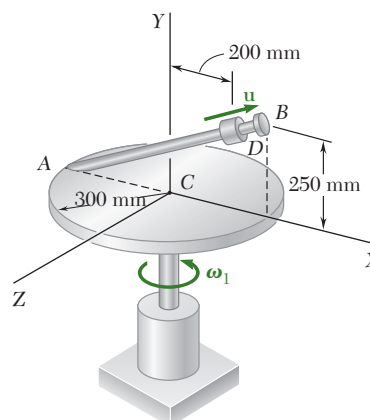



Figura P15.220

15.221 A barra dobrada mostrada na figura gira à taxa constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Sabendo que o colar C se desloca na direção do ponto D com uma velocidade relativa constante $u = 1$ m/s, determine, para a posição mostrada na figura, a velocidade e aceleração de C se (a) $x = 100$ mm, (b) $x = 400$ mm.

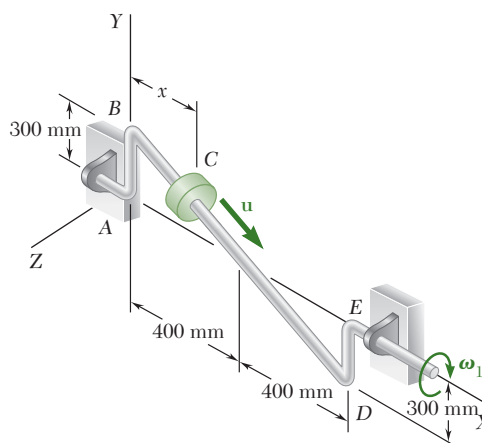



Figura P15.221

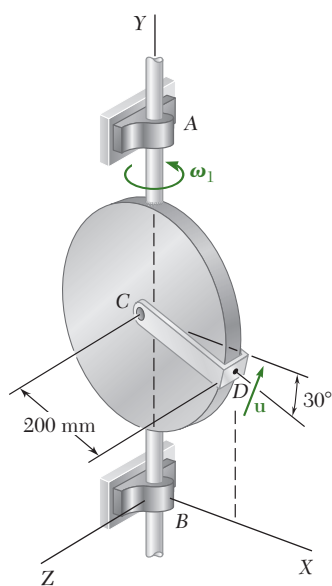



Figura P15.222

15.222 A placa circular mostrada na figura gira em torno de seu diâmetro vertical a uma taxa constante $\omega_1 = 10$ rad/s. Sabendo que na posição mostrada o disco se encontra no plano XY e o ponto D da alça CD se desloca para cima com velocidade relativa $u = 1{,}5$ m/s, determine (a) a velocidade de D, (b) a aceleração de D.

15.223 Resolva o Problema 15.222, considerando que, no instante mostrado, a velocidade angular ω_1 da placa de 10 rad/s está decrescendo a uma taxa de 25 rad/s^2, enquanto a velocidade relativa u do ponto D da alça CD é 1,5 m/s e está decrescendo a uma taxa de 3 m/s^2.

15.224 Uma placa quadrada com 500 mm de lado está articulada nos pontos A e B de um grampo em U. A placa gira à taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s em relação ao grampo, que, por sua vez, gira à taxa constante $\omega_1 = 3$ rad/s em torno do eixo Y. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a velocidade do ponto C, (*b*) a aceleração do ponto C.

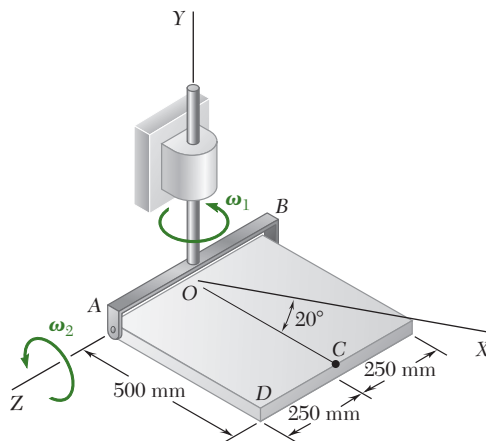



Figura P15.224 e P15.225

15.225 Uma placa quadrada com 500 mm de lado está articulada nos pontos A e B de um grampo em U. A placa gira à taxa constante $\omega_2 = 4$ rad/s em relação ao grampo, que, por sua vez, gira à taxa constante $\omega_1 = 3$ rad/s em torno do eixo Y. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a velocidade do ponto D, (*b*) a aceleração do ponto D.

15.226 a 15.228 A placa retangular mostrada na figura gira à taxa constante $\omega_2 = 12$ rad/s em relação ao braço AE, que, por sua vez, gira à taxa constante $\omega_1 = 9$ rad/s em torno do eixo Z. Para a posição mostrada, determine a velocidade e a aceleração do ponto da placa indicado.

15.226 Canto B.
15.227 Ponto D.
15.228 Canto C.

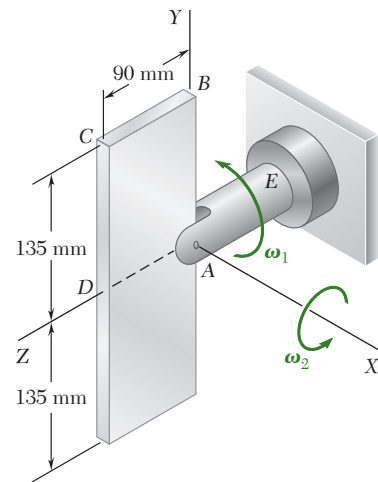



Figura P15.226, P15.227 e P15.228

15.229 Resolva o Problema 15.228 admitindo que, no instante mostrado na figura, a velocidade angular ω_2 da placa em relação ao braço AE é de 12 rad/s e decresce à taxa de 60 rad/s^2, enquanto a velocidade angular ω_1 do braço em torno do eixo Z é de 9 rad/s e decresce à taxa de 45 rad/s^2.

15.230 Resolva o Problema 15.221 admitindo que, no instante mostrado na figura, a velocidade angular ω_1 da barra é 3 rad/s e cresce à taxa de 12 rad/s^2, enquanto a velocidade relativa u do colar é 1 m/s e decresce à taxa de 2 m/s^2.

15.231 Usando o método da Seção 15.14, resolva o Problema 15.191.

15.232 Usando o método da Seção 15.14, resolva o Problema 15.195.

15.233 Usando o método da Seção 15.14, resolva o Problema 15.192.

15.234 Um corpo *AB* e a barra *BC* do componente robótico mostrado na figura giram em uma taxa constante $\omega_1 = 0{,}60$ rad/s em torno do eixo *Y*. Simultaneamente, um controle por fio e polia produz o giro do braço *CD* em torno *C* a uma taxa constante $\omega = d\beta/dt = 0{,}45$ rad/s. Sabendo que $\beta = 120°$, determine (*a*) a aceleração angular do braço *CD*, (*b*) a velocidade de *D*, (*c*) a aceleração de *D*.

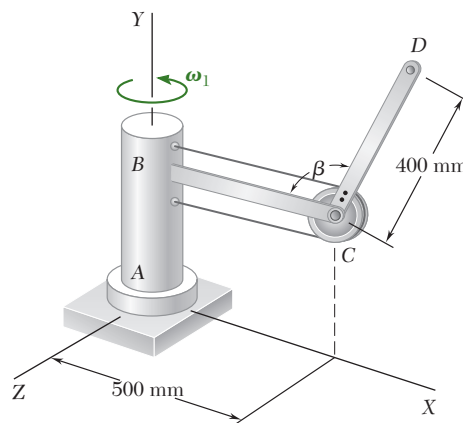



Figura P15.234

15.235 Um disco com raio de 120 mm gira à taxa constante $\omega_2 = 5$ rad/s em relação ao braço *AB*, que, por sua vez, gira à taxa constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Para a posição mostrada na figura, determine a velocidade e a aceleração do ponto *C*.

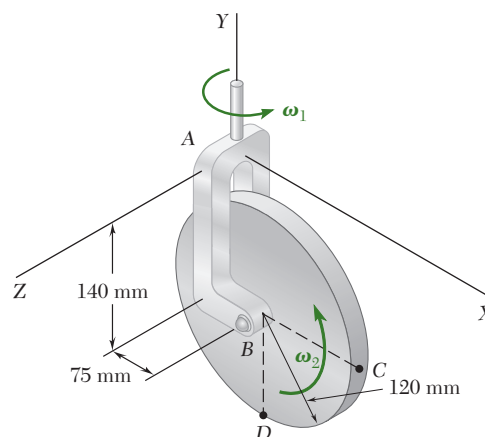



Figura P15.235 e P15.236

15.236 Um disco com raio de 120 mm gira à taxa constante $\omega_2 = 5$ rad/s em relação ao braço *AB*, que, por sua vez, gira à taxa constante $\omega_1 = 3$ rad/s. Para a posição mostrada na figura, determine a velocidade e a aceleração do ponto *D*.

15.237 O guindaste mostrado na figura gira à taxa constante $\omega_1 = 0{,}25$ rad/s; simultaneamente, a lança telescópica está sendo levantada à taxa cons-

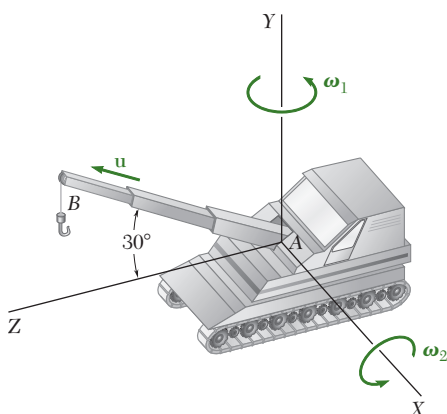



Figura P15.237

tante $\omega_2 = 0{,}40$ rad/s. Sabendo que, no instante mostrado, o comprimento da lança é de 6 m e que cresce à taxa constante de $u = 0{,}5$ m/s, determine a velocidade e a aceleração do ponto B.

15.238 O braço AB de 5 m de comprimento é usado para fornecer uma plataforma elevada para trabalhadores da construção civil. Na posição mostrada na figura, o braço AB está sendo erguido a uma taxa constante $d\theta/dt = 0{,}25$ rad/s; simultaneamente, a unidade está sendo girada em torno do eixo Y a uma taxa constante $\omega_1 = 0{,}15$ rad/s. Sabendo que $\theta = 20°$, determine a velocidade e a aceleração do ponto B.

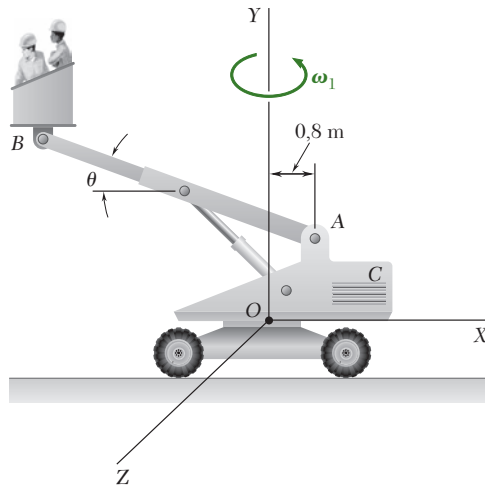



Figura P15.238

15.239 Resolva o Problema 15.238, considerando que $\theta = 40°$.

15.240 Um disco com raio de 180 mm gira à taxa constante $\omega_2 = 12$ rad/s em relação ao braço CD, que por sua vez gira à taxa constante $\omega_1 = 8$ rad/s em torno do eixo Y. Determine, no instante mostrado na figura, a velocidade e a aceleração do ponto A na periferia do disco.

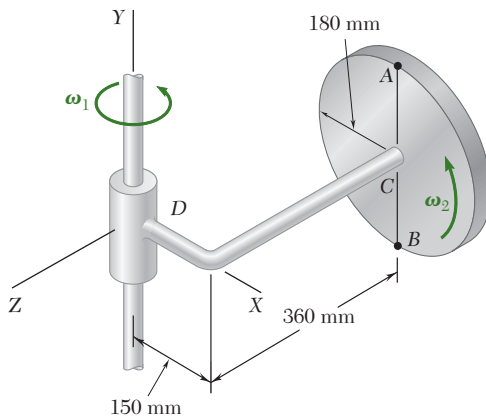



Figura P15.240 e P15.241

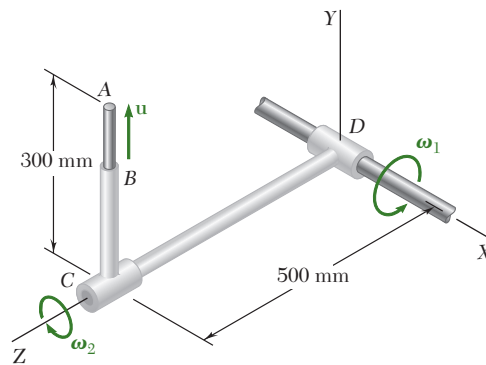
15.241 Um disco com raio de 180 mm gira à taxa constante $\omega_2 = 12$ rad/s em relação ao braço CD, que por sua vez gira à taxa constante $\omega_1 = 8$ rad/s em torno do eixo Y. Determine, no instante mostrado na figura, a velocidade e a aceleração do ponto B na periferia do disco.

15.242 e 15.243 Na posição mostrada nas figuras, a barra delgada se desloca a uma velocidade constante $u = 100$ mm/s para fora do tubo *BC*. Ao mesmo tempo, o tubo *BC* gira à taxa constante $\boldsymbol{\omega}_2 = 1{,}5$ rad/s em relação ao braço *CD*. Sabendo que todo o conjunto gira em torno do eixo *X* à taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 1{,}2$ rad/s, determine a velocidade e a aceleração da extremidade *A* da barra.

Figura P15.242

Figura P15.243

15.244 Dois discos de 130 mm de raio estão soldadados a uma barra *CD* de 500 mm. A unidade barra e discos gira a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_2 = 3$ rad/s com relação ao braço *AB*. Sabendo que no instante mostrado na figura $\boldsymbol{\omega}_1 = 4$ rad/s, determine a velocidade e aceleração do (*a*) ponto *E*, (*b*) ponto *F*.

Figura P15.244

15.245 No Problema 15.244, determine a velocidade e a aceleração do (*a*) ponto *G*, (*b*) ponto *H*.

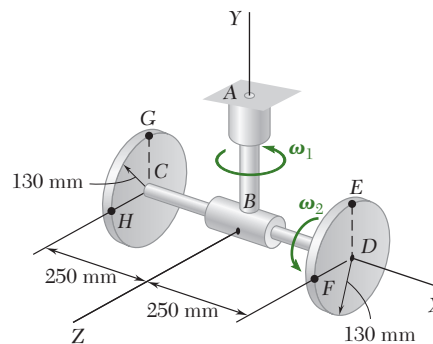
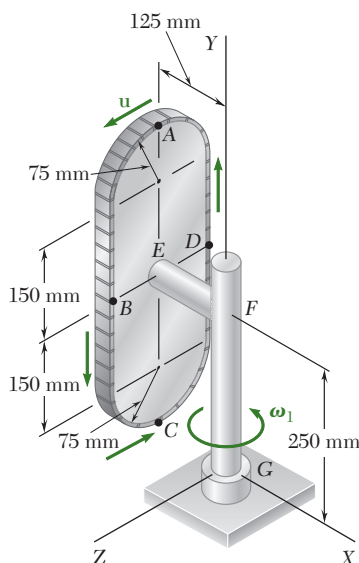



Figura P15.246 e P15.247

15.246 A placa vertical mostrada na figura está soldada ao braço *EFG* e o conjunto gira como um todo à taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 1{,}6$ rad/s em torno do eixo *Y*. Ao mesmo tempo, uma correia move-se em torno do perímetro da placa a uma velocidade constante $u = 100$ mm/s. Para a posição mostrada, determine a aceleração da parte da correia localizada (*a*) no ponto *A*, (*b*) no ponto *B*.

15.247 A placa vertical mostrada na figura está soldada ao braço *EFG* e o conjunto gira como um todo à taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 1{,}6$ rad/s em torno do eixo *Y*. Ao mesmo tempo, uma correia move-se em torno do perímetro da placa a uma velocidade constante $u = 100$ mm/s. Para a posição mostrada, determine a aceleração da parte da correia localizada (*a*) no ponto *C*, (*b*) no ponto *D*.

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado ao estudo da cinemática de corpos rígidos.

Corpo rígido em translação

Consideramos em primeiro lugar a *translação* de um corpo rígido [Seção 15.2] e observamos que, em tal movimento, *todos os pontos do corpo têm a mesma velocidade e a mesma aceleração em um dado instante qualquer*.

Rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo

Em seguida, consideramos a *rotação* de um corpo rígido em torno de um eixo fixo [Seção 15.3]. A posição do corpo é definida pelo ângulo θ que a linha BP, traçada do eixo de rotação a um ponto P do corpo, forma com um plano fixo (Fig. 15.39). Encontramos que a intensidade da velocidade de P é

$$v = \frac{ds}{dt} = r\dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \tag{15.4}$$

onde $\dot{\theta}$ é a derivada temporal de θ. Expressamos, então, a velocidade de P como

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.5}$$

onde o vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = \dot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.6}$$

é orientado ao longo do eixo fixo de rotação e representa a *velocidade angular* do corpo.

Figura 15.39

Representando por α a derivada $d\omega/dt$ da velocidade angular, expressamos a aceleração de P como:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.8}$$

Diferenciando (15.6) e lembrando que $\mathbf{k}$ é constante em intensidade e direção, encontramos que:

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k} = \dot{\omega}\mathbf{k} = \ddot{\theta}\mathbf{k} \tag{15.9}$$

O vetor α representa a *aceleração angular* do corpo e é orientado ao longo do eixo de rotação fixo.

Figura 15.40

Figura 15.41

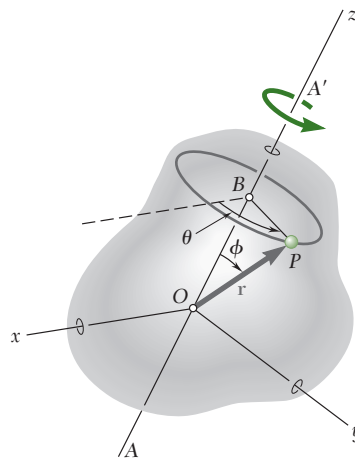
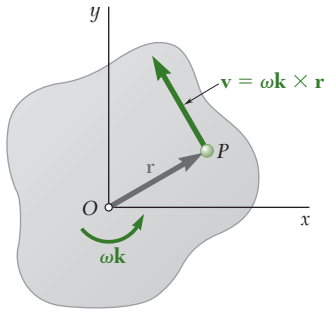
Rotação de uma placa representativa

Em seguida, consideramos o movimento de uma placa representativa localizada em um plano perpendicular ao eixo de rotação do corpo (Fig. 15.40). Como a velocidade angular é perpendicular à placa, a velocidade do ponto P da placa foi expressa como

$$\mathbf{v} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r} \tag{15.10}$$

Componentes tangencial e normal

onde $\mathbf{v}$ está contido no plano da placa. Substituindo $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ e $\alpha = \alpha\mathbf{k}$ na Eq. (15.8), verificamos que a aceleração de P podia ser decomposta em *componentes tangencial e normal* (Fig. 15.41) iguais a, respectivamente

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= \alpha\mathbf{k} \times \mathbf{r} \qquad & a_t &= \mathrm{r}\alpha \\ \mathbf{a}_n &= -\omega^2\mathbf{r} \qquad & a_n &= r\omega^2 \end{aligned} \tag{15.11$'$}$$

Velocidade angular e aceleração angular da placa rotativa

Retomando as Eqs. (15.6) e (15.9), obtivemos as seguintes expressões para a *velocidade angular* e para a *aceleração angular* da placa [Seção 15.4]:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \tag{15.12}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{15.13}$$

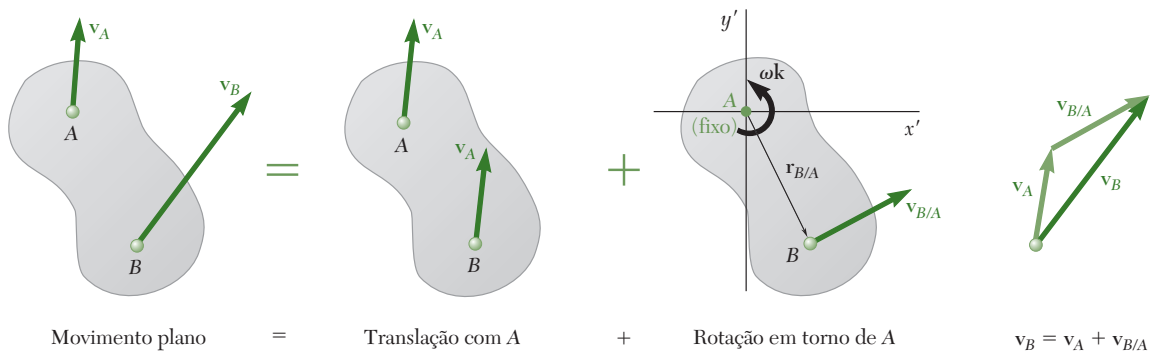
ou

$$\alpha = \omega\frac{d\omega}{d\theta} \tag{15.14}$$

Observamos que essas expressões são similares àquelas obtidas no Cap. 11 para o movimento retilíneo de uma partícula.

Dois casos particulares de rotação são encontrados com frequência: *rotação uniforme* e *rotação uniformemente acelerada.* Os problemas que envolvem um desses movimentos podem ser resolvidos pelo uso de equações similares àquelas usadas nas Seções 11.4 e 11.5 para o movimento retilíneo uniforme e para o movimento retilíneo uniformemente acelerado de uma partícula, contanto que x, v e a sejam trocados por θ, ω e α, respectivamente [Problema Resolvido 15.1].

Figura 15.42

Velocidades no movimento plano

O *movimento plano mais geral* de uma placa rígida pode ser considerado como a *soma de uma translação e de uma rotação* [Seção 15.5]. Por exemplo, pode-se considerar que a placa mostrada na Fig. 15.42 é translada com o ponto A enquanto gira simultaneamente em torno de A. Disso resulta que a velocidade de qualquer ponto B da placa pode ser expressa como [Seção 15.6]

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.17}$$

onde $\mathbf{v}_A$ é a velocidade de A e $\mathbf{v}_{B/A}$ é a velocidade relativa de B em relação a A ou, mais precisamente, em relação aos eixos $x'y'$ que se transladam juntamente com A. Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor de posição de B relativo a A, encontramos que

$$\mathbf{v}_{B/A} = \omega\mathbf{k} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad v_{B/A} = r\omega \tag{15.18}$$

A equação fundamental (15.17) que relaciona as velocidades absolutas dos pontos A e B e a velocidade relativa de B em relação a A foi expressa sob a forma de um diagrama vetorial e usada para resolver problemas envolvendo vários tipos de mecanismos [Problemas Resolvidos 15.2 e 15.3].

Centro instantâneo de rotação

Outra abordagem à solução de problemas envolvendo as velocidades dos pontos de uma placa rígida em movimento plano foi apresentada na Seção 15.7 e usada nos Problemas Resolvidos 15.4 e 15.5. Ela é baseada na determinação do *centro instantâneo de rotação* C da placa (Fig. 15.43).

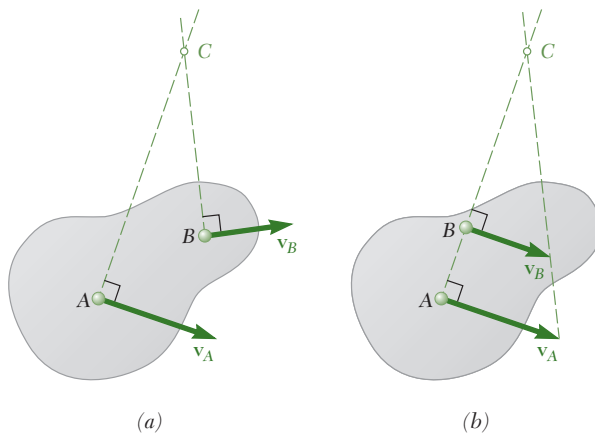
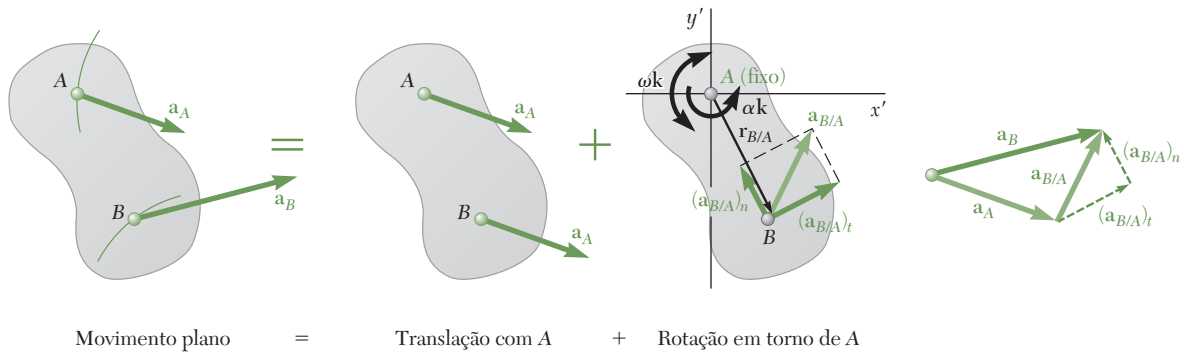



Figura 15.43

Figura 15.44

Acelerações no movimento plano

O fato de que qualquer movimento plano de uma placa rígida pode ser considerado como a soma de uma translação da placa com um ponto de referência A e de uma rotação em torno de A foi usado na Seção 15.8 para relacionar as acelerações absolutas de dois pontos quaisquer A e B da placa e a aceleração relativa de B com relação a A. Obtivemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{15.21}$$

onde $\mathbf{a}_{B/A}$ consistia de um *componente normal* $(\mathbf{a}_{B/A})_n$, de intensidade $r\omega^2$ e orientada para A, e de um *componente tangencial* $(\mathbf{a}_{B/A})_t$, de intensidade $r\alpha$ e perpendicular à linha AB (Fig. 15.44). A relação fundamental (15.21) foi expressa em termos de diagramas vetoriais ou de equações vetoriais e usada para determinar as acelerações de determinados pontos de vários mecanismos [Problemas Resolvidos 15.6 a 15.8]. Deve-se notar que o centro instantâneo de rotação C considerado na Seção 15.7 não pode ser usado para a determinação de acelerações, pois o ponto C, em geral, *não* tem aceleração nula.

Coordenadas expressas em termos de um parâmetro

No caso de certos mecanismos, é possível expressar as coordenadas x e y de todos os pontos importantes do mecanismo por meio de expressões analíticas simples contendo um *único parâmetro.* Os componentes da velocidade e da aceleração absolutas de um dado ponto são, então, obtidos diferenciando-se duas vezes as coordenadas x e y daquele ponto em relação ao tempo t [Seção 15.9].

Taxa de variação de um vetor em relação a um sistema de referência rotativo

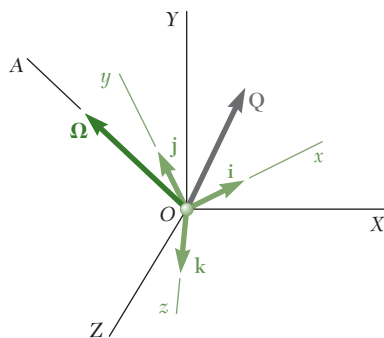



Figura 15.45

Embora a taxa de variação de um vetor seja a mesma em relação a um sistema de referência fixo e a um sistema de referência em translação, a taxa de variação de um vetor em relação a um sistema de referência rotativo é diferente. Portanto, a fim de estudar o movimento de uma partícula relativo a um sistema de referência rotativo, tivemos antes de comparar as taxas de variação de um vetor genérico $\mathbf{Q}$ em relação a um sistema de referência fixo $OXYZ$ e em relação a um sistema de referência $Oxyz$ girando com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ [Seção 15.10] (Fig. 15.45). Obtivemos a seguinte relação fundamental

$$(\dot{\mathbf{Q}})_{OXYZ} = (\dot{\mathbf{Q}})_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{Q} \tag{15.31}$$

e concluímos que a taxa de variação do vetor $\mathbf{Q}$ em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$ é composta de duas partes: a primeira representa a taxa de variação de $\mathbf{Q}$ em relação ao sistema de referência rotativo $Oxyz$; a segunda parte, $\Omega \times \mathbf{Q}$, é induzida pela rotação do sistema de referência $Oxyz$.

A parte seguinte do capítulo [Seção 15.11] foi dedicada à análise cinemática bidimensional de uma partícula P que se move em relação a um sistema de referência girando com velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$, em torno de um eixo fixo (Fig. 15.46). Verificamos que a velocidade absoluta de P podia ser expressa como

Movimento plano de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.33}$$

onde $\mathbf{v}_P$ = velocidade absoluta da partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidade do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ = velocidade de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$

Figura 15.46

Observamos que a mesma expressão para $\mathbf{v}_P$ é obtida se o sistema de referência está em translação em vez de rotação. Mas, quando o sistema de referência está em rotação, verifica-se que a expressão para a aceleração de P contém um termo adicional $\mathbf{a}_c$ denominado *aceleração complementar* ou *aceleração de Coriolis.* Escrevemos

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.36}$$

onde $\mathbf{a}_P$ = aceleração absoluta da partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleração do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{a}_{P/F}$ = aceleração de P relativa ao sistema de referência móvel
$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxy} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleração complementar, ou de Coriolis

Uma vez que Ω e $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ são perpendiculares entre si no caso de movimento plano, verifica-se que a aceleração de Coriolis tem intensidade $a_c = 2\Omega v_{P/\mathcal{F}}$ e que sua orientação é obtida girando-se o vetor $\mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$ de 90° no sentido da rotação do sistema de referência móvel. As Eqs. (15.33) e (15.36) podem ser usadas para a análise do movimento de mecanismos que contêm partes que deslizam umas sobre as outras [Problemas Resolvidos 15.9 e 15.10].

Movimento de um corpo rígido com um ponto fixo

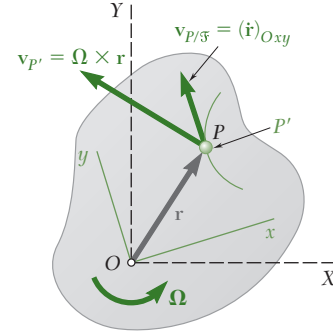
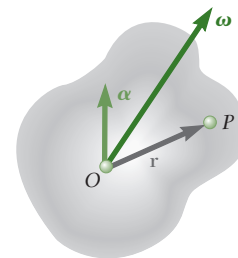
A última parte do capítulo foi dedicada ao estudo da cinemática de corpos rígidos tridimensionais. Consideramos em primeiro lugar o movimento de um corpo rígido com um ponto fixo [Seção 15.12]. Após demonstrar que o deslocamento mais geral de um corpo rígido com um ponto fixo O é equivalente a uma rotação do corpo em torno de um eixo passando por O, fomos capazes de definir a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e o *eixo instantâneo de rotação* do corpo em um instante dado. A velocidade de um ponto P do corpo (Fig. 15.47) pode novamente ser expressa como:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{15.37}$$

Figura 15.47

Diferenciando essa expressão, escrevemos também:

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{15.38}$$

Entretanto, como a direção de $\boldsymbol{\omega}$ muda de um instante para outro, a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$ não é, em geral, dirigida ao longo do eixo instantâneo de rotação [Problema Resolvido 15.11].

Movimento geral no espaço

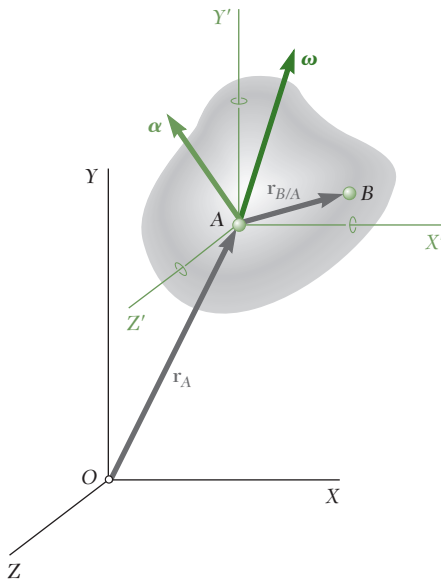



Figura 15.48

Mostrou-se, na Seção 15.13, que *o movimento mais geral de um corpo rígido no espaço é equivalente, em um instante dado qualquer, à soma de uma translação e de uma rotação.* Considerando duas partículas A e B do corpo, verificamos que

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \tag{15.42}$$

onde $\mathbf{v}_{B/A}$ é a velocidade de B relativa ao sistema de referência $AX'Y'Z'$ ligado a A e de orientação fixa (Fig. 15.48). Representando por $\mathbf{r}_{B/A}$ o vetor de posição de B em relação a A, escrevemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{15.43}$$

onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo no instante considerado [Problema Resolvido 15.12], A aceleração de B foi obtida por um raciocínio semelhante. Primeiro, escrevemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

e, retomando a Eq. (15.38),

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{15.44}$$

Movimento tridimensional de uma partícula em relação a um sistema de referência rotativo

Nas duas seções finais do capítulo, consideramos o movimento tridimensional de uma partícula P em relação a um sistema de referência $Oxyz$ girando com uma velocidade angular Ω relativamente a um sistema de referência fixo $OXYZ$ (Fig. 15.49). Na Seção 15.14, expressamos a velocidade absoluta $\mathbf{v}_P$ de P como

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_{P'} + \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}} \tag{15.46}$$

onde $\mathbf{v}_P$ = velocidade absoluta da partícula P
$\mathbf{v}_{P'}$ = velocidade do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{v}_{P/F}$ = velocidade de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$

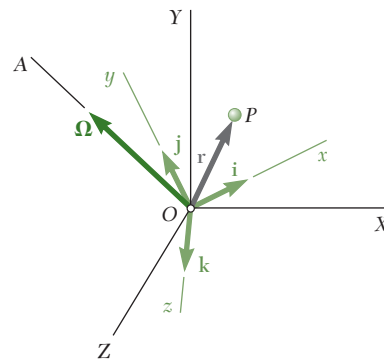



Figura 15.49

A aceleração absoluta $\mathbf{a}_P$ de P foi então expressa como

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_{P'} + \mathbf{a}_{P/\mathcal{F}} + \mathbf{a}_c \tag{15.48}$$

onde $\mathbf{a}_P$ = aceleração absoluta da partícula P
$\mathbf{a}_{P'}$ = aceleração do ponto P' do sistema de referência móvel $\mathcal{F}$ coincidente com P
$\mathbf{a}_{P/\mathcal{F}}$ = aceleração de P relativa ao sistema de referência móvel $\mathcal{F}$
$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times (\dot{\mathbf{r}})_{Oxyz} = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{P/\mathcal{F}}$
= aceleração complementar ou de Coriolis

Sistema de referência em movimento geral

Na Seção 15.15, observamos também que as Eqs. (15.46) e (15.48) permanecem válidas quando o sistema de referência $Axyz$ move-se de maneira conhecida, porém arbitrária, em relação ao sistema de referência fixo $OXYZ$ (Fig. 15.50), desde que o movimento de A seja incluído nos termos $\mathbf{v}_{P'}$ e $\mathbf{a}_{P'}$ representando a velocidade e a aceleração absolutas do ponto coincidente P'.

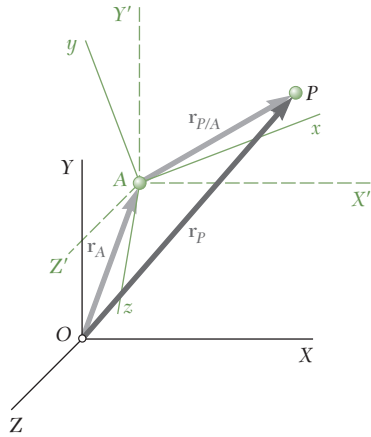



Figura 15.50

Sistemas de referência rotativos são particularmente úteis no estudo do movimento tridimensional de corpos rígidos. De fato, há muitas situações em que uma escolha apropriada do sistema de referência rotativo leva a uma análise mais simples do movimento do corpo rígido do que seria possível com eixos de orientação fixa [Problemas Resolvidos 15.14 e 15.15].

PROBLEMAS DE REVISÃO

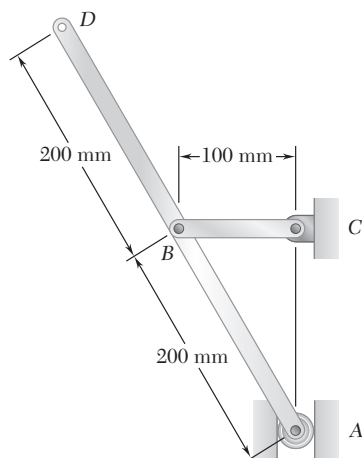



Figura P15.248

15.248 Sabendo que no instante mostrado na figura a manivela BC tem uma velocidade angular constante de 45 rpm no sentido horário, determine a aceleração (*a*) do ponto A, (*b*) do ponto D.

15.249 O rotor de um motor elétrico tem a velocidade de 1.800 rpm quando a energia é desligada. O rotor é então observado até alcançar o repouso após executar 1.550 rpm. Considerando o movimento uniformemente acelerado, determine (*a*) a aceleração angular do rotor, (*b*) o tempo necessário para o rotor alcançar o repouso.

15.250 O disco de 0,15 m de raio gira a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_2$ em relação à placa BC, que por sua vez gira a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1$ em torno do eixo y. Sabendo que $\omega_1 = \omega_2 = 3$ rad/s, determine, para a posição mostrada na figura, a velocidade e a aceleração (*a*) do ponto D, (*b*) do ponto F.

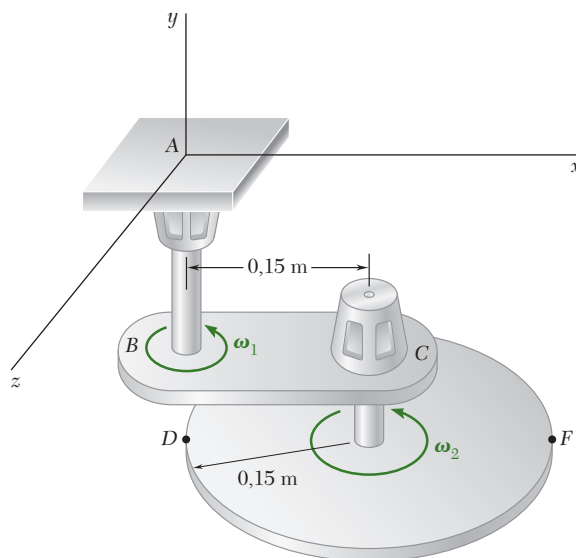



Figura P15.250

15.251 Um ventilador de um motor de um automóvel gira em um eixo horizontal paralelo a direção de movimento do automóvel. Quando visto da retaguarda do motor, observa-se que o ventilador gira no sentido horário a uma taxa de 2.500 rpm. Sabendo que o automóvel está virando à direita ao longo de uma trajetória de 12 m de raio a uma velocidade constante de 12 km/h, determine a aceleração angular do ventilador no instante em que o automóvel está se movendo ao norte.

15.252 Um tambor de 100 mm de raio está preso rigidamente a um cilindro de 180 mm de raio. Uma corda é enrolada ao redor do tambor e sua extremidade E é puxada para a direita com velocidade constante de 400 mm/s, fazendo com que o cilindro role sem deslizar na placa F. Sabendo que a placa F é fixa, determine (a) a velocidade do centro do cilindro, (b) a aceleração do ponto D do cilindro.

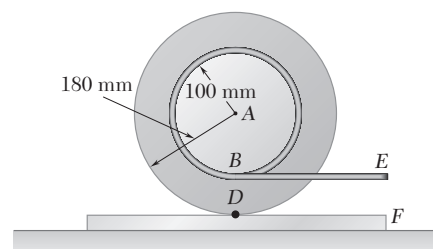



Figura P15.252

15.253 Resolva o Problema 15.252, considerando que a placa F está se movendo para a direita com velocidade constante de 250 mm/s.

15.254 A água flui por meio de uma tubulação curva AB que gira com velocidade angular de 90 rpm no sentido horário. Se a velocidade da água em relação à tubulação é 8 m/s, determine a aceleração total de uma partícula de água em um ponto P.

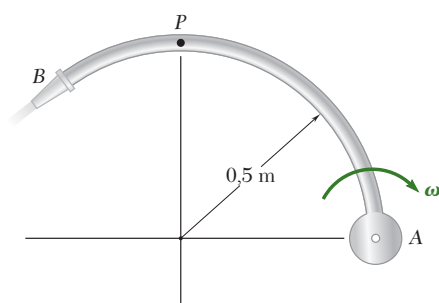



Figura P15.254

15.255 A barra BC de comprimento 600 mm é conectada por juntas rotuladas a um braço rotativo AB e a um colar C que desliza na barra fixa DE. Sabendo que o comprimento do braço AB é 100 mm e que este gira a uma taxa constante $\omega_1 = 10$ rad/s, determine a velocidade do colar C quando $\theta = 0$.

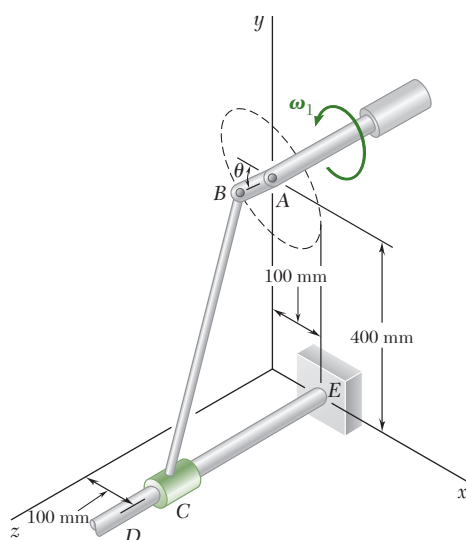



Figura *P15.255*

15.256 Resolva o Problema 15.255, considerando que $\theta = 90°$.

15.257 A manivela AB tem uma velocidade angular constante de 1,5 rad/s no sentido anti-horário. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a velocidade angular da barra BD, (*b*) a velocidade do colar D.

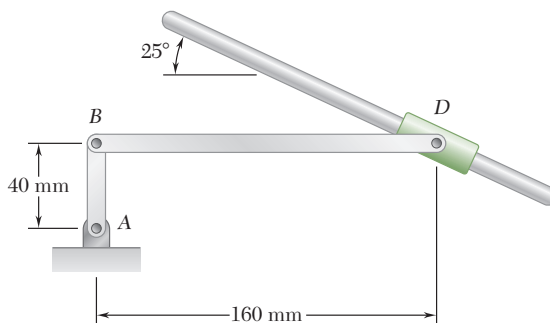



Figura P15.257 e *P15.258*

15.258 A manivela AB tem uma velocidade angular constante de 1,5 rad/s no sentido anti-horário. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração angular da barra BD, (*b*) a aceleração do colar D.

15.259 A barra AB de comprimento 125 mm é fixada à barra vertical que gira em torno do eixo y com uma taxa constante $\omega_1 = 5$ rad/s. Sabendo que o ângulo formado pela barra AB e a vertical cresce a uma taxa constante $d\beta/dt = 3$ rad/s, determine a velocidade e aceleração da extremidade B da barra quando $\beta = 30°$.

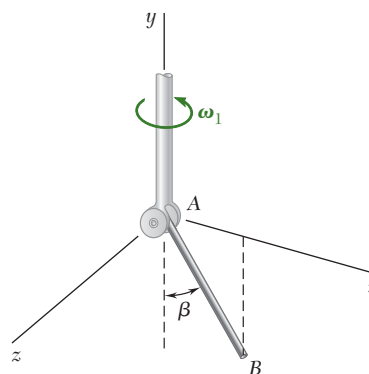



Figura P15.259

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

15.C1 O disco mostrado na figura tem uma velocidade angular constante de 500 rpm no sentido anti-horário. Sabendo que a barra *BD* tem 250 mm de comprimento, use um programa de computador para determinar e traçar um gráfico, considerando valores de θ de 0 a 360°, com incrementos de 30°, para a velocidade do colar *D* e a velocidade angular da barra *BD*. Determine os dois valores de θ para os quais a velocidade do colar *D* é nula.

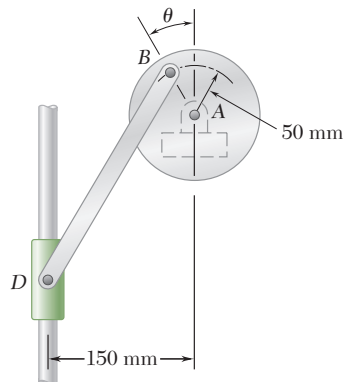



Figura P15.C1

15.C2 Duas barras rotativas estão conectadas por um bloco deslizante *P* como mostra a figura. Sabendo que a barra *BP* gira com uma velocidade angular constante de 6 rad/s no sentido anti-horário, use um programa de computador para determinar e traçar um gráfico, considerando valores de θ de 0 a 180° para a velocidade angular e a aceleração angular da barra *AE*. Determine o valor de θ para o qual a aceleração angular α_{AE} da barra *AE* é máxima e para o valor correspondente de α_{AE}.

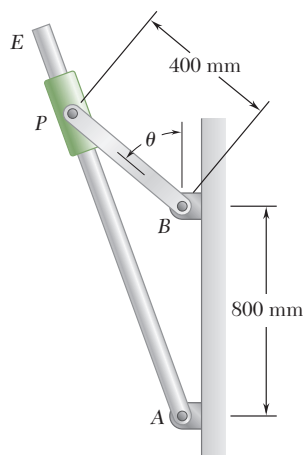
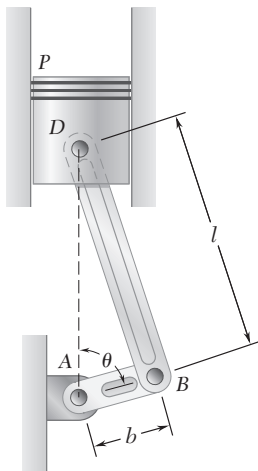



Figura P15.C2

Figura P15.C3

15.C3 No sistema biela-manivela de motor mostrado na figura, $l = 160$ mm e $b = 60$ mm. Sabendo que a manivela *AB* gira com uma velocidade angular constante de 1.000 rpm no sentido horário, use um programa de computador para determinar e traçar um gráfico, considerando valores de θ de 0 a 180°, com 10° de incremento, (*a*) da velocidade angular e da aceleração angular da biela *BD*, (*b*) da velocidade e da aceleração do pistão *P*.

15.C4 A barra *AB* move-se sobre um rolete em *C* enquanto a extremidade *A* move-se para a direita com uma velocidade constante de 180 mm/s. Usando um programa de computador, determine e trace um gráfico, considerando valores de θ de 20° a 90° , com 5° de incremento, da velocidade do ponto *B* e da aceleração angular da barra. Determine o valor de θ para o qual a aceleração angular a da barra é máxima e para o valor correspondente de α.

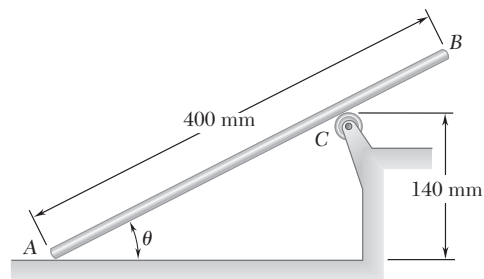



Figura P15.C4

15.C5 A barra *BC* de comprimento 600 mm é conectada por juntas rotuladas a um braço rotativo *AB* e a um colar *C* que desliza na barra fixa *DE*. O braço *AB* é 100 mm e gira em um plano *XY* com uma velocidade constante de 10 rad/s. Usando um programa de computador, determine e trace um gráfico considerando valores de θ de 0 a 360° para a velocidade do colar *C*. Determine os dois valores de θ para os quais a velocidade do colar *C* é nula.

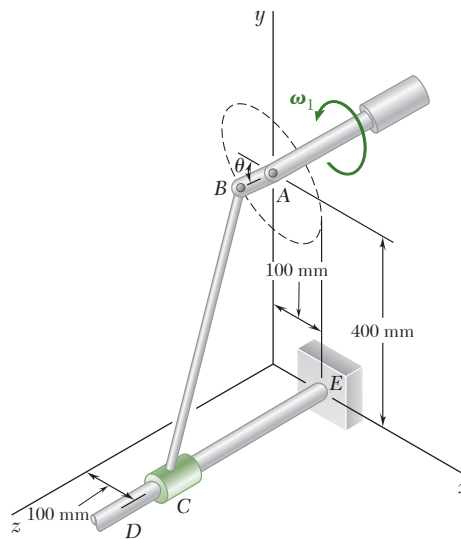



Figura P15.C5

15.C6 A barra *AB* de 625 mm de comprimento está conectada por juntas articuladas aos colares *A* e *B*, que deslizam ao longo das duas barras mostradas na figura. O colar *B* se move em direção ao suporte *E* a uma velocidade constante de 500 mm/s. Representando por *d* a distância do ponto *C* ao colar *B*, use um programa de computador para determinar e traçar o gráfico da velocidade do colar *A* para valores de *d* de 0 a 375 mm.

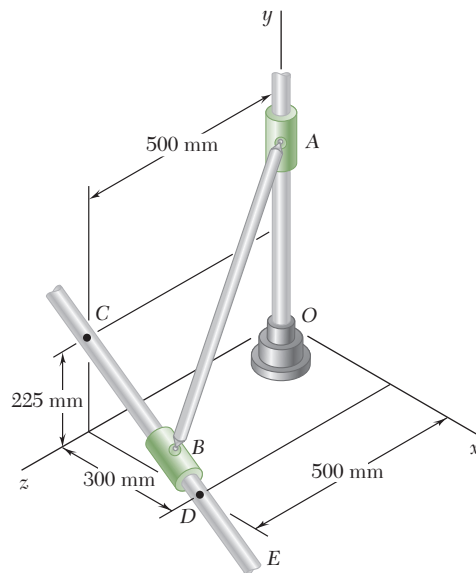



Figura P15.C6

As turbinas eólicas de três pás, similares a da figura, de um parque eólico, são atualmente o modelo mais comum. Neste capítulo você aprenderá a analisar o movimento de um corpo rígido considerando o movimento de seu centro de massa, o movimento em relação ao seu centro de massa e as forças externas que atuam sobre ele.

CAPÍTULO 16

Movimento plano de corpos rígidos: forças e acelerações

16 Movimento plano de corpos rígidos: forças e acelerações

16.1 Introdução

Neste capítulo e nos Caps. 17 e 18, você vai estudar a *cinética de corpos rígidos,* ou seja, as relações que existem entre as forças que atuam sobre um corpo rígido, a forma e a massa desse corpo e o movimento produzido. Nos Caps. 12 e 13, você estudou relações semelhantes, assumindo então que o corpo podia ser considerado como uma partícula, isto é, que sua massa podia ser concentrada em um ponto e que todas as forças atuavam nesse ponto. A forma do corpo, assim como a localização exata dos pontos de aplicação das forças, serão consideradas agora. Além disso, você vai se preocupar não apenas com o movimento do corpo como um todo, mas também com o movimento desse corpo em torno do seu centro de massa.

Nossa abordagem considerará os corpos rígidos como sendo compostos de um grande número de partículas e utilizar os resultados obtidos no Cap. 14 para o movimento de sistemas de partículas. Especificamente, duas equações do Cap. 14 serão utilizadas: a Eq. (14.16), $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$, que relaciona a resultante das forças externas e a aceleração do centro de massa G do sistema de partículas, e a Eq. (14.23), $\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$, que relaciona o momento resultante das forças externas e a taxa de variação da quantidade de movimento angular do sistema de partículas em relação a G.

Com exceção da Seção 16.2, que se aplica ao caso mais geral do movimento de um corpo rígido, os resultados deduzidos neste capítulo serão limitados de duas maneiras: (1) Eles serão restritos ao *movimento plano* de corpos rígidos, isto é, ao movimento no qual cada partícula do corpo permanece a uma distância constante de um plano de referência fixo; (2) Os corpos rígidos considerados consistirão somente de placas planas e de corpos simétricos em relação ao plano de referência*. O estudo do movimento plano de corpos tridimensionais não simétricos e, de maneira mais ampla, do movimento de corpos rígidos no espaço tridimensional, serão abordados no Cap. 18.

Na Seção 16.3, definimos a quantidade de movimento angular de um corpo rígido em movimento plano e mostramos que a taxa de variação da quantidade de movimento angular $\dot{\mathbf{H}}_G$ em relação ao centro de massa é igual ao produto $\bar{I}\alpha$ do momento de inércia de massa em relação ao centro de massa $\bar{I}$ e à aceleração angular α do corpo. O princípio de D'Alembert, introduzido na Seção 16.4, é usado para provar que as forças externas que atuam sobre um corpo rígido são equivalentes a um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ preso ao centro de massa e a um binário de momento $I\alpha$.

Na Seção 16.5, deduzimos o princípio da transmissibilidade usando somente a regra do paralelogramo e as leis de Newton do movimento, permitindo-nos remover esse princípio da lista de axiomas (Seção 1.2), necessários ao estudo da estática e da dinâmica de corpos rígidos.

Equações de diagrama de corpo livre são introduzidas na Seção 16.6 e serão usadas na solução de todos os problemas envolvendo o movimento plano de corpos rígidos.

Depois de considerar o movimento plano de corpos rígidos ligados entre si, na Seção 16.7, você estará preparado para resolver uma variedade de problemas que envolvem a translação, a rotação em torno do centro de massa e o movimento sem restrição de corpos rígidos. Na Seção 16.8 e no restante do capítulo, consideraremos a solução de problemas que incluem rotações em torno de outros pontos que não o centro de massa, o movimento de rolamento e outros movimentos planos parcialmente restritos de corpos rígidos.

* Ou, de modo mais geral, de corpos que têm um eixo principal de inércia que passa pelo centro de massa perpendicular ao plano de referência.

16.2 Equações de movimento para um corpo rígido

Considere um corpo rígido sob a ação de várias forças externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... (Fig. 16.1). Podemos assumir que o corpo é constituído de um grande número n de partículas de massas Δm_i ($i = 1, 2, ..., n$) e aplicar os resultados obtidos no Cap. 14 para um sistema de partículas (Fig. 16.2). Considerando inicialmente o movimento do centro de massa G do corpo em relação ao sistema de referência newtoniano $Oxyz$, recordamos a Eq. (14.16) e escrevemos

$$\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{16.1}$$

onde m é a massa do corpo e $\bar{\mathbf{a}}$ é a aceleração do centro de massa G. Voltando-nos agora ao movimento do corpo em relação ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'z'$, recordamos a Eq. (14.23) e escrevemos

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{16.2}$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_G$, a quantidade de movimento angular em relação a G do sistema de partículas que formam o corpo rígido. No que se segue, vamos nos referir a $\mathbf{H}_G$ simplesmente como a *quantidade de movimento angular do corpo rígido em relação a seu centro de massa G*. As Eqs. (16.1) e (16.2), juntas, expressam que *o sistema das forças externas é equipolente ao sistema constituído do vetor* $m\bar{\mathbf{a}}$ *ligado a G e ao binário de momento* $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 16.3).*

Figura 16.1

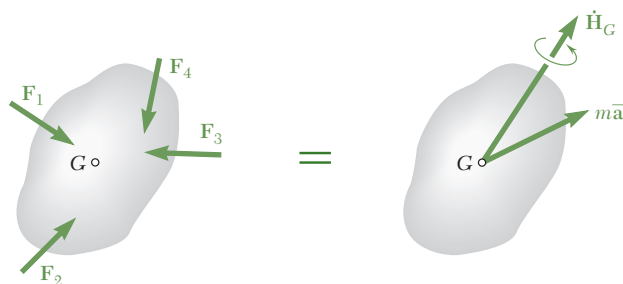



Figura 16.2

Figura 16.3

As Eqs. (16.1) e (16.2) se aplicam no caso mais geral do movimento de um corpo rígido. No restante deste capítulo, contudo, nossa análise se limitará ao *movimento plano* de corpos rígidos, isto é, a um movimento em que cada partícula permanece a uma distância constante de um plano de referência fixo, e assumiremos que os corpos rígidos considerados consistem somente em placas planas e corpos que são simétricos em relação a esse plano de referência. Assim, o estudo do movimento plano de corpos não simétricos tridimensionais e do movimento de corpos rígidos no espaço tridimensional será adiado até o Cap. 18.

Foto 16.1 O sistema de forças externas que atua sobre o homem e a prancha inclui os pesos, a tração no cabo de reboque e as forças exercidas pela água e pelo ar.

* Como os sistemas envolvidos atuam sobre um corpo rígido, poderíamos concluir, neste ponto, referindo-nos à Seção 3.19, que os dois sistemas são *equivalentes*, bem como equipolentes, e utilizar sinais de igualdade em verde, em *vez* de sinais de igualdade preto na Fig. 16.3. Entretanto, se adiarmos essa conclusão, seremos capazes de obtê-la independentemente (Seções 16.4 e 18.5), eliminando, assim, a necessidade de incluir o princípio da transmissibilidade entre os axiomas da mecânica (Seção 16.5).

Figura 16.4

16.3 Quantidade de movimento angular de um corpo rígido em movimento plano

Considere uma placa rígida em movimento plano. Assumindo que a placa é constituída de um grande número n de partículas P_i de massas Δm_i e recordando a Eq. (14.24) da Seção 14.5, notamos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ da placa em relação a seu centro de massa G pode ser calculada tomando-se os momentos em relação a G das quantidades de movimento das partículas da placa em seu movimento em relação aos referenciais Oxy ou $Gx'y'$ (Fig. 16.4). Escolhendo o último método, escrevemos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \,\Delta m_i) \qquad (16.3)$$

onde $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i\,\Delta m_i$ representam, respectivamente, o vetor de posição e a quantidade de movimento linear da partícula P_i em relação ao sistema de referência ligado ao centro de massa $Gx'y'$. Mas como a partícula pertence à placa, temos $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da placa no instante considerado. Escrevemos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\,\Delta m_i]$$

Referindo-nos à Fig. 16.4, verificamos facilmente que a expressão obtida representa um vetor com a mesma direção e sentido que $\boldsymbol{\omega}$ (isto é, perpendicular à placa) e de intensidade igual a $\omega \Sigma r_i'^2 \Delta m_i$. Recordando que a soma $\Sigma r_i'^2 \Delta m_i$ representa o momento de inércia $\bar{I}$ da placa em relação a um eixo perpendicular à placa passando pelo centro de massa, concluímos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ da placa em relação ao seu centro de massa é

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \qquad (16.4)$$

Diferenciando ambos os membros da Eq. (16.4), obtemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \qquad (16.5)$$

Portanto, a taxa da variação da quantidade de movimento angular da placa é representada por um vetor de mesma direção e sentido que $\boldsymbol{\alpha}$ (isto é, perpendicular à placa) e de intensidade $\bar{I}\alpha$.

Deve-se ter em mente que os resultados obtidos nesta seção foram deduzidos para uma placa rígida em movimento plano. Como você verá no Cap. 18, eles permanecem válidos no caso do movimento plano de corpos rígidos que são simétricos em relação ao plano de referência.* Entretanto, não se aplicam ao caso de corpos não simétricos ou no caso de movimento tridimensional.

Foto 16.2 O disco rígido e os braços de captura do disco rígido sofrem rotação em torno do centro de massa.

* Ou, de modo mais geral, de corpos que possuem um eixo principal de inércia ligado ao centro de massa perpendicular ao plano de referência.

16.4 Movimento plano de um corpo rígido. Princípio de D'Alembert

Considere uma placa rígida de massa m que se desloca sob a ação de várias forças externas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ..., contidas no plano da placa (Fig. 16.5). Substituindo o valor de $\dot{\mathbf{H}}_G$ da Eq. (16.5) na Eq. (16.2) e escrevendo as equações fundamentais do movimento (16.1) e (16.2) na forma escalar, temos

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.6}$$

Figura 16.5

As equações de (16.6) mostram que a aceleração do centro de massa G da placa e sua aceleração angular α podem ser facilmente obtidas quando a resultante das forças externas que atuam na placa e seu momento resultante em relação a G tiverem sido determinados. Dadas as condições iniciais apropriadas, as coordenadas $\bar{x}$ e $\bar{y}$ do centro de massa e a coordenada angular θ da placa podem então ser obtidas por integração em qualquer instante t. Portanto, *o movimento da placa é completamente definido pela resultante e pelo momento resultante em relação a G das forças externas que atuam sobre ela.*

Esta propriedade, que será estendida no Cap. 18 ao caso do movimento tridimensional de um corpo rígido, é característica do movimento de um corpo rígido. De fato, como vimos no Cap. 14, o movimento de um sistema de partículas que não estão rigidamente ligadas vai, em geral, depender das forças externas específicas que atuam sobre as várias partículas, como também das forças internas.

Como o movimento de um corpo rígido depende somente da resultante e do momento resultante das forças externas que atuam sobre ele, segue-se que *dois sistemas de forças que são equipolentes,* isto é, que têm a mesma resultante e o mesmo momento resultante, *são também equivalentes;* isto é, eles têm exatamente o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido.*

Considere, em particular, o sistema de forças externas que atuam sobre um corpo rígido (Fig. 16.6*a*) e o sistema das forças efetivas associadas às partículas que formam esse corpo rígido (Fig. 16.6*b*). Foi mostrado na Seção 14.2 que os dois sistemas assim definidos são equipolentes. Mas como as partículas consideradas formam agora um corpo rígido, segue-se que os dois sistemas são também equivalentes. Podemos então afirmar que *as forças externas que atuam sobre um corpo rígido são equivalentes às forças efetivas das várias partículas que formam o corpo.* Essa afirmação é conhecida como *princípio de d'Alembert,* devido ao matemático francês Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), apesar do enunciado original de d'Alembert ter sido escrito de forma um pouco diferente.

Figura 16.6

O fato de o sistema de forças externas ser *equivalente* ao sistema de forças efetivas foi enfatizado pelo uso de sinais de igualdade em verde na Fig. 16.6 e também na Fig. 16.7, onde, usando os resultados obtidos anteriormente nesta seção, substituímos as forças efetivas por um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado ao centro de massa G da placa e um binário de momento $\bar{I}\alpha$.

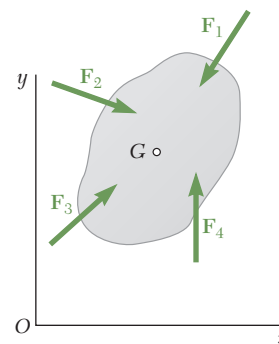
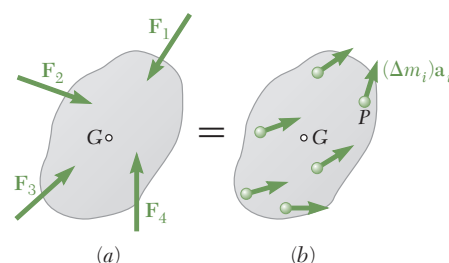
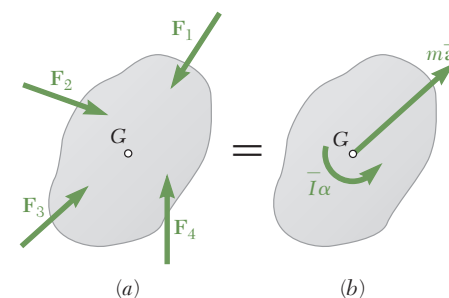



Figura 16.7

* Este resultado já foi deduzido na Seção 3.19 a partir do princípio da transmissibilidade (Seção 3.3). Entretanto, essa dedução é independente daquele princípio e possibilitará sua eliminação dos axiomas da mecânica (Seção 16.5).

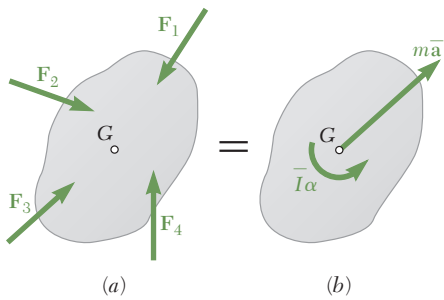



Figura 16.7 (repetida)

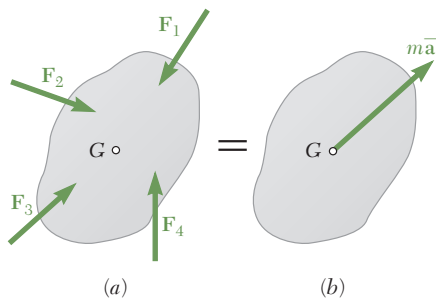



Figura 16.8 Translação.

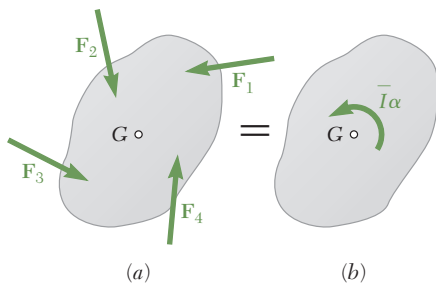



Figura 16.9 Rotação em torno do centro de massa.

Translação. No caso particular de um corpo em translação, a aceleração angular do corpo é identicamente igual a zero e suas forças efetivas se reduzem ao vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado a G (Fig. 16.8). Assim, a resultante das forças externas que atuam sobre um corpo rígido em translação passa pelo centro de massa do corpo e é igual a $m\overline{\mathbf{a}}$.

Rotação em torno do centro de massa. Quando uma placa, ou, mais genericamente, um corpo simétrico em relação ao plano de referência, gira em torno de um eixo fixo perpendicular ao plano de referência, passando pelo seu centro de massa G, dizemos que o corpo está em *rotação em torno do centro de massa.* Como a aceleração $\overline{\mathbf{a}}$ é identicamente igual a zero, as forças efetivas do corpo se reduzem ao binário $\overline{I}\alpha$ (Fig. 16.9). Assim, as forças externas que atuam em um corpo em rotação em torno do centro de massa são equivalentes a um binário de momento $\overline{I}\alpha$.

Movimento plano geral. Comparando a Fig. 16.7 com as Figs. 16.8 e 16.9, observamos que, do ponto de vista da *cinética,* o movimento plano mais geral de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência pode ser substituído pela soma de uma translação e uma rotação em torno do centro de massa. Devemos notar que esta afirmação é mais restritiva do que a afirmação similar feita anteriormente do ponto de vista da *cinemática* (Seção 15.5), uma vez que agora se requer que o centro de massa do corpo seja escolhido como o ponto de referência.

Referindo-nos às Eqs. (16.6), observamos que as duas primeiras equações são idênticas às equações de movimento de uma partícula de massa m sob a ação das forças dadas $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... Verificamos, assim, que *o centro de massa G de um corpo rígido em um movimento plano se move como se toda a massa do corpo estivesse concentrada nesse ponto e como se todas as forças externas atuassem sobre ele.* Recordamos que este resultado já foi obtido na Seção 14.4 no caso geral de um sistema de partículas, partículas essas não necessariamente ligadas rigidamente. Notamos também, como fizemos na Seção 14.4, que o sistema de forças externas em geral não se reduz a um único vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado a G. Portanto, no caso geral do movimento plano de um corpo rígido, *a resultante das forças externas que atuam sobre o corpo não passa pelo centro de massa desse corpo.*

Finalmente, devemos observar que a última das Eqs. (16.6) ainda seria válida se o corpo rígido, embora sujeito às mesmas forças aplicadas, fosse restrito a girar em torno de um eixo fixo passando por G. Portanto, *um corpo rígido em movimento plano gira em torno de seu centro de massa como se esse ponto fosse fixo.*

*16.5 Um comentário sobre os axiomas da mecânica de corpos rígidos

O fato de que dois sistemas equipolentes de forças externas que atuam sobre um corpo rígido são também equivalentes, isto é, que têm o mesmo efeito sobre esse corpo rígido, já foi estabelecido na Seção 3.19. Mas ali ele foi deduzido do *princípio de transmissibilidade,* um dos axiomas utilizado em nosso estudo de estática de corpos rígidos. Deve-se observar que esse axioma não foi utilizado no presente capítulo porque a segunda e a terceira leis de Newton do movimento tornaram desnecessária sua utilização no estudo da dinâmica dos corpos rígidos.

De fato, o princípio de transmissibilidade pode agora ser *deduzido* de outros axiomas utilizados no estudo da mecânica. Este princípio es-

tabeleceu, sem comprovação (Seção 3.3), que as condições de equilíbrio ou de movimento de um corpo rígido permanecerão inalteradas se uma força **F** que atua em um dado ponto do corpo rígido for substituída por uma força **F**′ de mesma intensidade, direção e sentido, mas que atue em um ponto diferente, contanto que as duas forças tenham a mesma linha de ação. Mas como **F** e **F**′ têm o mesmo momento em relação a qualquer ponto dado, é evidente que elas formam dois sistemas equipolentes de forças externas. Assim, podemos agora *provar,* como um resultado do que estabelecemos na seção precedente, que **F** e **F**′ têm o mesmo efeito sobre o corpo rígido (Fig. 3.3).

O princípio da transmissibilidade pode, portanto, ser retirado da relação de axiomas requeridos para o estudo da mecânica do corpo rígido. Esses axiomas se reduzem à lei do paralelogramo para a adição de vetores e às leis de Newton do movimento.

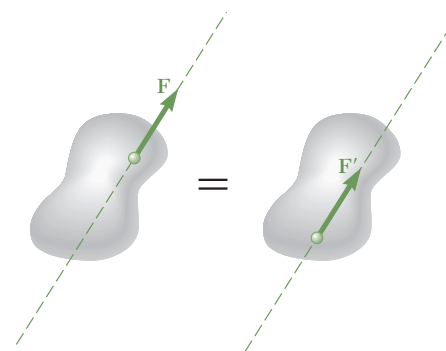



Figura 3.3 (repetida)

16.6 Solução de problemas envolvendo o movimento de um corpo rígido

Vimos, na Seção 16.4, que, quando um corpo rígido está em movimento plano, existe uma relação fundamental entre as forças $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_3$, ... que atuam sobre o corpo, a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ de seu centro de massa e a aceleração angular α do corpo. Esta relação, que está representada na Fig. 16.7 na forma de uma *equação de diagrama de corpo livre,* pode ser usada para determinar a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ e a aceleração angular α produzidas por um dado sistema de forças que atuam sobre um corpo rígido ou, reciprocamente, para determinar as forças que produzem um dado movimento do corpo rígido.

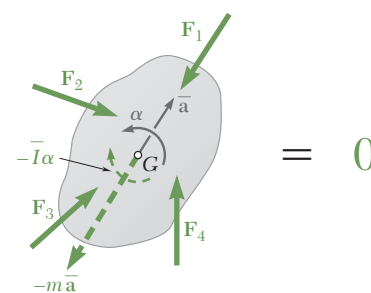
As três equações algébricas de (16.6) podem ser usadas para resolver os problemas de movimento plano.* Contudo, nossa experiência em estática sugere que a solução de muitos problemas envolvendo corpos rígidos pode ser simplificada por uma escolha apropriada do ponto em relação ao qual são calculados os momentos das forças. É preferível, portanto, relembrar a relação existente entre as forças e as acelerações na forma ilustrada, mostrada na Fig. 16.7, e deduzir dessa relação fundamental as equações dos componentes ou dos momentos que melhor se adaptarem à solução do problema em questão.

A relação fundamental mostrada na Fig. 16.7 pode ser apresentada em uma forma alternativa se adicionarmos às forças externas um vetor de inércia $-m\bar{\mathbf{a}}$ com sentido oposto ao de $\bar{\mathbf{a}}$, ligado a G, e um binário de inércia $-\bar{I}\alpha$ com momento igual em intensidade a $\bar{I}\alpha$ e com sentido oposto ao de α (Fig. 16.10). O sistema obtido é equivalente a zero, e diz-se que o corpo rígido está em *equilíbrio dinâmico.*

Figura 16.10

Se o princípio de equivalência das forças externas e efetivas é aplicado diretamente, como na Fig. 16.7, ou se o conceito de equilíbrio dinâmico é introduzido, como na Fig. 16.10, o uso de equações de diagramas de corpo livre que mostram vetorialmente a relação existente entre as forças aplicadas sobre o corpo rígido e as acelerações linear e angular resultantes– apresenta vantagens consideráveis sobre a aplicação pura e simples da Eq. (16.6). Essas vantagens podem ser resumidas como segue

1. O uso de uma representação por figuras fornece um melhor entendimento do efeito das forças sobre o movimento do corpo.

---

* Lembre-se de que a última das Eqs. (16.6) é valida somente no caso de movimento plano de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência. Em todos os demais casos, os métodos do Cap. 18 devem ser usados.

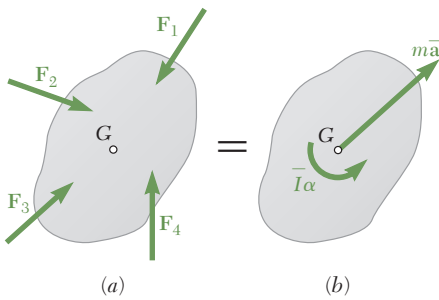



Figura 16.7 (repetida)

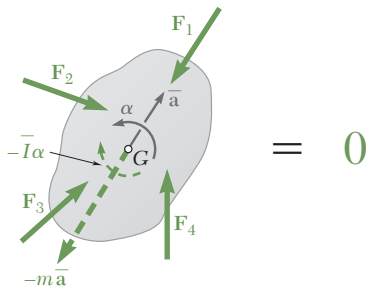



Figura 16.10 (repetida)

2. Esse procedimento possibilita dividir a solução de um problema de dinâmica em duas partes: na primeira parte, a análise das características cinemáticas e cinéticas do problema leva aos diagramas de corpo livre da Fig. 16.7 ou 16.10; na segunda, o diagrama obtido é usado para analisar as várias forças e vetores envolvidos pelos métodos do Cap. 3.
3. Um procedimento unificado é dado para a análise do movimento plano de um corpo rígido, independentemente do tipo de movimento específico que se considere. Enquanto a cinemática dos vários movimentos considerados pode variar de um caso para outro, a abordagem da cinética do movimento é consistentemente a mesma. Para cada caso será desenhado um diagrama mostrando as forças externas, o vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ associado ao movimento de G e o binário $\bar{I}\alpha$ associado à rotação do corpo em torno de G.
4. A resolução do movimento plano de um corpo rígido em uma translação e em uma rotação em torno do centro de massa G, aqui usada, é um conceito básico que pode ser aplicado de modo eficaz em todo o estudo da mecânica. Ela será usada novamente no Cap. 17 com o método de trabalho e energia e com o método de impulso e quantidade de movimento.
5. Como você verá no Cap. 18, esse procedimento pode ser estendido ao estudo do movimento geral tridimensional de um corpo rígido. O movimento do corpo será novamente dividido em uma translação e em uma rotação em torno do centro de massa, e equações de diagramas de corpo livre serão utilizadas para indicar a relação existente entre as forças externas e as taxas de variação das quantidades de movimento linear e angular do corpo.

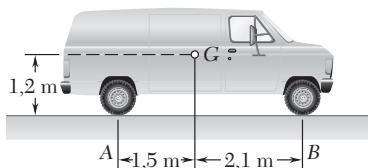
16.7 Sistemas de corpos rígidos

O método descrito na seção anterior também pode ser utilizado em problemas que envolvem o movimento plano de vários corpos rígidos unidos. Para cada parte do sistema, um diagrama similar ao da Fig. 16.7 ou da Fig. 16.10 pode ser desenhado. As equações de movimento obtidas a partir desses diagramas são resolvidas simultaneamente.

Em alguns casos, como no Problema Resolvido 16.3, um diagrama único pode ser desenhado para todo o sistema. Esse diagrama deve incluir todas as forças externas, assim como os vetores $m\bar{\mathbf{a}}$ e os binários $\bar{I}\alpha$ associados às várias partes do sistema. Entretanto, forças internas, como as exercidas por cabos de ligação, podem ser omitidas já que ocorrem em pares de forças iguais e opostas e são, portanto, equipolentes a zero. As equações obtidas, expressando-se que o sistema de forças externas é equipolente ao sistema de forças efetivas, podem ser resolvidas para as incógnitas restantes.*

Não é possível usar este segundo método em problemas que envolvem mais de três incógnitas, já que somente três equações de movimento estão disponíveis quando um único diagrama é utilizado. Não há necessidade de nos alongarmos mais sobre este ponto, já que a discussão seria similar à desenvolvida na Seção 6.11 para o caso do equilíbrio de um sistema de corpos rígidos.

Foto 16.3 A empilhadeira e a carga móvel podem ser analisadas como um sistema de dois corpos rígidos conectados em movimento plano.

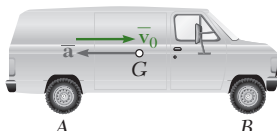
* Note que não podemos falar de sistemas *equivalentes* já que não estamos lidando com um único corpo rígido.

PROBLEMA RESOLVIDO 16.1

Quando a velocidade escalar de avanço do caminhão mostrado na figura era de 10 m/s, os freios foram acionados bruscamente, fazendo com que as quatro rodas parassem de girar. Foi observado que o caminhão derrapou sobre 7 m de pista até o repouso. Determine a intensidade da reação normal e da força de atrito em cada roda enquanto o caminhão derrapava até o repouso.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Escolhendo o sentido positivo para a direita e usando as equações de movimento uniformemente acelerado, escrevemos

$$\bar{v}_0 = +10 \text{ m/s} \qquad \bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}\bar{x} \qquad 0 = (10)^2 + 2\bar{a}(7)$$

$$\bar{a} = -7{,}14 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 7{,}14 \text{ m/s}^2 \leftarrow$$

Equações de movimento. As forças externas consistem no peso $\mathbf{W}$ do caminhão, nas reações normais e nas forças de atrito nas rodas. (Os vetores $\mathbf{N}_A$ e $\mathbf{F}_A$ representam a soma das reações nas rodas traseiras, enquanto $\mathbf{N}_B$ e $\mathbf{F}_B$ representam a soma das reações nas rodas dianteiras.) Como o caminhão está em translação, as forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G. Três equações de movimento são obtidas ao expressar-se que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas.

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \qquad N_A + N_B - W = 0$$

Como $F_A = \mu_k N_A$ e $F_B = \mu_k N_B$, onde μ_k é o coeficiente de atrito cinético, encontramos que

$$F_A + F_B = \mu_k (N_A + N_B) = \mu_k mg$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}: \qquad -(F_A + F_B) = -m\bar{a}$$

$$-\mu_k mg = -m(-7{,}14)$$

$$\mu_k = \frac{7{,}14}{9{,}81} = 0{,}728$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{efet}}: \quad -W(1{,}5 \text{ m}) + N_B(3{,}6 \text{ m}) = m\bar{a}(1{,}2 \text{ m})$$

$$-W(1{,}5 \text{ m}) + N_B(3{,}6 \text{ m}) = \frac{W}{9{,}81 \text{ m/s}^2}(7{,}14 \text{ m/s})^2(1{,}2 \text{ m})$$

$$N_B = 0{,}659W$$

$$F_B = \mu_k N_B = (0{,}728)(0{,}659W) \quad F_B = 0{,}48W$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \quad N_A + N_B - W = 0$$

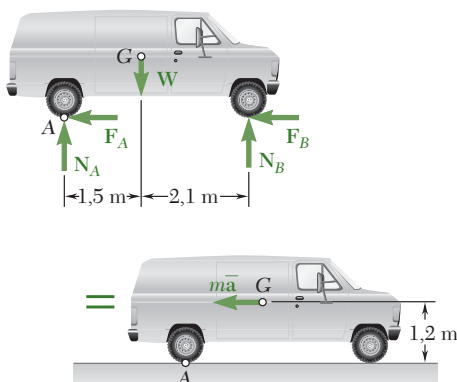
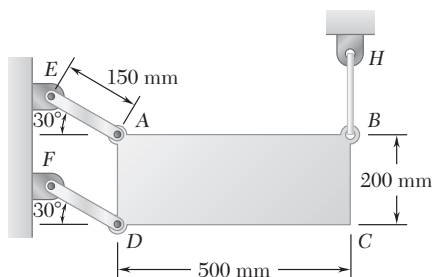
$$N_A + 0{,}659W - W = 0$$

$$N_A = 0{,}341W$$

$$F_A = \mu_k N_A = (0{,}728)(0{,}341W) \qquad F_A = 0{,}248W$$

Reações em cada roda. Recordando que os valores calculados anteriormente representam a soma das reações nas duas rodas dianteiras ou nas duas rodas traseiras, obtemos as intensidades das reações em cada roda escrevendo

$$N_{\text{dian.}} = \tfrac{1}{2} N_B = 0{,}3295W \qquad N_{\text{tras.}} = \tfrac{1}{2} N_A = 0{,}1705W \quad ◀$$

$$F_{\text{dian.}} = \tfrac{1}{2} F_B = 0{,}24W \qquad F_{\text{tras.}} = \tfrac{1}{2} F_A = 0{,}124W \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.2

A placa fina *ABCD* de 8 kg de massa é mantida na posição mostrada pelo fio *BH* e pelas duas hastes de conexão *AE* e *DF*. Desprezando as massas das hastes de conexão, determine, imediatamente após o fio *BH* ser cortado, (*a*) a aceleração da placa e (*b*) a força em cada haste de conexão.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Depois de o fio *BH* ter sido cortado, observamos que os cantos *A* e *D* se movem ao longo de circunferências paralelas de raios iguais a 150 mm centradas, respectivamente, em *E* e *F*. O movimento da placa é, portanto, uma translação curvilínea; as partículas que formam a placa se movem ao longo de circunferências paralelas de 150 mm de raio.

No instante em que o fio *BH* é cortado, a velocidade da placa é nula. Assim, a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa *G* da placa é tangente à trajetória circular que será descrita por *G*.

Equações de movimento. As forças externas consistem no peso **W** e nas forças $\mathbf{F}_{AE}$ e $\mathbf{F}_{DF}$ exercidas pelas hastes de conexão. Como a placa está em translação, as forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a *G* e dirigido ao longo do eixo *t*. Uma equação de diagrama de corpo livre é traçada para mostrar que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas.

a. Aceleração da placa.

$+\swarrow \Sigma F_t = \Sigma (F_t)_{\text{efet}}$:

$$W \cos 30° = m\bar{a}$$

$$mg \cos 30° = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = g \cos 30° = (9{,}81 \text{ m/s}^2) \cos 30° \qquad (1)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 8{,}50 \text{ m/s}^2 \measuredangle 60° \quad ◀$$

b. Forças nas hastes de conexão *AE* e *DF*.

$+\nwarrow \Sigma F_n = \Sigma (F_n)_{\text{efet}}$: $\quad F_{AE} + F_{DF} - W \text{ sen } 30° = 0 \qquad (2)$

$+\circlearrowright \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{\text{efet}}$:

$$(F_{AE} \text{ sen } 30°)(250 \text{ mm}) - (F_{AE} \cos 30°)(100 \text{ mm})$$

$$+ (F_{DF} \text{ sen } 30°)(250 \text{ mm}) + (F_{DF} \cos 30°)(100 \text{ mm}) = 0$$

$$38{,}4F_{AE} + 211{,}6F_{DF} = 0$$

$$F_{DF} = -0{,}1815F_{AE} \qquad (3)$$

Substituindo F_{DF} de (3) em (2), escrevemos

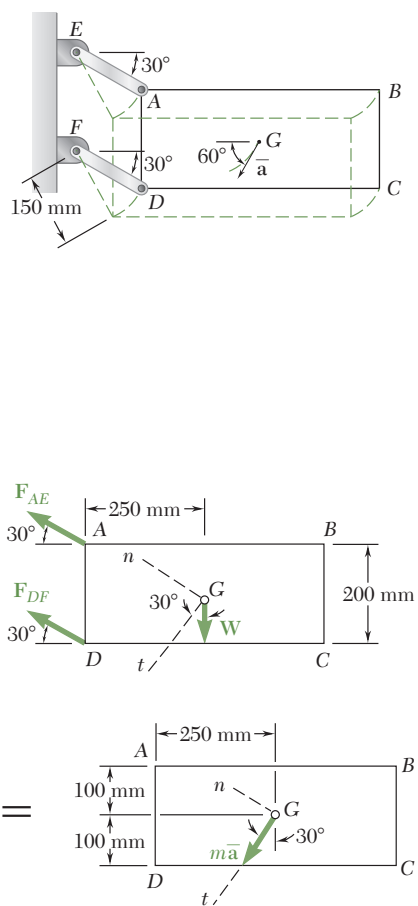
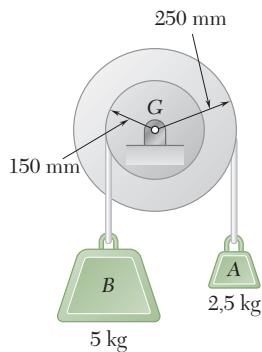
$$F_{AE} - 0{,}1815F_{AE} - W \text{ sen } 30° = 0$$

$$F_{AE} = 0{,}6109W$$

$$F_{DF} = 0{,}1815(0{,}6109W) = -0{,}1109W$$

Observando que $W = mg = (8 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 78{,}48$ N, temos

$$F_{AE} = 0{,}6109(78{,}48 \text{ N}) \qquad F_{AE} = 47{,}9 \text{ N } T \quad ◀$$

$$F_{DF} = -0{,}1109(78{,}48 \text{ N}) \qquad F_{DF} = 8{,}70 \text{ N } C \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.3

Uma polia que pesa 6 kg e tem um raio de giração de 200 mm está unida a dois blocos, como mostrado na figura. Considerando que não exista atrito no eixo, determine a aceleração angular da polia e a aceleração de cada bloco.

SOLUÇÃO

Sentido do movimento. Embora um sentido arbitrário para o movimento possa ser considerado (já que as forças de atrito não estão envolvidas) e posteriormente verificado pelo sinal da resposta, é provável preferirmos determinar em primeiro lugar o sentido real de rotação da polia. O peso do bloco *B* necessário para manter o equilíbrio da polia quando ela está sob a ação do bloco *A* de 2,5 kg é determinado inicialmente. Escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = 0: \quad m_B g(150 \text{ mm}) - (2{,}5 \text{ kg})g\,(250 \text{ mm}) = 0 \quad m_B = 4{,}167 \text{ kg}$$

Como o bloco *B* pesa realmente 5 kg, a polia girará no sentido anti-horário.

Cinemática do movimento. Supondo que $\boldsymbol{\alpha}$ tenha o sentido anti-horário e observando que $a_A = r_A\alpha$ e $a_B = r_B\alpha$, obtemos

$$\mathbf{a}_A = (0{,}25 \text{ m})\alpha \uparrow \qquad \mathbf{a}_B = (0{,}15 \text{ m})\alpha \downarrow$$

Equações de movimento. Um sistema único constituído pela polia e pelos dois blocos é considerado. As forças externas a este sistema são os pesos da polia e dos dois blocos e a reação em *G*. (As forças exercidas pelos cabos sobre a polia e sobre os blocos, são internas ao sistema considerado e se anulam.) Como o movimento da polia é uma rotação em torno do centro de massa e o movimento de cada bloco é uma translação, as forças efetivas se reduzem ao binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ e aos dois vetores $m\mathbf{a}_A$ e $m\mathbf{a}_B$. O momento de inércia em torno do centro de massa da polia é

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (6 \text{ kg})(0{,}2 \text{ m})^2 = 0{,}24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Como o sistema das forças externas é equipolente ao sistema de forças efetivas, escrevemos

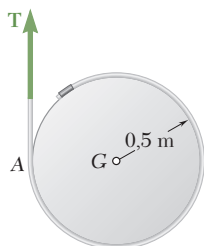
$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{efet}}:$$

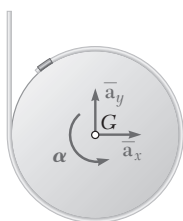
$$(5 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}15 \text{ m}) - (2{,}5 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)(0{,}25\text{m}) = +\bar{I}\alpha + m_B a_B(0{,}15 \text{ m}) + m_A a_A(0{,}25 \text{ m})$$

$$7{,}3575 - 6{,}1312 = 0{,}24\alpha + 5(0{,}15\alpha)(0{,}15) + 2{,}5(0{,}25\alpha)(0{,}25)$$

$$\alpha = +2{,}41 \text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 2{,}41 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \quad ◀$$

$$a_A = r_A\alpha = (0{,}25 \text{ m})(2{,}41 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_A = 0{,}603 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

$$a_B = r_B\alpha = (0{,}15 \text{ m})(2{,}41 \text{ rad/s}^2) \qquad \mathbf{a}_B = 0{,}362 \text{ m/s}^2 \downarrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.4

Uma corda está enrolada em torno de um disco homogêneo de raio $r = 0{,}5$ m e massa $m = 15$ kg. Se a corda for puxada para cima com uma força $\mathbf{T}$ de intensidade igual a 180 N, determine (a) a aceleração do centro do disco, (b) a aceleração angular do disco e (c) a aceleração da corda.

SOLUÇÃO

Equações de movimento. Assumimos que os componentes $\bar{\mathbf{a}}_x$ e $\bar{\mathbf{a}}_y$ da aceleração do centro do disco estão dirigidos, respectivamente, para a direita e para cima e que a aceleração angular do disco está no sentido anti-horário. As forças externas que agem no disco consistem no peso $\mathbf{W}$ e na força $\mathbf{T}$ exercida pela corda. Esse sistema é equivalente ao sistema de forças efetivas, que consiste em um vetor de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ e $m\bar{\mathbf{a}}_y$ ligados a G e em um binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Escrevemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}: \qquad 0 = m\bar{a}_x \qquad \bar{\mathbf{a}}_x = 0 \quad ◀$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \qquad T - W = m\bar{a}_y$$

$$\bar{a}_y = \frac{T - W}{m}$$

Como $T = 180$ N, $m = 15$ kg e $W = (15 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 147{,}1$ N, temos

$$\bar{a}_y = \frac{180 \text{ N} - 147{,}1 \text{ N}}{15 \text{ kg}} = +2{,}19 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}}_y = 2{,}19 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

$$+\circlearrowleft \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{efet.}}: \qquad -Tr = \bar{I}\alpha$$

$$-Tr = \left(\tfrac{1}{2}mr^2\right)\alpha$$

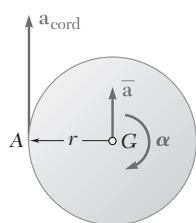
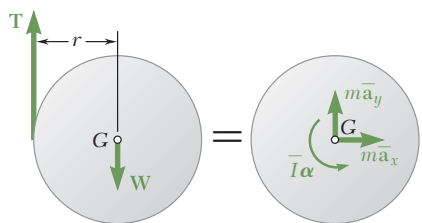
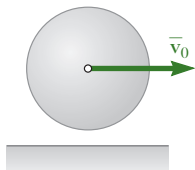
$$\alpha = -\frac{2T}{mr} = -\frac{2(180 \text{ N})}{(15 \text{ kg})(0{,}5 \text{ m})} = -48{,}0 \text{ rad/s}^2$$

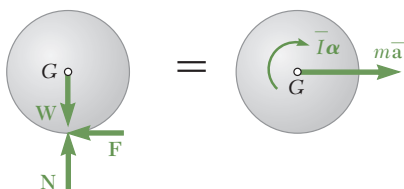
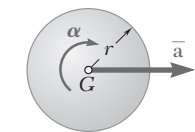
$$\boldsymbol{\alpha} = 48{,}0 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \quad ◀$$

Aceleração da corda. Como a aceleração da corda é igual ao componente tangencial da aceleração do ponto A no disco, escrevemos

$$\mathbf{a}_{\text{corda}} = (\mathbf{a}_A)_t = \bar{\mathbf{a}} + (\mathbf{a}_{A/G})_t$$

$$= [2{,}19 \text{ m/s}^2 \uparrow] + [(0{,}5 \text{ m})(48 \text{ rad/s}^2) \uparrow]$$

$$\mathbf{a}_{\text{corda}} = 26{,}2 \text{ m/s}^2 \uparrow \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.5

Uma esfera uniforme de massa m e raio r é lançada sobre uma superfície horizontal rugosa com uma velocidade linear $\overline{\mathbf{v}}_0$ e velocidade angular nula. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e o piso, determine (a) o instante t_1 em que a esfera começa a rolar sem deslizar e (b) a velocidade linear e a velocidade angular da esfera no instante t_1.

SOLUÇÃO

Equações de movimento. O sentido positivo é escolhido para a direita para $\overline{\mathbf{a}}$ e no sentido horário para $\boldsymbol{\alpha}$. As forças externas que atuam sobre a esfera consistem no peso **W**, na reação normal **N** e na força de atrito **F**. Como o ponto da esfera em contato com a superfície está deslizando para a direita, a força de atrito **F** está dirigida para a esquerda. Enquanto a esfera está deslizando, a intensidade da força de atrito é $F = \mu_k N$. As forças efetivas consistem no vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado a G e no binário $\overline{I}\boldsymbol{\alpha}$. Expressando que o sistema das forças externas é equivalente ao sistema das forças efetivas, escrevemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma (F_y)_{\text{efet}}: \qquad N - W = 0$$

$$N = W = mg \qquad F = \mu_k N = \mu_k mg$$

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma (F_x)_{\text{efet}}: \qquad -F = m\overline{a} \qquad -\mu_k mg = m\overline{a} \qquad \overline{a} = -\mu_k g$$

$$+\downarrow \Sigma M_G = \Sigma (M_G)_{\text{efet}}: \qquad Fr = \overline{I}\alpha$$

Observando que $\overline{I} = \frac{2}{5}mr^2$ e substituindo o valor obtido para F, escrevemos

$$(\mu_k mg)r = \frac{2}{5}mr^2\alpha \qquad \alpha = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}$$

Cinemática do movimento. Enquanto a esfera estiver girando e deslizando, seus movimentos linear e angular serão uniformemente acelerados.

$$t = 0,\ \overline{v} = \overline{v}_0 \qquad \overline{v} = \overline{v}_0 + \overline{a}t = \overline{v}_0 - \mu_k g t \qquad (1)$$

$$t = 0,\ \omega_0 = 0 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\right)t \qquad (2)$$

A esfera vai começar a rolar sem deslizar quando a velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto de contato C for zero. Nesse instante, $t = t_1$, o ponto C se torna o centro instantâneo de rotação e temos

$$\overline{v}_1 = r\omega_1 \qquad (3)$$

Substituindo em (3) os valores obtidos para $\overline{v}_1$ e ω_1, quando fazemos $t = t_1$ em (1) e (2), respectivamente, escrevemos

$$\overline{v}_0 - \mu_k g t_1 = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1\right) \qquad t_1 = \frac{2}{7}\frac{\overline{v}_0}{\mu_k g} \blacktriangleleft$$

Substituindo o valor de t_1 em (2), temos

$$\omega_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t_1 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\overline{v}_0}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_1 = \frac{5}{7}\frac{\overline{v}_0}{r} \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \frac{5}{7}\frac{\overline{v}_0}{r}\downarrow \blacktriangleleft$$

$$\overline{v}_1 = r\omega_1 = r\left(\frac{5}{7}\frac{\overline{v}_0}{r}\right) \qquad \overline{v}_1 = \frac{5}{7}\overline{v}_0 \qquad \overline{\mathbf{v}}_1 = \frac{5}{7}\overline{v}_0 \rightarrow \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Este capítulo trata do *movimento plano* de corpos rígidos e, nesta primeira lição, consideramos corpos rígidos que estão livres para se movimentar sob a ação de forças aplicadas.

1. Forças efetivas. Primeiramente recordamos que um corpo rígido consiste de um grande número de partículas. Vimos que as forças efetivas das partículas que formam o corpo são equivalentes a um vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado ao centro de massa G do corpo e a um binário de momento $\overline{I}\alpha$ (Fig. 16.7). Observando que as forças aplicadas são equivalentes às forças efetivas, escrevemos

$$\Sigma F_x = m\overline{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\overline{a}_y \qquad \Sigma M_G = \overline{I}\alpha \tag{16.5}$$

onde $\overline{a}_x$ e $\overline{a}_y$ são os componentes x e y da aceleração do centro de massa G do corpo e α é a aceleração angular desse corpo. É importante notar que quando essas equações são usadas, *os momentos das forças aplicadas devem ser calculados em relação ao centro de massa do corpo.* Entretanto, você aprendeu um método mais eficiente de solução baseado no uso de uma equação de diagrama de corpo livre.

2. Equação de diagrama de corpo livre. Seu primeiro passo para a solução de um problema deve ser desenhar uma *equação de diagrama de corpo livre.*

a. Uma equação de diagrama de corpo livre consiste em dois diagramas que representam dois sistemas equivalentes de vetores. *No primeiro diagrama,* você deve mostrar as *forças exercidas sobre o corpo,* incluindo as forças aplicadas, as reações nos apoios e o peso do corpo. *No segundo diagrama,* você deve mostrar o vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ e o binário $\overline{I}\alpha$ representando *as forças efetivas.*

b. Usar uma equação de diagrama de corpo livre permite-lhe *somar os componentes em qualquer direção e somar os momentos em relação a qualquer ponto.* Ao escrever as três equações de movimento necessárias para solucionar um dado problema, você pode então selecionar uma ou mais equações envolvendo uma só incógnita. Solucionando em primeiro lugar essas equações e substituindo os valores obtidos para as incógnitas na(s) equação(ões) restante(s), você terá uma solução mais simples.

3. Movimento plano de um corpo rígido. Os problemas que lhe serão apresentados recairão em uma das seguintes categorias.

a. Corpo rígido em translação. Para um corpo em translação, a aceleração angular é igual a zero. As forças efetivas se reduzem *ao vetor* $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado no centro da massa [Problemas Resolvidos 16.1 e 16.2].

b. Rotação de um corpo rígido em torno do centro de massa. Para uma rotação de um corpo em torno do centro de massa, a aceleração do centro de massa é igual a zero. As forças efetivas se reduzem *ao binário* $\bar{I}\alpha$ [Problema Resolvido 16.3].

c. Corpo rígido em movimento plano geral. Você pode considerar o movimento plano geral de um corpo rígido como a soma de uma translação e de uma rotação em torno do centro de massa. As forças efetivas são equivalentes ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e ao binário $\bar{I}\alpha$ [Problemas Resolvidos 16.4 e 16.5].

4. Movimento plano de um sistema de corpos rígidos. Você deve primeiramente desenhar uma equação de diagrama de corpo livre que inclua todos os corpos rígidos do sistema. Um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e um binário $\bar{I}\alpha$ são ligados a cada corpo. Entretanto, as forças exercidas entre si pelos vários corpos do sistema podem ser omitidas, já que eles ocorrem em pares de forças iguais e opostas.

a. Se não mais que três incógnitas estão envolvidas, você pode usar essa equação de diagrama de corpo livre e somar os componentes em qualquer direção e os momentos em relação a qualquer ponto para obter equações que possam ser solucionadas para as incógnitas desejadas [Problema Resolvido 16.3].

b. Se mais de três incógnitas estão envolvidas, você deve desenhar uma equação de diagrama de corpo livre separada para cada um dos corpos rígidos do sistema. Tanto as forças internas como as externas devem ser incluídas em cada uma das equações de diagrama de corpo livre e você deve ter cuidado para representar com vetores iguais e opostos as forças que dois corpos exercem um sobre o outro.

PROBLEMAS

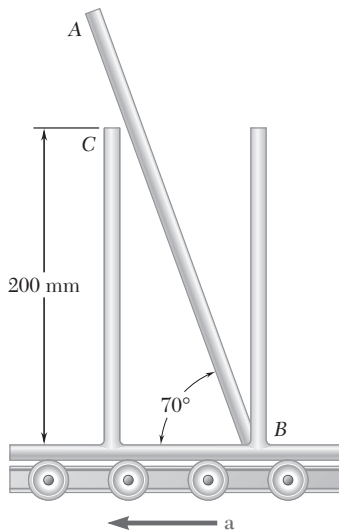



Figura P16.1 e P16.2

16.1 Um sistema de transporte é equipado com painéis verticais, e uma barra AB de 300 mm e de massa 2,5 kg é depositada entre dois painéis como mostra a figura. Sabendo que a aceleração do sistema é 1,5 m/s^2 para a esquerda, determine (a) a força exercida na barra em C, (b) a reação em B.

16.2 Um sistema de transporte é equipado com painéis verticais, e uma barra AB de 300 mm e de massa 2,5 kg é depositada entre dois painéis como mostra a figura. Se a barra permanece na posição mostrada na figura, determine a máxima aceleração admissível do sistema.

16.3 Um quadro de 2 m é colocado em um caminhão com uma extremidade repousando sobre um bloco preso no piso e a outra apoiada em uma divisória vertical. Determine a máxima aceleração admissível do caminhão para que o quadro permaneça na posição mostrada na figura.

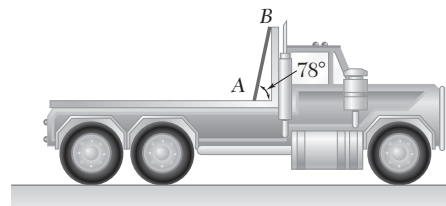



Figura P16.3

16.4 Uma barra uniforme BC de massa 4 kg é conectada a um colar A por uma corda AB de 250 mm. Desprezando a massa do colar e da corda, determine (a) a menor aceleração constante $\mathbf{a}_A$ para a qual a corda e a barra ficarão em linha reta, (b) a tração correspondente na corda.

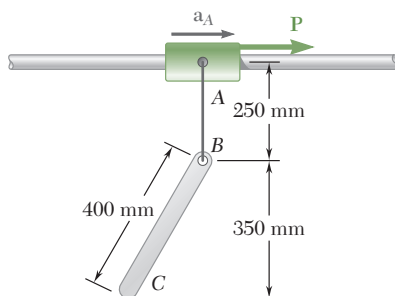



Figura P16.4

16.5 Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada é de 0,80 para o veículo mostrado na figura, determine a aceleração máxima possível, em uma estrada nivelada, considerando (a) tração nas quatro rodas, (b) tração nas rodas traseiras, (c) tração nas rodas dianteiras.

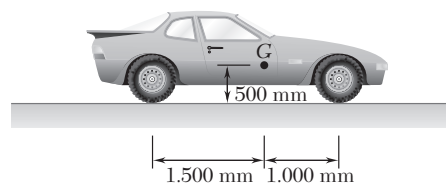



Figura P16.5

16.6 Para o caminhão do Problema Resolvido 16.1, determine a distância que ele vai derrapar se (a) os freios traseiros não funcionarem, (b) os freios dianteiros não funcionarem.

16.7 Um armário de 20 kg é montado sobre rodinhas que o deixam mover-se livremente ($\mu = 0$) sobre o chão. Se uma força de 100 N for aplicada como mostra a figura, determine (a) a aceleração do armário, (b) o intervalo de valores de h nos quais o armário não tombará.

16.8 Resolva o Problema 16.7, considerando que as rodinhas estão travadas e que escorregam no piso áspero ($\mu_k = 0{,}25$).

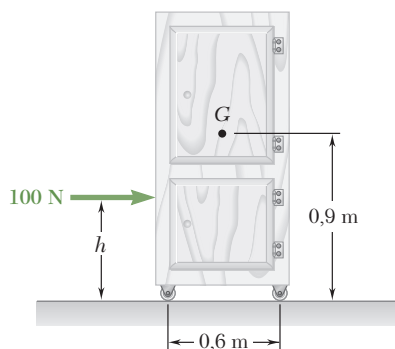



Figura P16.7

16.9 A empilhadeira mostrada na figura tem a massa de 1.125 kg e é usada para elevar um caixote de massa $m = 1.250$ kg. Sabendo que a empilhadeira está em repouso, determine (*a*) a aceleração para cima para a qual as reações nas rodas traseiras *B* sejam nulas, (*b*) a reação correspondente em cada uma das rodas dianteiras *A*.

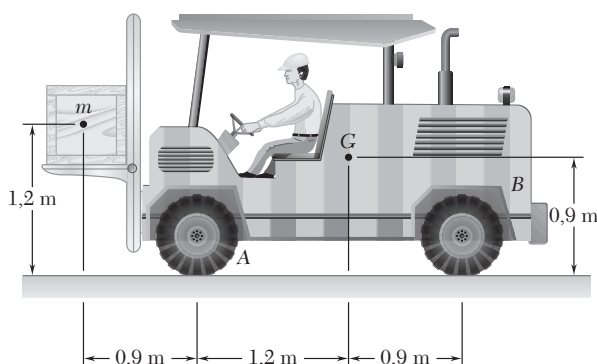



Figura P16.9 e P16.10

16.10 A empilhadeira mostrada na figura tem massa de 1.125 kg e é usada para elevar um caixote de massa $m = 1.250$ kg. A empilhadeira está se movendo para a esquerda com velocidade de 3 m/s quando os freios são acionados em todas as quatro rodas. Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre o engradado e o garfo da empilhadeira é 0,30, determine a menor distância que a empilhadeira pode utilizar para parar se o caixote não desliza e se a empilhadeira não tomba para frente.

16.11 O suporte mostrado na figura é usado para transportar uma lata cilíndrica de um nível de elevação para o outro. Sabendo que $\mu_s = 0{,}25$ entre a lata e o suporte, determine (*a*) a intensidade da aceleração para cima **a** em que a lata vai escorregar no suporte, (*b*) a menor relação h/d em que a lata vai tombar antes de escorregar.

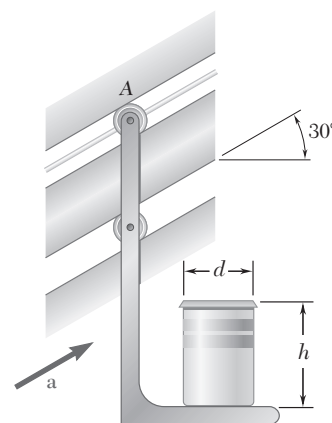



Figura P16.11

16.12 Resolva o Problema 16.11, considerando que a aceleração **a** do suporte é dirigida para baixo.

16.13 Considerando que a massa de um barril cheio somado com seu conteúdo tem uma massa combinada de 100 kg. Um cilindro *C* é ligado ao barril na altura $h = 550$ mm como mostra a figura. Sabendo que $\mu_s = 0{,}40$ e $\mu_k = 0{,}35$, determine o peso máximo de *C* para o qual o barril não tombará.

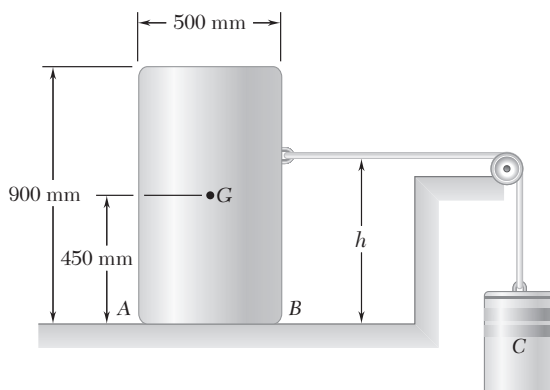



Figura P16.13

16.14 Uma placa retangular uniforme tem uma massa de 5 kg e é mantida na posição por três cordas como mostrado na figura. Sabendo que $\theta = 30°$, determine, imediatamente depois da corda *CF* ter sido cortada, (*a*) a aceleração da placa, (*b*) a tração nas cordas *AD* e *BE*.

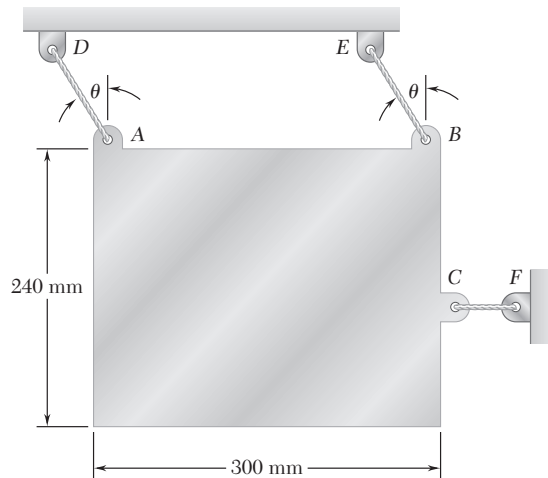



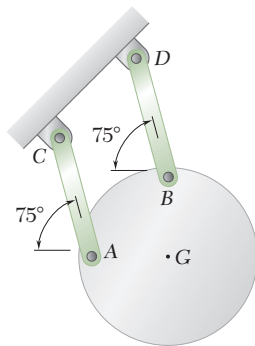
Figura P16.14 e *P16.15*

16.15 Uma placa retangular uniforme tem massa de 5 kg e é mantida na posição por três cordas como mostrado na figura. Determine o maior valor de θ para que ambas as cordas *AD* e *BE* permaneçam esticadas imediatamente depois da corda *CF* ter sido cortada.

Figura P16.16

16.16 Um prato uniforme circular de massa de 3 kg é unido a duas hastes de conexão *AC* e *BD* de mesmo comprimento. Sabendo que o prato é solto a partir do repouso na posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração do prato e (*b*) a tração em cada haste de conexão.

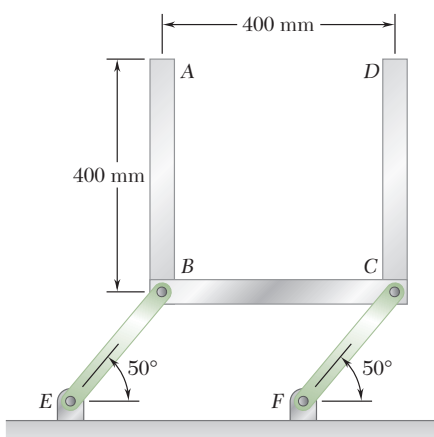



Figura P16.17

16.17 Três barras, cada uma de massa de 4 kg, são soldadas juntas e unidas por pinos a duas hastes de conexão *BE* e *CF*. Desprezando o peso das hastes de conexão, determine a força em cada haste de conexão imediatamente depois do sistema ser liberado do repouso.

16.18 No instante mostrado na figura, a velocidade angular das hastes de conexão *BE* e *CF* é de 6 rad/s no sentido anti-horário e está diminuindo a uma taxa de 12 rad/s². Sabendo que o comprimento de cada haste de conexão é de 300 mm e desprezando o peso das hastes de conexão, determine (*a*) a força **P** e (*b*) a força correspondente em cada haste de conexão. A massa da barra *AD* é de 6 kg.

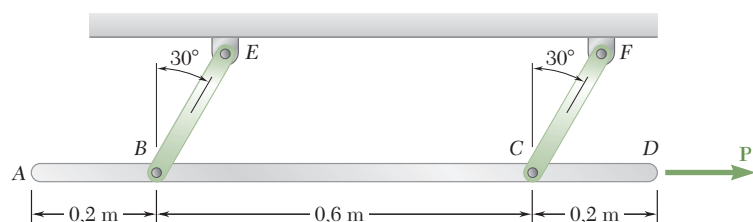



Figura *P16.18*

16.19 Uma barra BC de 7,5 kg conecta-se a um disco centrado em A e na manivela CD. Sabendo que o disco é colocado para rodar a uma velocidade constante de 180 rpm, determine, para a posição mostrada na figura, a componente vertical das forças exercidas na barra BC pelo pino em B e C.

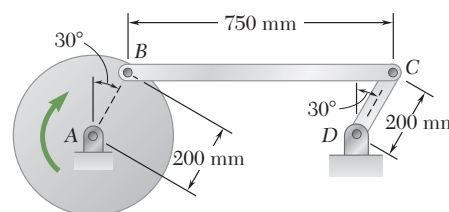



Figura P16.19

16.20 Uma estrutura soldada triangular ABC é guiada por dois pinos que deslizam livremente em rasgos curvos paralelos de raio 150 mm cortados em uma placa vertical. A estrutura soldada tem uma massa de 8 kg e seu centro de massa é localizado no ponto G. Sabendo que no instante mostrado na figura a velocidade de cada pino é 750 mm/s para baixo ao longo dos rasgos, determine (a) a aceleração da estrutura soldada, (b) as reações em A e B.

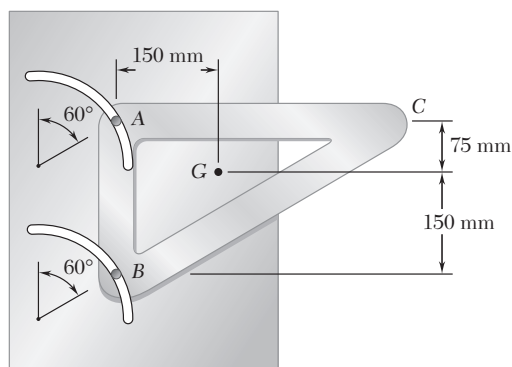



Figura P16.20

***16.21** Desenhe os diagramas de esforço cortante e de momento fletor da barra AB do Problema 16.17.

***16.22** Desenhe os diagramas de esforço cortante e de momento fletor da barra de conexão BC do Problema 16.19.

16.23 Para uma placa rígida em translação, mostre que o sistema das forças efetivas consiste de vetores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$ unidos às várias partículas da placa, onde $\bar{\mathbf{a}}$ é a aceleração do centro de massa G da placa. Mostre também, calculando sua soma e a soma de seus momentos em relação a G, que as forças efetivas são reduzidas a um único vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado em G.

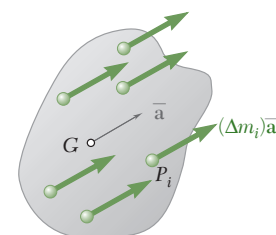



Figura P16.23

16.24 Para uma placa rígida em rotação em torno do centro de massa, mostre que o sistema de forças efetivas consiste de vetores $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}_i'$ e $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_i')$ ligados às várias partículas P_i da placa, onde $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são a velocidade angular e a aceleração angular da placa, e onde $\mathbf{r}_i'$ representa a posição da partícula P_i em relação ao seu centro de massa G. Mostre também, calculando sua soma e a soma de seus momentos em relação a G, que as forças efetivas se reduzem a um binário $\bar{I}\alpha$.

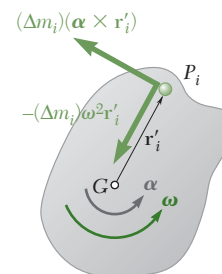



Figura P16.24

16.25 Um volante de motor de 3.000 kg leva 10 minutos para desacelerar até o repouso a partir de uma velocidade angular de 300 rpm. Sabendo que o raio de giração do volante é de 900 mm, determine a intensidade média do binário devida ao atrito cinético nos mancais.

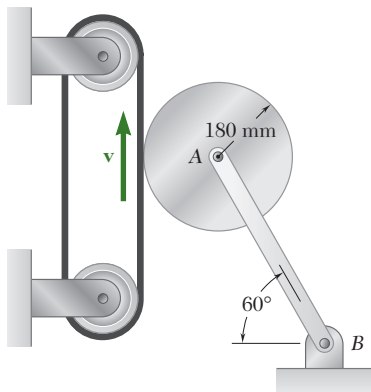
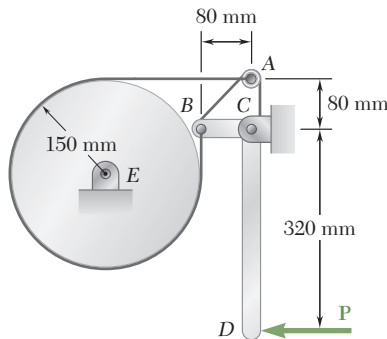



Figura P16.27

16.26 O rotor de um motor elétrico tem uma velocidade angular de 3.600 rpm quando a carga e a energia elétrica são desligadas. O rotor de 50 kg, que tem um raio de giração em relação ao centro de massa de 180 mm, então gira desacelerando até o repouso. Sabendo que o atrito cinético resulta em um binário de intensidade 3,5 N · m exercido sobre o rotor, determine o número de revoluções que o rotor executa antes de chegar ao repouso.

16.27 Um disco de raio 180 mm está em repouso quando é colocado em contato com uma correia em movimento com velocidade constante. Desprezando o peso da haste de conexão *AB* e sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a correia é 0,40, determine a aceleração angular do disco enquanto ocorre o deslizamento.

16.28 Resolva o Problema 16.27, considerando que a direção do movimento da correia é revertida.

Figura P16.29

16.29 Um tambor de freio de 150 mm é ligado a um volante de motor maior que não é mostrado na figura. O momento de inércia total da massa do tambor e do volante é 75 kg · m^2. Uma cinta de freio é utilizada para controlar o movimento do sistema e o coeficiente de atrito cinético entre a cinta e o tambor é 0,25. Sabendo que a força **P** de 100 N é aplicada quando a velocidade angular inicial do sistema é 240 rpm no sentido horário, determine o tempo requerido para o sistema parar. Mostre que o mesmo resultado é obtido se a velocidade angular inicial do sistema é 240 rpm no sentido anti-horário.

16.30 O tambor de freio de 200 mm de raio é unido a um volante maior que não está mostrado na figura. O momento de inércia total da massa do tambor e do volante é de 20 kg · m^2 e o coeficiente de atrito cinético entre o tambor e a sapata de freio é 0,35. Sabendo que a velocidade angular do volante é de 360 rpm no sentido anti-horário quando a força **P** de intensidade 400 N é aplicada ao pedal *C*, determine o número de revoluções executadas pelo volante antes de ele parar.

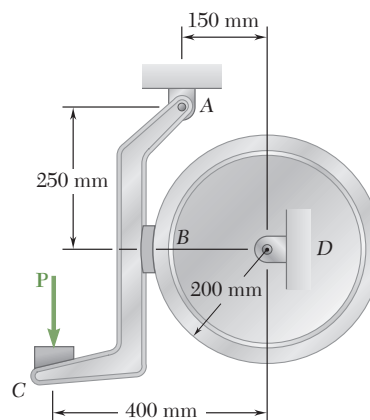



Figura P16.30

16.31 Resolva o Problema 16.30, considerando que velocidade angular inicial do volante é de 360 rpm no sentido horário.

16.32 O volante de motor mostrado na figura tem um raio de 500 mm, massa de 120 kg e um raio de giração de 375 mm. Um bloco *A* de 15 kg é preso a um fio que é enrolado em torno do volante e o sistema é solto a partir do repouso. Desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a aceleração do bloco *A*, (*b*) a velocidade do bloco *A* depois de ele ter se deslocado 1,5 m.

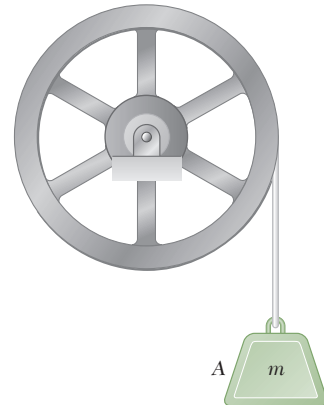



Figura *P16.32* e *P16.33*

16.33 Para poder determinar o momento de inércia de massa de um volante de raio de 600 mm, um bloco de 12 kg é ligado a um fio que é enrolado em torno do volante de motor. O bloco é solto e observa-se que ele cai 3 m em 4,6 s. Para eliminar o atrito do mancal dos cálculos, um segundo bloco de massa 24 kg é usado e observa-se que ele cai 3 m em 3,1 s. Considerando que o momento do binário devido ao atrito permanece constante, determine o momento de inércia de massa do volante.

16.34 Cada uma das roldanas duplas mostradas na figura tem um momento de inércia de massa de 20 kg · m^2 e está inicialmente em repouso. O raio externo é de 500 mm e o interno de 250 mm. Determine (*a*) a aceleração angular de cada uma das roldanas, (*b*) a velocidade angular de cada uma das roldanas depois do ponto *A* na corda ter se deslocado 3 m.

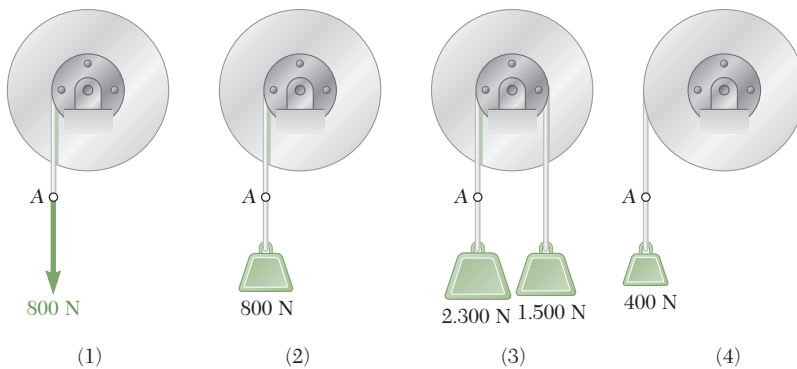



Figura P16.34

16.35 Cada uma das engrenagens *A* e *B* tem massa de 10 kg e um raio de giração de 150 mm; a engrenagem *C* tem uma massa de 2,5 kg e um raio de giração de 60 mm. Se o binário **M** de intensidade constante 6 N · m é aplicada à engrenagem *C*, determine (*a*) a aceleração angular da engrenagem *A*, (*b*) a força tangencial que a engrenagem *C* exerce na engrenagem *A*.

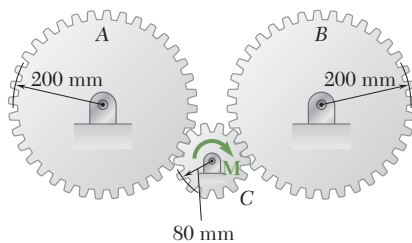



Figura *P16.35*

16.36 Resolva o Problema 16.35, considerando que o binário **M** é aplicado ao disco *A*.

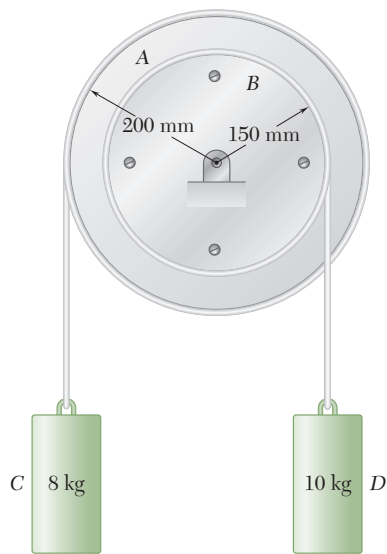
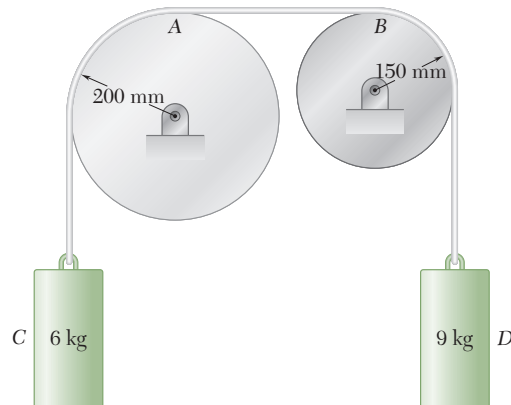



Figura P16.37

16.37 e 16.38 Dois discos uniformes e dois cilindros são montados como indicado na figura. O disco *A* tem a massa de 10 kg e o disco *B* tem a massa de 8 kg. Sabendo que o sistema é liberado do repouso, determine a aceleração (*a*) do cilindro *C*, (*b*) do cilindro *D*.

16.37 Os discos *A* e *B* são aparafusados juntos e os cilindros são ligados em cordas separadas enroladas nos discos.

16.38 Os cilindros são ligados a uma única corda que passa sobre os discos. Considere que nenhum escorregamento ocorre entre a corda e os discos.

Figura P16.38

16.39 O disco *A* tem massa de 6 kg e velocidade angular inicial de 360 rpm no sentido horário; o disco *B* tem massa de 3 kg e está inicialmente em repouso. Os discos são ligados aplicando-se uma força horizontal de intensidade 20 N ao eixo do disco *A*. Sabendo que $\mu_k = 0{,}15$ entre os discos e desprezando o atrito no mancal, determine (*a*) a aceleração angular de cada disco, (*b*) a velocidade angular final de cada disco.

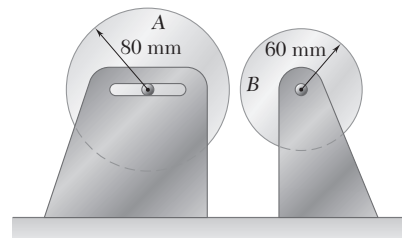



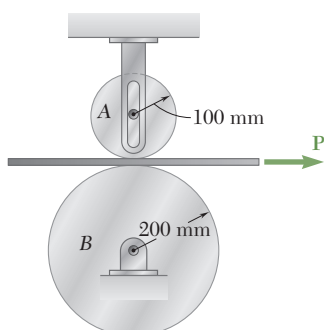
Figura P16.39

16.40 Resolva o Problema 16.39 considerando que o disco *A* está inicialmente em repouso e que o disco *B* tem uma velocidade angular de 360 rpm no sentido horário.

Figura P16.41

16.41 Uma correia de massa desprezível passa entre os cilindros *A* e *B* e é puxada para a direita com a força **P**. Os cilindros *A* e *B* têm respectivamente massa de 2,5 e 10 kg. O eixo do cilindro *A* é livre para deslizar no rasgo vertical e os coeficientes de atrito entre a correia e cada cilindro são $\mu_s = 0{,}50$ e $\mu_k = 0{,}40$. Para $P = 18$ N, determine (*a*) se ocorre ou não deslizamento entre a correia e um dos cilindros, (*b*) a aceleração angular de cada cilindro.

16.42 Resolva o Problema 16.41 para $P = 10$ N.

16.43 O disco A de 3 kg tem raio $r_A = 75$ mm e velocidade angular inicial $\omega_0 = 375$ rpm no sentido horário. O disco B de 7,5 kg tem um raio $r_B = 125$ mm e está em repouso. Uma força $\mathbf{P}$ de 12,5 N de intensidade é então aplicada para pôr os discos em contato. Sabendo que $\mu_s =$ 0,25 entre os discos e desprezando o atrito do mancal, determine (*a*) a aceleração angular de cada disco, (*b*) a velocidade angular final de cada disco.

Figura *P16.43* e P16.45

16.44 Resolva o Problema 16.43, considerando que o disco A está inicialmente em repouso e que o disco B tem uma velocidade angular de 375 rpm no sentido horário.

16.45 O disco B tem uma velocidade angular ω_0 quando ele é posto em contato com o disco A, que está em repouso. Mostre que (*a*) as velocidade angulares finais dos discos são independentes do coeficiente de atrito μ_k entre os discos desde que $\mu_k \neq 0$, (*b*) a velocidade angular final do disco B depende somente de ω_0 e da razão das massas m_A e m_B dos dois discos.

16.46 Mostre que o sistema de forças efetivas para uma placa rígida em movimento plano é reduzido a um único vetor e expresse a distância do centro de massa G da placa à linha de ação desse vetor em termos do raio de giração em torno do centro de massa $\bar{k}$ da placa, da intensidade $\bar{a}$ da aceleração de G e da aceleração angular α.

Figura P16.47

16.47 Para uma placa rígida em movimento plano, mostre que o sistema das forças efetivas consiste dos vetores $(\Delta m_i)\bar{\mathbf{a}}$, $-(\Delta m_i)\omega^2\mathbf{r}'_i$ e $(\Delta m_i)(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}'_i)$ ligados às várias partículas P_i da placa, onde $\bar{\mathbf{a}}$ é a aceleração do centro de massa G da placa, ω é a velocidade angular da placa, α é sua aceleração angular e $\mathbf{r}'_i$ representa o vetor de posição da partícula P_i em relação a G. Mostre também, calculando sua soma e a soma de seus momentos em relação a G, que as forças efetivas se reduzem a um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e a um binário $\bar{I}\alpha$.

16.48 Uma barra delgada uniforme AB repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito e uma força $\mathbf{P}$ de intensidade igual a 1 N é aplicada em A em uma direção perpendicular à barra. Sabendo que a barra tem peso de 9 N, determine a aceleração (*a*) do ponto A, (*b*) do ponto B.

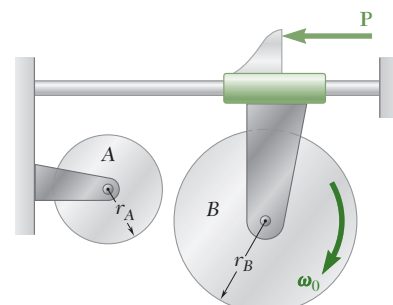
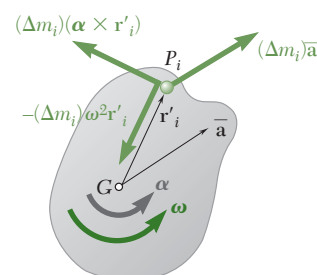
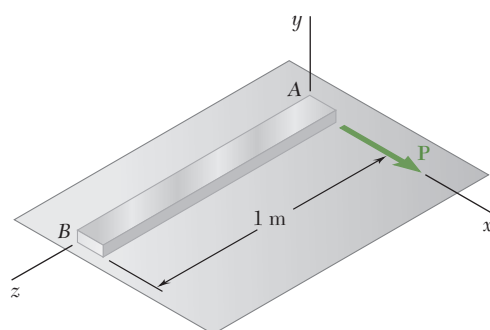



Figura P16.48

16.49 (*a*) No Problema 16.48, determine o ponto da barra AB onde a força $\mathbf{P}$ deve ser aplicada para a aceleração do ponto B ser igual a zero. (*b*) Sabendo que $P = 1$ N, determine a aceleração correspondente do ponto A.

16.50 e 16.51 Uma força **P** de intensidade igual a 3 N é aplicada a uma fita enrolada em torno do corpo indicado na figura. Sabendo que o corpo repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito, determine a aceleração (*a*) do ponto *A*, (*b*) do ponto *B*.

16.50 Para um pequeno aro de massa de 2,4 kg.

16.51 Para um disco uniforme de massa 2,4 kg.

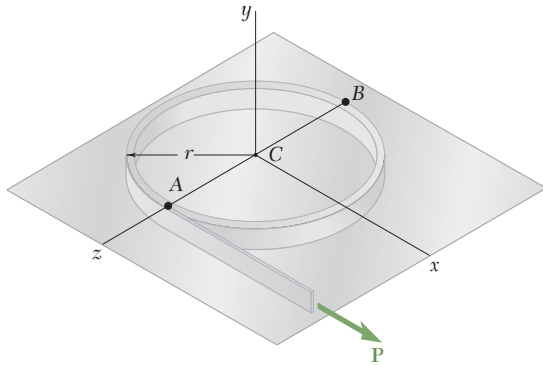



Figura P16.50

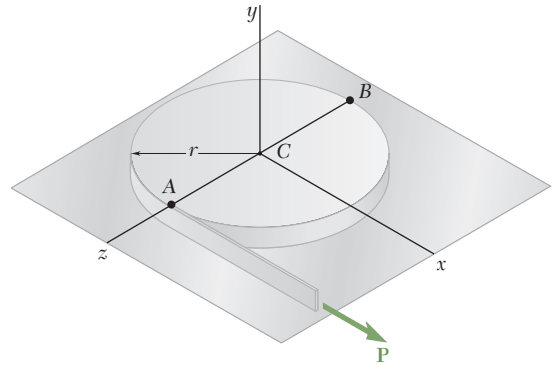



Figura P16.51 e P16. 52

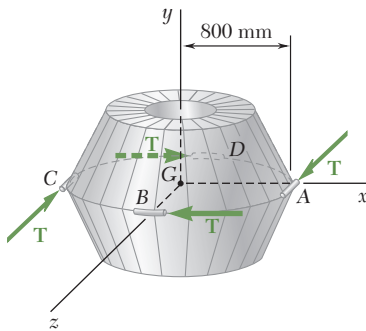



Figura *P16.53*

16.52 Uma força **P** é aplicada a uma fita enrolada em torno de um disco uniforme que repousa sobre uma superfície horizontal sem atrito. Mostre que para cada 360° de rotação do disco, o centro do disco vai se mover uma distância de πr.

16.53 Um satélite de 120 kg tem um raio de giração de 600 mm com relação ao eixo *y* e é simétrico em relação ao plano *zx*. Sua orientação é modificada pelo acionamento de quatro pequenos foguetes *A*, *B*, *C* e *D*, cada um produzindo um impulso **T** de 16,20 N dirigidos como mostra a figura. Determine a aceleração angular do satélite e a aceleração de seu centro de massa *G* (*a*) quando todos os quatro foguetes são acionados, (*b*) quando todos os foguetes exceto *D* são acionados.

16.54 Uma placa retangular de massa 5 kg é suspensa por quatro arames verticais, e a força **P** de intensidade 6 N é aplicada no canto *C* como mostra na figura. Imediatamente depois que **P** é aplicada, determine a aceleração (*a*) do ponto médio da borda *BC*, (*b*) do canto *B*.

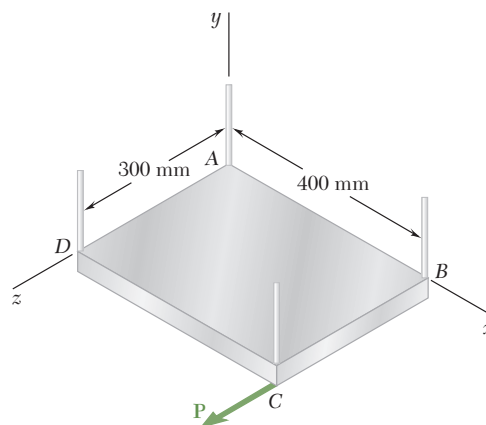



Figura *P16.54*

16.55 Uma roda dentada de 3 kg tem um raio de giração do centro de massa de 70 mm e é suspensa por uma corrente como mostra a figura. Determine a aceleração dos pontos A e B da corrente, sabendo que $T_A = 14$ N e $T_B = 18$ N.

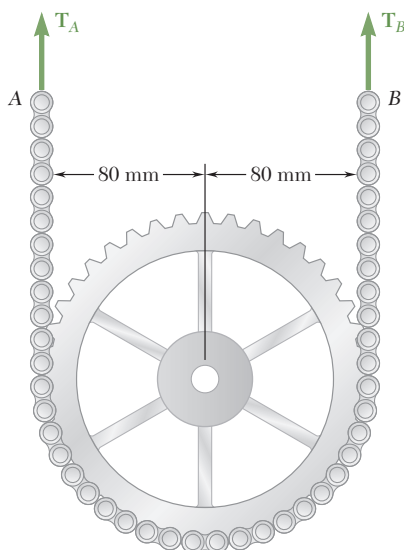



Figura P16.55

16.56 Resolva o Problema 16.55, considerando que $T_A = 14$ N e $T_B = 12$ N.

16.57 e 16.58 Uma viga de 5 m pesando 2.500 N é abaixada por meio de dois cabos que são desenrolados de guindastes suspensos. À medida que a viga se aproxima do chão, os operadores dos guindastes aplicam os freios para reduzir a velocidade desse movimento de desenrolar dos cabos. Sabendo que a desaceleração do cabo A é de 6 m/s^2 e que a desaceleração do cabo B é de 1 m/s^2, determine a tensão em cada cabo.

Figura P16.57

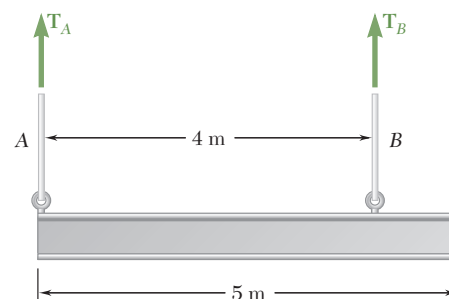



Figura P16.58

16.59 O rolo de aço mostrado na figura tem massa de 1.200 kg e raio de giração do centro de massa de 150 mm, e é elevado por dois cabos dobrados sobre seu eixo. Sabendo que cada cabo $T_A = 3.100$ N e $T_B = 3.300$ N, determine (*a*) a aceleração angular do rolo, (*b*) a aceleração de seu centro de massa.

16.60 O rolo de aço mostrado na figura tem massa de 1.200 kg e raio de giração do centro de massa de 150 mm, e é elevado por dois cabos dobrados sobre seu eixo. Sabendo que no instante mostrado na figura a aceleração do rolo é 150 mm/s^2 para baixo e que para cada cabo $T_A = 3.000$ N, determine (*a*) a correspondente tração de T_B, (*b*) a aceleração angular do rolo.

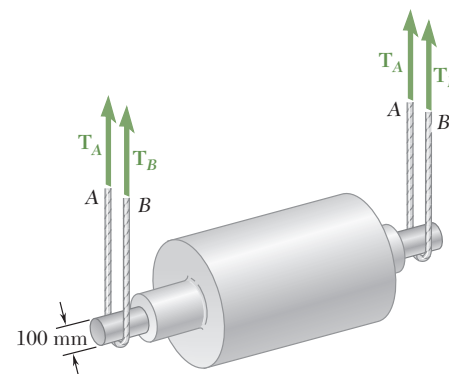
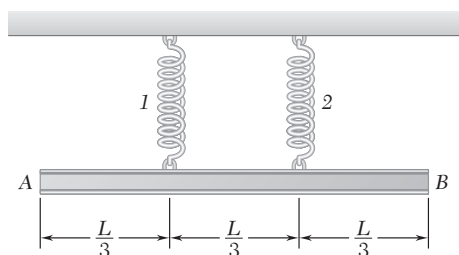



Figura P16.59 e P16.60

16.61 Puxando a corda do ioiô, uma pessoa consegue fazer o ioiô girar enquanto permanece na mesma altura acima do chão. Indicando a massa do ioiô por m, o raio de tambor interior onde a corda é enrolada por r e o raio de giração do centro de massa do ioiô por $\bar{k}$, determine a aceleração angular do ioiô.

Figura P16.61 e P16.62

16.62 O ioiô de 100 g mostrado na figura tem um raio de giração do centro de massa de 30 mm. O raio do tambor interno onde a corda é enrolada é de 6 mm. Sabendo que no instante mostrado a aceleração do ioiô é de 1 m/s^2 para cima, determine (*a*) a tração **T** necessária na corda, (*b*) a aceleração angular correspondente do ioiô.

16.63 a 16.65 Uma viga AB de massa m e de seção reta uniforme é suspensa a partir de duas molas como mostra a figura. Se a mola 2 quebra, determine nesse instante (*a*) a aceleração angular da viga, (*b*) a aceleração do ponto A, (*c*) a aceleração do ponto B.

Figura P16.63

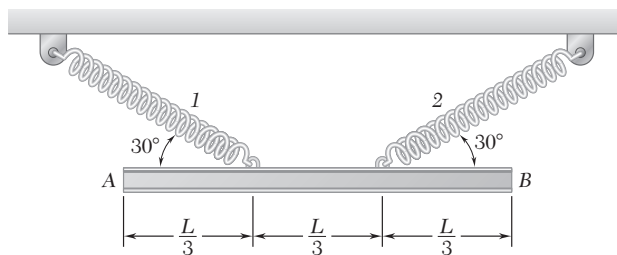



Figura P16.64

Figura P16.65

16.66 a 16.68 Uma placa fina com a forma indicada na figura e de massa m é suspensa a partir de duas molas como mostra a figura. Se a mola 2 quebra, determine a aceleração nesse instante (*a*) do ponto A, (*b*) do ponto B.

16.66 Para uma placa circular de diâmetro b.
16.67 Para um aro fino de diâmetro b.
16.68 Para uma placa quadrada de lado b.

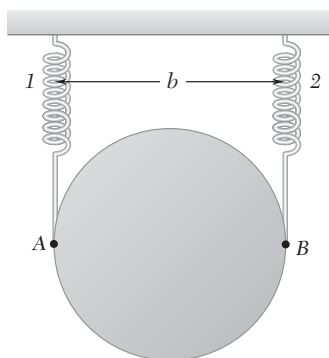



Figura P16.66

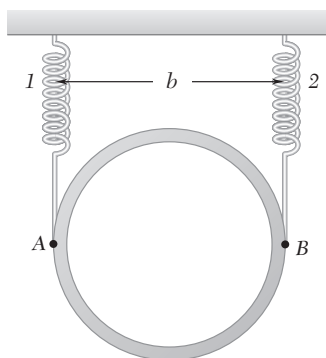



Figura P16.67

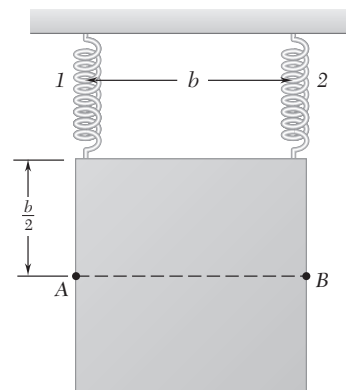



Figura P16.68

16.69 Um jogador de boliche lança uma bola de 200 mm de diâmetro e massa de 6 kg ao longo de uma pista com uma velocidade para frente $\mathbf{v}_0$ de 5 m/s e uma rotação para trás $\boldsymbol{\omega}_0$ de 9 rad/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre a bola e a pista é de 0,10, determine (*a*) o instante t_1 em que a bola vai começar a rolar sem deslizamento, (*b*) a velocidade escalar da bola no instante t_1, (*c*) a distância que a bola irá percorrer no instante t_1.

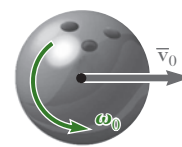



Figura P16.69

16.70 Resolva o Problema 16.69 considerando que o jogador de boliche lança a bola com a mesma velocidade para frente, mas com uma rotação para trás de 18 rad/s.

16.71 Uma esfera de raio r e massa m é lançada ao longo de uma superfície horizontal rugosa com as velocidades iniciais indicadas na figura. Se a velocidade final da esfera for zero, expresse, em termos de v_0, r e μ_k, (*a*) a intensidade requerida de ω_0, (*b*) o instante t_1 para a esfera parar, (*c*) a distância que a esfera percorrerá antes de parar.

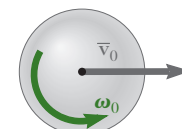



Figura *P16.71*

16.72 Resolva o Problema 16.71 considerando que a esfera é substituída por um aro fino uniforme de raio r e massa m.

16.73 Uma esfera homogênea de raio r e massa m é colocada com velocidade inicial nula sobre uma correia que se move para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{v}_1$. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e a correia, determine (*a*) o instante t_1 em que a esfera começará a rolar sem deslizar, (*b*) as velocidades linear e angular da esfera no instante t_1.

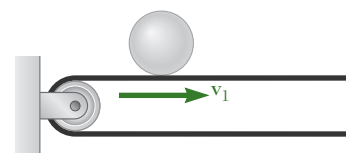



Figura *P16.73*

16.74 Uma esfera de raio r e massa m tem uma velocidade linear $\mathbf{v}_0$ dirigida para a esquerda e velocidade angular nula no momento em que ela é colocada sobre uma correia que se move para a direita com uma velocidade constante $\mathbf{v}_1$. Se, depois de primeiro deslizar sobre a correia, a esfera tiver velocidade linear relativa ao chão nula no momento em que ela começar a rolar na correia sem deslizar, determine, em termos de v_1 e do coeficiente de atrito cinético μ_k entre a esfera e a correia, (*a*) o valor necessário para v_0, (*b*) o instante t_1 em que a esfera vai começar a rolar sobre a correia, (*c*) a distância que a esfera terá percorrido relativa ao chão no instante t_1.

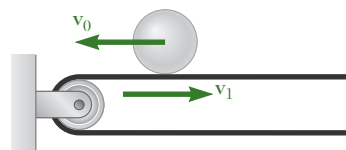



Figura *P16.74*

16.8 Movimento plano com restrições

A maioria das aplicações de engenharia trata de corpos rígidos que estão em movimento sob a ação de determinadas restrições. Por exemplo, manivelas têm de girar em torno de um eixo fixo, rodas devem rolar sem deslizar e barras de ligação devem descrever certos movimentos prescritos. Em todos esses casos, existem relações definidas entre os componentes da aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa G do corpo considerado e sua aceleração angular α; o movimento correspondente é chamado de *movimento restrito.*

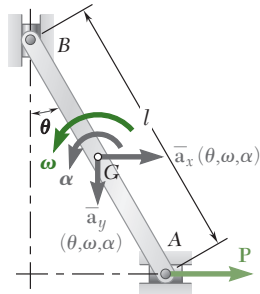



Figura 16.11

A solução de um problema envolvendo um movimento plano restrito exige em primeiro lugar uma *análise cinemática* do problema. Considere, por exemplo, uma barra delgada AB de comprimento l e massa m, cujas extremidades estão ligadas a blocos de massa desprezível que deslizam ao longo de trilhos horizontais e verticais sem atrito. A barra é puxada por uma força $\mathbf{P}$ aplicada em A (Fig. 16.11). Sabemos a partir da Seção 15.8 que a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa G da barra pode ser determinada em qualquer instante dado a partir da posição da barra, de sua velocidade angular e de sua aceleração angular nesse instante. Suponha, por exemplo, que os valores de θ, $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ são conhecidos num dado instante e que queremos determinar o valor correspondente da força $\mathbf{P}$, como também as reações em A e B. Devemos primeiro *determinar os componentes* $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$ *da aceleração do centro de massa* G pelo método da Seção 15.8. A seguir, aplicamos o princípio de d'Alembert (Fig. 16.12), utilizando as expressões obtidas para $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$. As forças desconhecidas $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}_A$ e $\mathbf{N}_B$ podem ser determinadas escrevendo-se e solucionando-se as equações apropriadas.

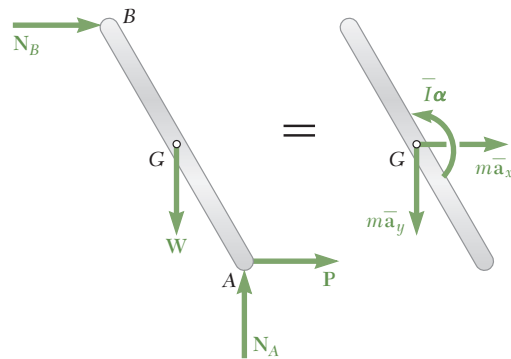



Figura 16.12

Suponha agora que a força aplicada $\mathbf{P}$, o ângulo θ e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da barra são conhecidos em um dado instante e que queremos determinar a aceleração angular α da barra e os componentes $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$ da aceleração de seu centro de massa nesse instante, como também as reações em A e B. O estudo cinemático preliminar do problema terá por objetivo *expressar os componentes* $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$ *da aceleração de G em termos da aceleração angular α da barra.* Isso será feito em princípio expressando-se a aceleração de um ponto de referência adequado, como o ponto A, em termos da aceleração angular α. Os componentes $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$ da aceleração de G podem então ser determinados em função de α e as expressões obtidas carregadas para a Fig. 16.12. Três equações podem então ser

deduzidas em termos de α, N_A e N_B e resolvidas para as três incógnitas (ver o Problema Resolvido 16.10). Observe que o método de equilíbrio dinâmico também pode ser usado para efetuar a solução dos dois tipos de problemas que tínhamos considerado (Fig. 16.13).

Quando um mecanismo consiste de *várias partes móveis,* o método recém descrito pode ser utilizado para cada parte do mecanismo. O procedimento requerido para determinar as várias incógnitas é, então, similar ao procedimento seguido no caso do equilíbrio de um sistema de corpos rígidos ligados (Seção 6.11).

Já analisamos anteriormente dois casos particulares de movimento plano restrito: a translação de um corpo rígido, na qual a aceleração angular do corpo é restringida a zero, e a rotação em torno do centro de massa, em que a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa do corpo é restringida a ser zero. Dois outros casos particulares de movimento plano restrito são de especial interesse: a *rotação em torno de ponto diferente do centro de massa* de um corpo rígido e o *movimento de rolamento* de um disco ou uma roda. Esses dois casos podem ser analisados por um dos métodos gerais descritos anteriormente. Entretanto, em vista da extensão de suas aplicações, eles merecem alguns comentários especiais.

Figura 16.13

Rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa. O movimento de um corpo rígido restrito a girar em torno de um eixo fixo que não passa por seu centro de massa é chamado *rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa.* O centro de massa G do corpo se desloca ao longo de uma circunferência de raio $\bar{r}$ centrada no ponto O, onde o eixo de rotação intercepta o plano de referência (Fig. 16.14). Representando, respectivamente, por ω e α a velocidade angular e a aceleração angular da linha OG, obtemos as seguintes expressões para os componentes tangencial e normal da aceleração de G:

Figura 16.14

$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{a}_n = \bar{r}\omega^2 \tag{16.7}$$

Como a reta OG pertence ao corpo, sua velocidade angular ω e sua aceleração angular α também representam a velocidade angular e a aceleração angular do corpo em seu movimento em relação a G. As Eqs. (16.7) definem, portanto, a relação cinemática existente entre o movimento do centro de massa G e o movimento do corpo em torno de G. Elas devem ser utilizadas para eliminar $\bar{a}_t$ e $\bar{a}_n$ das equações obtidas pela aplicação do princípio de d'Alembert (Fig. 16.15) ou pelo método do equilíbrio dinâmico (Fig. 16.16).

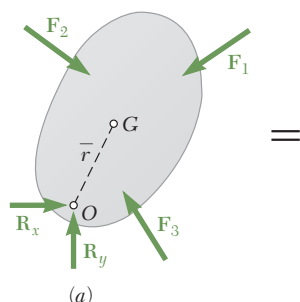



Figura 16.15

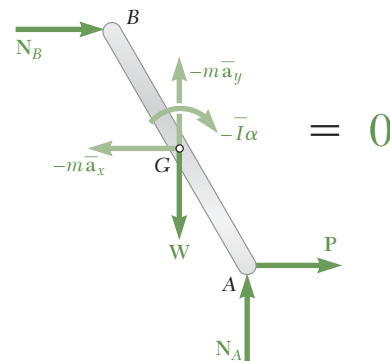
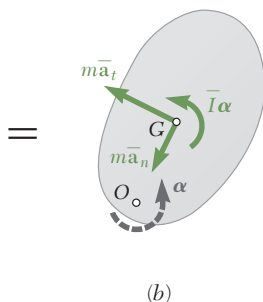
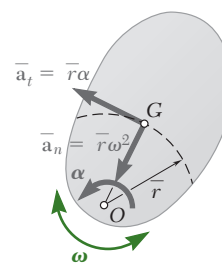
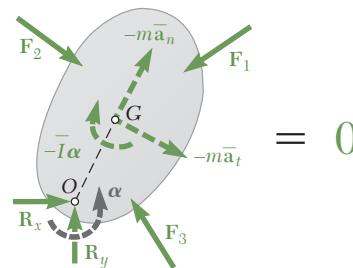



Figura 16.16

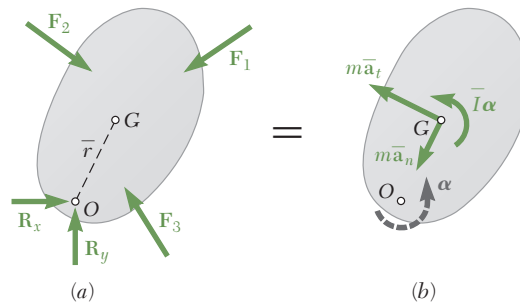



Figura 16.15 (repetida)

Uma relação interessante é obtida igualando-se os momentos, em relação ao ponto fixo O, das forças e vetores mostrados, respectivamente, nas partes a e b da Fig. 16.15. Escrevemos

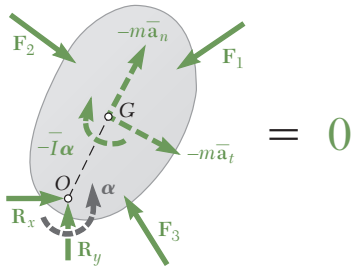
$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \bar{I}\alpha + (m\bar{r}\alpha)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\alpha$$

Mas, de acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos $\bar{I} + m\bar{r}^2 = I_O$, onde I_O representa o momento de inércia do corpo rígido em torno do eixo fixo. Portanto, escrevemos

$$\Sigma M_O = I_O\alpha \tag{16.8}$$

Embora a Eq. (16.8) expresse uma importante relação entre a soma dos momentos das forças externas em relação ao ponto fixo O e o produto $I_O\alpha$, deve ser claramente entendido que essa equação não significa que o sistema das forças externas é equivalente a um binário de momento $I_O\alpha$. O sistema de forças efetivas, e, portanto, o sistema de forças externas, se reduz a um binário somente quando O coincide com G – ou seja, *somente quando a rotação é em torno do centro de massa* (Seção 16.4). No caso mais geral de rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa, o sistema de forças externas não se reduz a um binário.

Figura 16.16 (repetida)

Um caso particular de rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa é de especial interesse – o caso da *rotação uniforme*, no qual a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é constante. Como α é zero, o binário de inércia na Fig. 16.16 desaparece e o vetor de inércia se reduz a seu componente normal. Esse componente (também chamado *força centrífuga*) representa a tendência que o corpo rígido tem de escapar do eixo de rotação.

Movimento de rolamento. Outro caso importante de movimento plano é o movimento de um disco ou roda que rola sobre uma superfície plana. Se o disco é restringido a rolar sem deslizar, a aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ de seu centro de massa G e sua aceleração angular α não são independentes. Considerando que o disco está balanceado, de modo que seu centro de massa coincide com seu centro geométrico, escrevemos em primeiro lugar que a distância $\bar{x}$ percorrida por G durante uma rotação θ do disco é $\bar{x} = r\theta$, onde r é o raio do disco. Diferenciando essa relação duas vezes, escrevemos

$$\bar{a} = r\alpha \tag{16.9}$$

Recordando que o sistema das forças efetivas no movimento plano se reduz a um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e a um binário $\bar{I}\alpha$, encontramos que, no caso particular do movimento de rolamento de um disco balanceado, as forças efetivas se reduzem a um vetor de intensidade $mr\alpha$ ligado a G e a um binário de intensidade $\bar{I}\alpha$. Podemos, então, dizer que as forças externas são equivalentes ao vetor e ao binário mostrado na Fig. 16.17.

Figura 16.17

Quando um disco *rola sem deslizar*, não há movimento relativo entre o ponto do disco que está em contato com o chão e o próprio chão. Assim, no que concerne ao cálculo da força de atrito **F**, um disco que rola pode ser comparado a um bloco em repouso sobre uma superfície. A intensidade F da força de atrito pode ter qualquer valor, desde que este valor não exceda o valor máximo $F_m = \mu_s N$, onde μ_s é o coeficiente de atrito estático e N é a intensidade da força normal. No caso de um disco que rola, a intensidade F da força de atrito deve, portanto, ser determinada, independentemente de N, pela resolução da equação obtida a partir da Fig. 16.17.

Quando o *deslizamento é iminente*, a força de atrito alcança seu valor máximo $F_m = \mu_s N$ e pode ser obtida de N.

Quando o disco *rola e desliza* ao mesmo tempo, existe um movimento relativo entre o ponto do disco que está em contato com o chão e o próprio chão, e a força de atrito tem intensidade $F_k = \mu_k N$, onde μ_k é o coeficiente de atrito cinético. Nesse caso, entretanto, o movimento do centro de massa G do disco e a rotação do disco em torno de G são independentes, e $\bar{a}$ não é igual a $r\alpha$.

Esses três casos diferentes podem ser resumidos assim:

Rolamento, sem deslizamento:	$F \leq \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
Rolamento, com deslizamento iminente:	$F = \mu_s N$	$\bar{a} = r\alpha$
Rotação e deslizamento:	$F = \mu_k N$	$\bar{a}$ e α *independentes*

Foto 16.4 Quando a bola bate na pista de boliche, ela primeiro gira e desliza para depois rolar sem deslizar.

Quando não se sabe se o disco desliza ou não, deve-se primeiro considerar que o disco rola sem deslizar. Se F é constatado como sendo menor ou igual a $\mu_s N$, a suposição estará correta. Se F for constatado como sendo maior do que $\mu_s N$, a suposição estará incorreta e o problema deverá ser revisto, considerando-se a rotação e o deslizamento.

Quando um disco está *desbalanceado*, ou seja, quando seu centro de massa G não coincide com seu centro geométrico O, a relação (16.9) entre $\bar{a}$ e α não se verifica. Entretanto, uma relação similar se verifica entre a intensidade a_O da aceleração do centro geométrico e a aceleração angular α de um disco desbalanceado que rola sem deslizar. Temos

$$a_O = r\alpha \qquad (16.10)$$

Para determinar $\bar{a}$ em termos da aceleração angular α e da velocidade angular ω do disco, podemos usar a fórmula da aceleração relativa

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{a}}_G &= \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{G/O} \\ &= \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_t + (\mathbf{a}_{G/O})_n \end{aligned} \qquad (16.11)$$

onde os três componentes da aceleração obtida têm as direções e sentidos indicados na Fig. 16.18 e as intensidades $a_O = r\alpha$, $(a_{G/O})_t = (OG)\alpha$ e $(a_{G/O})_n = (OG)\omega^2$.

Figura 16.18

PROBLEMA RESOLVIDO 16.6

A parte *AOB* de um mecanismo consiste em uma barra de aço *OB* de 400 mm soldada a uma engrenagem *E* de raio de 120 mm que pode girar em torno de um eixo horizontal *O*. Ela é acionada por uma engrenagem *D* e, no instante mostrado na figura, tem uma velocidade angular de 8 rad/s no sentido horário e uma aceleração angular de 40 rad/s^2 no sentido anti-horário. Sabendo que a barra *OB* tem massa de 3 kg e a engrenagem *E* tem massa de 4 kg e um raio de giração de 85 mm, determine (*a*) a força tangencial exercida pela engrenagem *D* sobre a engrenagem *E* e (*b*) os componentes da reação no eixo *O*.

SOLUÇÃO

Na determinação das forças efetivas do corpo rígido *AOB*, a engrenagem *E* e a barra *OB* serão consideradas separadamente. Portanto, os componentes da aceleração do centro de massa G_{OB} da barra serão determinadas em primeiro lugar:

$$(\bar{a}_{OB})_t = \bar{r}\alpha = (0{,}200 \text{ m})(40 \text{ rad/s}^2) = 8 \text{ m/s}^2$$
$$(\bar{a}_{OB})_n = \bar{r}\omega^2 = (0{,}200 \text{ m})(8 \text{ rad/s})^2 = 12{,}8 \text{ m/s}^2$$

Equações de movimento. Dois esboços do corpo rígido *AOB* foram traçados. O primeiro mostra as forças externas que consistem no peso $\mathbf{W}_E$ da engrenagem *E*, no peso $\mathbf{W}_{OB}$ da barra *OB*, na força **F** exercida pela engrenagem *D* e nos componentes $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{R}_y$ da reação em *O*. As intensidades dos pesos são, respectivamente

$$W_E = m_E g = (4 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 39{,}2 \text{ N}$$
$$W_{OB} = m_{OB} g = (3 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 29{,}4 \text{ N}$$

O segundo esboço mostra as forças efetivas, que consistem de um binário $\bar{I}_E\boldsymbol{\alpha}$ (visto que a engrenagem *E* está em rotação em torno de seu centro de massa) e de um binário e dois componentes vetoriais no centro de massa de *OB*. Como as acelerações são conhecidas, calculamos as intensidades desses componentes e binários:

$$\bar{I}_E\alpha = m_E\bar{k}_E^2\alpha = (4 \text{ kg})(0{,}085 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1{,}156 \text{ N}\cdot\text{m}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t = (3 \text{ kg})(8 \text{ m/s}^2) = 24{,}0 \text{ N}$$
$$m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n = (3 \text{ kg})(12{,}8 \text{ m/s}^2) = 38{,}4 \text{ N}$$
$$\bar{I}_{OB}\alpha = (\tfrac{1}{12}m_{OB}L^2)\alpha = \tfrac{1}{12}(3 \text{ kg})(0{,}400 \text{ m})^2(40 \text{ rad/s}^2) = 1{,}600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

Expressando que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, escrevemos as seguintes equações:

$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{efet}}$:

$$F(0{,}120 \text{ m}) = \bar{I}_E\alpha + m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t(0{,}200 \text{ m}) + \bar{I}_{OB}\alpha$$
$$F(0{,}120 \text{ m}) = 1{,}156 \text{ N}\cdot\text{m} + (24{,}0 \text{ N})(0{,}200 \text{ m}) + 1{,}600 \text{ N}\cdot\text{m}$$

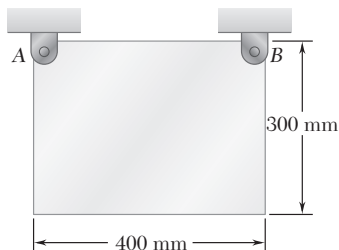
$$F = 63{,}0 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 63{,}0 \text{ N}\downarrow \blacktriangleleft$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}$: $\quad R_x = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_t$

$$R_x = 24{,}0 \text{ N} \qquad \mathbf{R}_x = 24{,}0 \text{ N} \rightarrow \blacktriangleleft$$

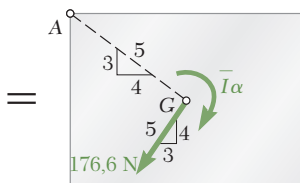
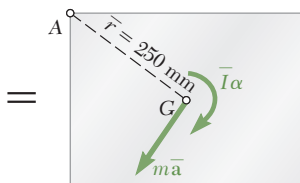
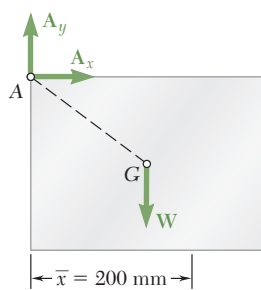
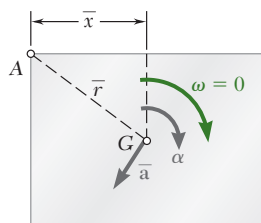
$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}$: $\quad R_y - F - W_E - W_{OB} = m_{OB}(\bar{a}_{OB})_n$

$$R_y - 63{,}0 \text{ N} - 39{,}2 \text{ N} - 29{,}4 \text{ N} = 38{,}4 \text{ N}$$

$$R_y = 170{,}0 \text{ N} \qquad \mathbf{R}_y = 170{,}0 \text{ N}\uparrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.7

Uma placa retangular de 300 × 400 de massa 30 kg está suspensa por dois pinos A e B. Se o pino B for removido repentinamente, determine (a) a aceleração angular da placa e (b) os componentes da reação no pino A imediatamente após o pino B ter sido removido.

=

=

SOLUÇÃO

a. Aceleração angular. Observamos que, à medida que a placa gira em torno do ponto A, seu centro de massa G descreve uma circunferência de raio $\bar{r}$ com centro em A.

Como a placa parte do repouso ($\boldsymbol{\omega} = 0$), o componente normal da aceleração de G é zero. A intensidade da aceleração $\bar{\mathbf{a}}$ do centro de massa G é, portanto, $\bar{a} = \bar{r}\alpha$. Traçamos o diagrama mostrado para expressar que as forças externas são equivalentes às forças efetivas:

$$+\circlearrowright\Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{efet.}}: \qquad W\bar{x} = (m\bar{a})\bar{r} + \bar{I}\alpha$$

Como $\bar{a} = \bar{r}\alpha$, temos

$$W\bar{x} = m(\bar{r}\alpha)\bar{r} + \bar{I}\alpha \qquad \alpha = \frac{mg\bar{x}}{m\bar{r}^2 + \bar{I}} \tag{1}$$

O momento de inércia em torno do centro de massa da placa é

$$\bar{I} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2) = \frac{(30\text{ kg})\,[(0{,}4\text{ m})^2 + (0{,}3\text{ m})^2]}{12}$$
$$= 0{,}625\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Substituindo este valor de $\bar{I}$ junto com $W = mg = 294{,}3$ N, $\bar{r} = 0{,}25$ m e $\bar{x} = 0{,}2$ m na Eq. (1), obtemos

$$\alpha = +23{,}54\text{ rad/s}^2 \qquad \boldsymbol{\alpha} = 23{,}5\text{ rad/s}^2 \circlearrowright \blacktriangleleft$$

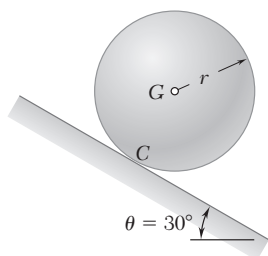
b. Reação em A. Usando o valor calculado de α, determinamos a intensidade do vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G.

$$m\bar{a} = m\bar{r}\alpha = (30\text{ kg})(0{,}25\text{ m})(23{,}54\text{ rad/s}^2) = 176{,}6\text{ N}$$

Mostrando esse resultado no diagrama, escrevemos as equações de movimento

$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet.}}: \qquad A_x = -\tfrac{3}{5}(176{,}6)$$
$$= -106\text{ N} \qquad \mathbf{A}_x = 106\text{ N} \leftarrow \blacktriangleleft$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet.}}: \qquad A_y - 294{,}3\text{ N} = -\tfrac{4}{5}(176{,}6)$$
$$A_y = +153{,}0\text{ N} \qquad \mathbf{A}_y = 153\text{ N}\uparrow \blacktriangleleft$$

O binário $\bar{I}\alpha$ não está envolvido nas duas últimas equações; entretanto, ele deve ser indicado no diagrama.

PROBLEMA RESOLVIDO 16.8

Uma esfera de raio r e peso W é liberada com velocidade inicial nula sobre um plano inclinado e rola sem deslizar. Determine (*a*) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático compatível com o movimento de rolamento, (*b*) a velocidade do centro G da esfera após ela ter rolado 3 m e (*c*) a velocidade de G se a esfera tivesse percorrido 3 m descendo em um plano inclinado de 30° sem atrito.

SOLUÇÃO

a. Valor mínimo μ_s para o movimento de rolamento. As forças externas **W**, **N** e **F** formam um sistema equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e pelo binário $\bar{I}\alpha$. Como a esfera rola sem deslizar, temos que $\bar{a} = r\alpha$.

$$+\circlearrowright \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{efet}}: \qquad (W \text{ sen } \theta)r = (m\bar{a})r + \bar{I}\alpha$$
$$(W \text{ sen } \theta)r = (mr\alpha)r + \bar{I}\alpha$$

Notando que $m = W/g$ e $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$, escrevemos

$$(W \text{ sen } \theta)r = \left(\frac{W}{g}r\alpha\right)r + \frac{2}{5}\frac{W}{g}r^2\alpha \qquad \alpha = +\frac{5g \text{ sen } \theta}{7r}$$

$$\bar{a} = r\alpha = \frac{5g \text{ sen } \theta}{7} = \frac{5(9{,}81 \text{ m/s}^2) \text{ sen } 30°}{7} = 3{,}50 \text{ m/s}^2$$

$$+\searrow \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}: \qquad W \text{ sen } \theta - F = m\bar{a}$$

$$W \text{ sen } \theta - F = \frac{W}{g}\frac{5g \text{ sen } \theta}{7}$$

$$F = +\tfrac{2}{7}W \text{ sen } \theta = \tfrac{2}{7}W \text{ sen } 30° \qquad \mathbf{F} = 0{,}143W \nwarrow 30°$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \qquad N - W \cos \theta = 0$$

$$N = W \cos \theta = 0{,}866W \qquad \mathbf{N} = 0{,}866W \angle 60°$$

$$\mu_s = \frac{F}{N} = \frac{0{,}143W}{0{,}866W} \qquad \mu_s = 0{,}165 \blacktriangleleft$$

b. Velocidade de rolamento da esfera. Temos um movimento uniformemente acelerado:

$$\bar{v}_0 = 0 \qquad \bar{a} = 3{,}504 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{x} = 3 \text{ m} \qquad \bar{x}_0 = 0$$

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(3{,}504 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})$$

$$\bar{v} = 4{,}59 \text{ m/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 4{,}59 \text{ m/s} \searrow 30° \blacktriangleleft$$

c. Velocidade de deslizamento da esfera. Supondo agora a ausência de atrito, temos $F = 0$ e obtemos

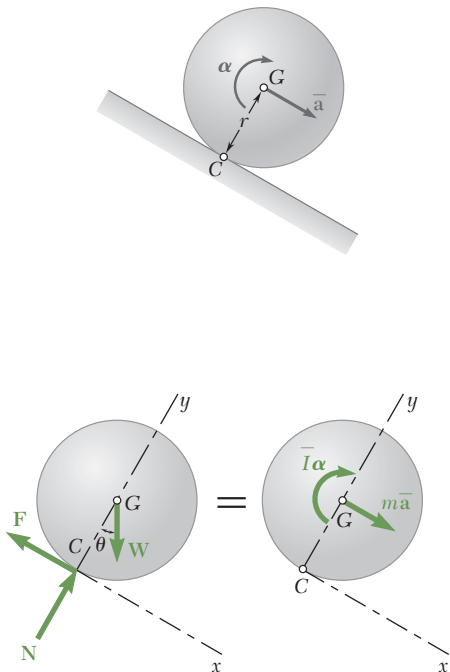
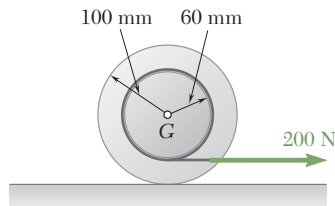
$$+\circlearrowright \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{efet}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha \qquad \alpha = 0$$

$$+\searrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \qquad W \text{ sen } 30° = m\bar{a} \qquad 0{,}50W = \frac{W}{g}\bar{a}$$

$$\bar{a} = +4{,}905 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}} = 4{,}905 \text{ m/s}^2 \searrow 30°$$

Substituindo $\bar{a} = 4{,}905 \text{ m/s}^2$ nas equações de movimento uniformemente acelerado, obtemos

$$\bar{v}^2 = \bar{v}_0^2 + 2\bar{a}(\bar{x} - \bar{x}_0) \qquad \bar{v}^2 = 0 + 2(4{,}905 \text{ m/s}^2)(3 \text{ m})$$

$$\bar{v} = 5{,}42 \text{ m/s} \qquad \bar{\mathbf{v}} = 5{,}42 \text{ m/s} \searrow 30° \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.9

Uma corda está enrolada no tambor interno de uma roda e é puxada horizontalmente com uma força de 200 N. A roda tem massa de 50 kg e um raio de giração de 70 mm. Sabendo que $\mu_s = 0{,}20$ e $\mu_k = 0{,}15$, determine a aceleração de G e a aceleração angular da roda.

SOLUÇÃO

a. Suponha rolamento sem deslizamento. Neste caso, temos

$$\bar{a} = r\alpha = (0{,}100 \text{ m})\alpha$$

Podemos determinar se essa suposição é justificada pela comparação da força de atrito obtida com a máxima força de atrito disponível. O momento de inércia da roda é

$$\bar{I} = m\bar{k}^2 = (50 \text{ kg})(0{,}070 \text{ m})^2 = 0{,}245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Equações de movimento

$+\circlearrowright \Sigma M_C = \Sigma(M_C)_{\text{efet}}$: $\quad (200 \text{ N})(0{,}040 \text{ m}) = m\bar{a}(0{,}100 \text{ m}) + \bar{I}\alpha$

$$8{,}00 \text{ N} \cdot \text{m} = (50 \text{ kg})(0{,}100 \text{ m})\alpha(0{,}100 \text{ m}) + (0{,}245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = +10{,}74 \text{ rad/s}^2$$

$$\bar{a} = r\alpha = (0{,}100 \text{ m})(10{,}74 \text{ rad/s}^2) = 1{,}074 \text{ m/s}^2$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}$: $\quad F + 200 \text{ N} = m\bar{a}$

$$F + 200 \text{ N} = (50 \text{ kg})(1{,}074 \text{ m/s}^2)$$

$$F = -146{,}3 \text{ N} \qquad \mathbf{F} = 146{,}3 \text{ N} \leftarrow$$

$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}$:

$$N - W = 0 \qquad N - W = mg = (50 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 490{,}5 \text{ N}$$

$$\mathbf{N} = 490{,}5 \text{ N} \uparrow$$

Máxima força de atrito disponível

$$F_{\text{máx.}} = \mu_s N = 0{,}20(490{,}5 \text{ N}) = 98{,}1 \text{ N}$$

Como $F > F_{\text{máx}}$, o movimento suposto é impossível.

b. Rotação e deslizamento. Como a roda deve rodar e deslizar ao mesmo tempo, traçamos um novo diagrama, onde $\bar{\mathbf{a}}$ e α são independentes e onde

$$F = F_k = \mu_k N = 0{,}15(490{,}5 \text{ N}) = 73{,}6 \text{ N}$$

Dos cálculos da parte *a*, aparentemente **F** deve estar dirigida para a esquerda. Escrevemos as seguintes equações de movimento:

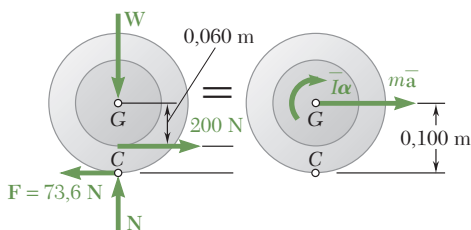
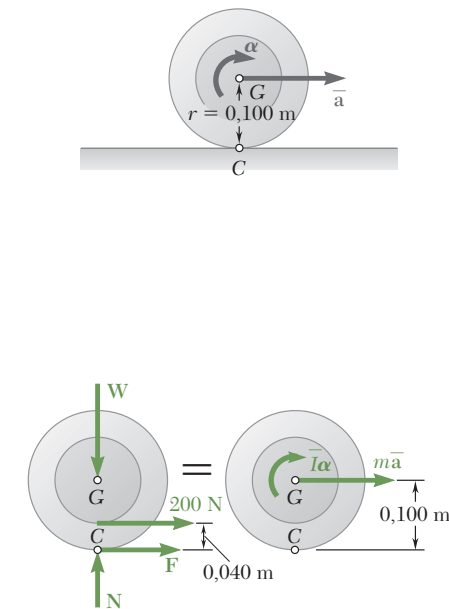
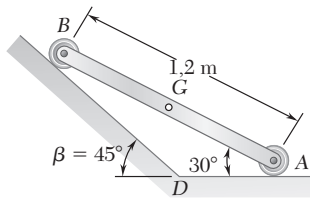
$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}$: $\quad 200 \text{ N} - 73{,}6 \text{ N} = (50 \text{ kg})\bar{a}$

$$\bar{a} = +2{,}53 \text{ m/s}^2$$

$$\bar{\mathbf{a}} = 2{,}53 \text{ m/s}^2 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

$+\circlearrowright \Sigma M_G = \Sigma(M_G)_{\text{efet}}$:

$$(73{,}6 \text{ N})(0{,}100 \text{ m}) - (200 \text{ N})(0{,}060 \text{ m}) = (0{,}245 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = -18{,}94 \text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 18{,}94 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 16.10

As extremidades de uma barra de 1,2 m com massa de 25 kg podem se deslocar livremente e sem atrito ao longo de dois trilhos retos como mostra a figura. Se a barra é liberada da posição mostrada com velocidade nula, determine (*a*) a aceleração angular da barra e (*b*) as reações em A e B.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Como o movimento é restrito, a aceleração de G deve estar relacionada com a aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}$. Para obter essa relação, determinamos primeiro a intensidade da aceleração $\mathbf{a}_A$ do ponto A em função de α. Supondo que $\boldsymbol{\alpha}$ é dirigido no sentido anti-horário e observando que $a_{B/A} = 1{,}2\alpha$, escrevemos:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$[a_B \searrow 45°] = [a_A \rightarrow] + [1{,}2\alpha \nearrow 60°]$$

Observando que $\phi = 75°$ e usando a lei dos senos, obtemos:

$$a_A = 1{,}64\alpha \qquad a_B = 1{,}47\alpha$$

A aceleração de G é agora obtida escrevendo-se:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{G/A}$$
$$\bar{\mathbf{a}} = [1{,}64\alpha \rightarrow] + [0{,}6\alpha \nearrow 60°]$$

Decompondo $\bar{\mathbf{a}}$ em componentes em x e em y, obtemos:

$$\bar{a}_x = 1{,}64\alpha - 0{,}6\alpha\cos 60° = 1{,}34\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_x = 1{,}34\alpha \rightarrow$$
$$\bar{a}_y = -0{,}6\alpha \operatorname{sen} 60° = -0{,}52\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_y = 0{,}52\alpha \downarrow$$

Cinética do movimento. Traçamos uma equação de diagrama de corpo livre expressando que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_x$ e $m\bar{\mathbf{a}}_y$ ligados a G e pelo binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$. Calculamos as seguintes intensidades:

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \frac{25\text{ kg}}{12}(1{,}2\text{ m})^2 = 3\text{ kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \bar{I}\alpha = 3\alpha$$

$$m\bar{a}_x = 25\,(1{,}34\alpha) = 33{,}5\alpha \qquad m\bar{a}_y = -\,25(0{,}52\alpha) = -13{,}0\alpha$$

Equações de movimento

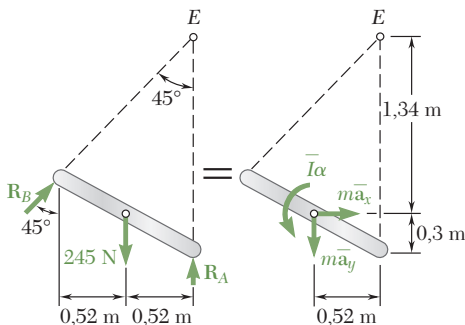
$+\circlearrowleft \Sigma M_E = \Sigma(M_E)_{\text{efet}}$:

$$(25)(9{,}81)(0{,}52) = (33{,}5\alpha)(1{,}34) + (13{,}0\alpha)(0{,}52) + 3\alpha$$
$$\alpha = +2{,}33\text{ rad/s}^2 \qquad \alpha = 2{,}33\text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \blacktriangleleft$$

$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}$: $\quad R_B \operatorname{sen} 45° = (33{,}5)(2{,}33)$

$$R_B = 110{,}4\text{ N} \qquad \mathbf{R}_B = 110{,}4\text{ N} \measuredangle 45° \blacktriangleleft$$

$+\uparrow \Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}$: $\quad R_A + R_B\cos 45° - (25)(9{,}81) = -(13{,}0)(2{,}33)$

$$R_A = -30{,}29 - 78{,}06 + 245{,}25 = 136{,}9\text{ N} \qquad \mathbf{R}_A = 136{,}9\text{ N}\uparrow \blacktriangleleft$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta lição consideramos o *movimento plano de corpos rígidos sob restrições*. Vimos que os tipos de restrições envolvidas em problemas de engenharia variam muito. Por exemplo, um corpo rígido pode ser restrito a girar em torno de um eixo fixo ou a rolar sobre uma dada superfície, ou pode estar ligado por pinos a anéis ou a outros corpos.

1. Sua solução de um problema envolvendo o movimento restrito de um corpo rígido consistirá, em geral, de dois passos. Primeiro você vai considerar a *cinemática do movimento*, depois vai solucionar a *parte cinética do problema*.

2. A análise cinemática do movimento é feita usando-se os métodos que você aprendeu no Cap. 15. Devido às restrições, as acelerações linear e angular estarão relacionadas. (Eles *não* serão independentes, como na seção anterior.) Você deve estabelecer *uma relação entre as acelerações* (angular e linear) e sua meta deve ser expressar todas as acelerações em termos de uma *única aceleração desconhecida*. Este é o primeiro passo dado na solução de cada um dos problemas resolvidos nesta lição.

a. Para um corpo em rotação em torno de ponto um diferente do centro de massa, os componentes da aceleração do centro de massa são $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$ e $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$, onde ω vai ser geralmente conhecido [Problemas Resolvidos 16.6 e 16.7].

b. Para um disco ou roda em rolamento, a aceleração do centro de massa é $\bar{a} = r\alpha$ [Problema Resolvido 16.8].

c. Para um corpo em movimento geral plano, sua melhor linha de ação, se nem $\bar{a}$ nem α são conhecidos ou de fácil obtenção, é expressar $\bar{a}$ em termos de α [Problema Resolvido 16.10].

3. A análise cinética do movimento é feita como segue.

a. Comece desenhando uma equação de diagrama de corpo livre. Isso foi feito em todos os problemas resolvidos desta seção. Em cada caso, o diagrama da esquerda mostra as forças externas, incluindo as forças aplicadas, as reações e o peso do corpo. O diagrama da direita mostra o vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e o binário $\bar{I}\alpha$.

b. A seguir, reduza o número de incógnitas da equação de diagrama de corpo livre usando as relações entre as acelerações que encontrou em sua análise cinemática. Você então estará pronto para considerar equações que podem ser escritas somando-se componentes ou momentos. Primeiro escolha uma equação que envolva uma única incógnita. Depois de ter resolvido para essa incógnita, substitua o valor obtido nas outras equações, com as quais você então vai resolver para as incógnitas restantes.

(*continua*)

4. Ao solucionar problemas envolvendo discos ou rodas em rolamento, tenha em mente o seguinte.

a. Se o deslizamento é iminente, a força de atrito exercida no corpo em rolamento atingiu seu valor máximo, $F_m = \mu_s N$, onde N é a força normal exercida sobre o corpo e μ_s é o coeficiente de *atrito estático* entre as superfícies de contato.

b. Se o deslizamento não é iminente, a força de atrito F pode ter *qualquer valor* menor que F_m e deve, então, ser considerada como uma incógnita independente. Depois que você tiver determinado F, verifique se ele é menor que F_m; se não for, *o corpo não rola,* mas gira e desliza como descrito no próximo parágrafo.

c. Se o corpo gira e desliza ao mesmo tempo, então ele *não está rolando* e a aceleração a do centro de massa é *independente* da aceleração angular $\bar{a}$ do corpo $\bar{a} \neq r\alpha$. Por outro lado, a força de atrito tem um valor bem definido, $F = \mu_k N$, onde μ_k é o coeficiente de *atrito cinético* entre as superfícies de contato.

d. Para um disco ou roda desbalanceado em rolamento, a relação $\bar{a} = r\alpha$ entre a aceleração $\bar{a}$ do centro de massa G e a aceleração angular α do disco ou roda *não se aplica mais.* Entretanto, uma relação similar aplica-se entre a aceleração a_o do *centro geométrico* O e a aceleração angular α do disco ou roda: $a_O = r\alpha$. Essa relação pode ser usada para expressar $\bar{a}$ em termos de α e ω (Fig. 16.18).

5. Para um sistema de corpos rígidos ligados, a meta da sua *análise cinemática* deve ser determinar todas as acelerações a partir da informação dada, ou expressá-las em termos de uma única incógnita. (Para sistemas com vários graus de liberdade, você vai precisar usar tantas incógnitas quantos graus de liberdade existirem.)

Sua *análise cinética* em geral será feita desenhando uma equação de diagrama de corpo livre para o sistema inteiro, como também para um ou mais dos corpos rígidos envolvidos. No último caso, tanto as forças internas como as externas devem ser incluídas, e deve-se ter o cuidado de representar com vetores iguais e opostos as forças que dois corpos exercem um sobre o outro.

PROBLEMAS

16.75 Mostre que o binário $\bar{I}\alpha$ da Fig. 16.15 pode ser eliminado fixando-se os vetores $m\bar{\mathbf{a}}_t$ e $m\bar{\mathbf{a}}_n$, em um ponto P denominado *centro de percussão* e localizado sobre a linha OG a uma distância $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ a partir do centro de massa do corpo.

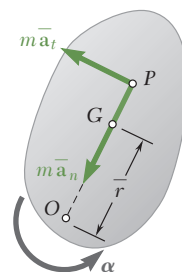



Figura P16.75

16.76 Uma haste delgada uniforme de comprimento $L = 1$ m e massa $m = 2$ kg está suspensa livremente a partir de uma articulação em A. Se uma força $\mathbf{P}$ de intensidade de 8 N é aplicada em B horizontalmente para a esquerda ($h = L$), determine (a) a aceleração angular da haste, (b) os componentes da reação em A.

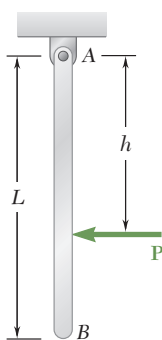



Figura P16.76

16.77 No Problema 16.76, determine (a) a distância h na qual a componente horizontal da reação A é nula, (b) a aceleração angular correspondente da barra.

16.78 Uma haste delgada uniforme de comprimento $L = 900$ mm e massa $m = 4$ kg está suspensa livremente a partir de uma articulação em C. Uma força horizontal $\mathbf{P}$ de intensidade 75 N é aplicada à extremidade B. Sabendo que $\bar{r} = 225$ mm, determine (a) a aceleração angular da haste, (b) os componentes da reação em C.

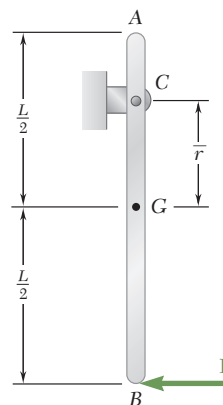



Figura P16.78

16.79 No Problema 16.78, determine (a) a distância $\bar{r}$ na qual a componente horizontal da reação C é nula, (b) a aceleração angular correspondente da barra.

16.80 Uma barra delgada uniforme l e massa m gira em torno do eixo vertical AA' com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine a tração na barra a uma distância x do eixo de rotação.

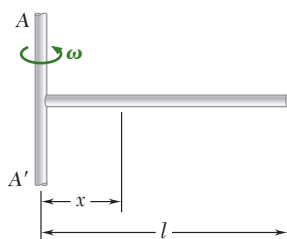



Figura P16.80

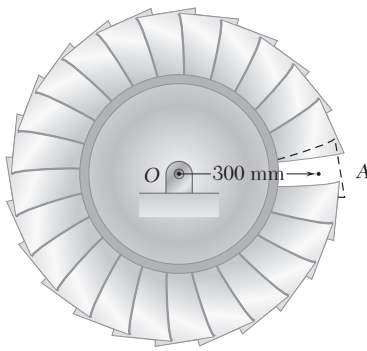



Figura P16.82

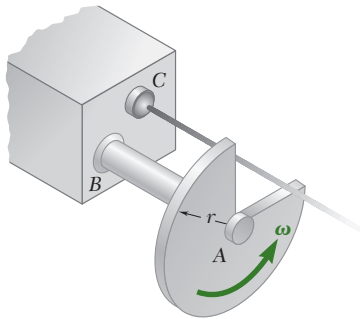



Figura P16.83

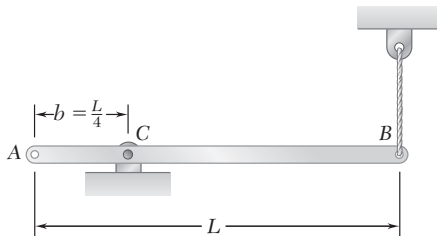
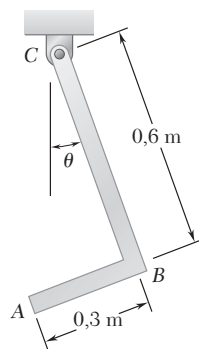
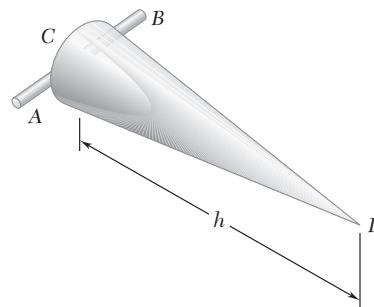



Figura P16.85

Figura P16.87

16.81 Um grande volante de motor é montado em um eixo horizontal e gira a uma taxa constante de 1.200 rpm. Dados experimentais indicam que a força total exercida pelo volante sobre o eixo varia de 55 kN para cima até 85 kN para baixo. Determine (*a*) o peso do volante, (*b*) a distância a partir do centro do eixo até o centro de massa do volante.

16.82 Um disco de turbina de massa 26 kg gira a uma taxa constante de 9.600 rpm. Sabendo que o centro de massa do disco coincide com o centro de rotação *O*, determine a reação em *O* imediatamente depois que uma única pá em *A*, de massa de 45 g, fica solta e é jogada fora.

16.83 O obturador mostrado na figura foi formado removendo-se um quarto de um disco de 20 mm de raio e é usado para interromper um feixe de luz emitido a partir de uma lente em *C*. Sabendo que o obturador tem massa de 50 g e gira à taxa constante de 24 ciclos por segundo, determine a intensidade da força exercida pelo obturador sobre o eixo em *A*.

16.84 e 16.85 Uma haste uniforme de comprimento *L* e massa *m* é apoiada como mostra a figura. Se o cabo ligado a *B* repentinamente se parte, determine (*a*) a aceleração da extremidade *B*, (*b*) a reação no suporte do pino.

Figura P16.84

16.86 Um cone delgado uniforme de massa *m* pode balançar livremente em torno da barra horizontal *AB*. Se o cone é liberado do repouso na posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração da ponta *D*, (*b*) a reação em *C*.

Figura P16.86

16.87 O objeto *ABC* consiste de duas barras esbeltas soldadas no ponto *B*. A barra *AB* tem uma massa de 1 kg e a barra *BC* tem uma massa de 2 kg. Sabendo que a intensidade da velocidade angular de *ABC* é 10 rad/s quando $\theta = 0$, determine os componentes da reação no ponto *C* quando $\theta = 0$.

16.88 Uma barra delgada *AB* de 4 kg e uma barra delgada *BC* de 2,5 kg estão ligadas por um pino *B* e por uma corda *AC*. O conjunto gira em um plano vertical sob o efeito combinado da gravidade e do binário **M** aplicado à barra *AB*. Sabendo que na posição mostrada na figura a velocidade angular do conjunto é zero e que a tração na corda *AC* é igual a 36 N, determine (*a*) a aceleração angular do conjunto, (*b*) a intensidade do binário **M**.

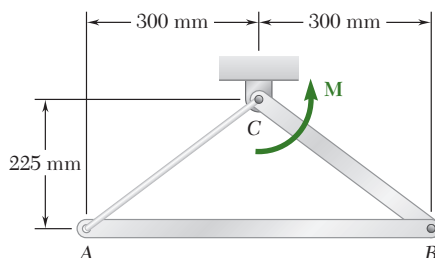



Figura P16.88

16.89 Duas barras uniformes, *ABC* de massa 3 kg e *DCE* de massa 4 kg são ligadas por um pino *C* e por duas cordas *BD* e *BE*. O conjunto em forma de T gira em um plano vertical sob o efeito combinado da gravidade e do binário **M** aplicado à barra *ABC*. Sabendo que no instante mostrado na figura a tração é 8 N na corda *BD*, determine (*a*) a aceleração angular do conjunto, (*b*) o binário **M**.

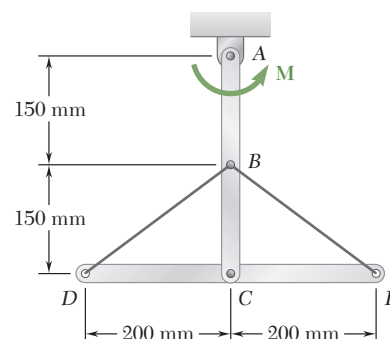



Figura P16.89

16.90 Uma haste delgada de 1,5 kg é soldada a um disco uniforme de 5 kg como mostra a figura. O conjunto oscila livremente em torno de *C* em um plano vertical. Sabendo que na posição mostrada na figura o conjunto tem uma velocidade angular de 10 rad/s no sentido horário, determine (*a*) a aceleração angular do conjunto, (*b*) os componentes da reação em *C*.

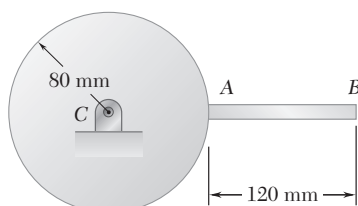



Figura P16.90

16.91 Um disco uniforme de 5 kg está ligado a uma haste uniforme *BC* de 3 kg por meio de um pino *AB* sem atrito. Uma corda elástica é enrolada em torno da borda do disco e é ligada a um anel em *E*. Tanto o anel *E* como a haste *BC* podem girar livremente em torno do eixo vertical. Sabendo que o sistema é liberado a partir do repouso quando a tração na corda elástica é de 15 N, determine (*a*) a aceleração angular do disco, (*b*) a aceleração do centro do disco.

Figura P16.91

16.92 Deduza a equação $\Sigma M_C = I_C\alpha$ para o disco em rolamento da Fig. 16.17, onde ΣM_C representa a soma dos momentos das forças externas em relação ao centro instantâneo *C*, e I_C é o momento de inércia do disco em torno de *C*.

16.93 Mostre que no caso de um disco desbalanceado, a equação deduzida no Problema 16.92 é válida somente quando o centro de massa *G*, o centro geométrico *O* e o centro instantâneo *C* estão sobre uma linha reta.

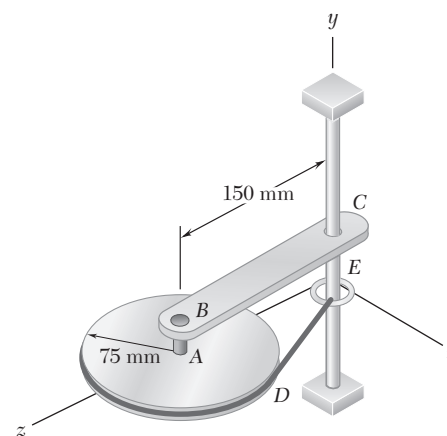
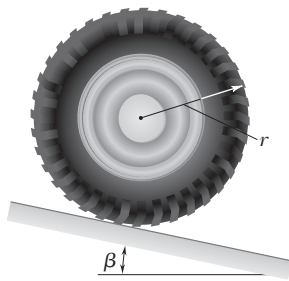



Figura *P16.94*

16.94 Uma roda de raio r e raio de giração em torno do centro de massa $\bar{k}$ é liberada a partir do repouso no declive e rola sem deslizar. Deduza uma expressão para aceleração do centro da roda em termos de r, $\bar{k}$, β e g.

16.95 Um volante de motor está rigidamente preso a um eixo de 40 mm de raio que pode rolar ao longo de trilhos paralelos como mostra a figura. Quando liberado a partir do repouso, o sistema rola 5 m em 40 s. Determine o raio de giração em torno do centro de massa do sistema.

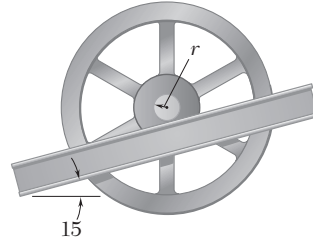



Figura P16.95, P16.96

16.96 Um volante de motor de raio de giração em torno do centro de massa $\bar{k}$ é preso rigidamente a um eixo que pode rolar ao longo de trilhos paralelos. Representando por μ_s o coeficiente de atrito estático entre o eixo e os trilhos, deduza uma expressão para o maior ângulo de inclinação β no qual não ocorrerá deslizamento.

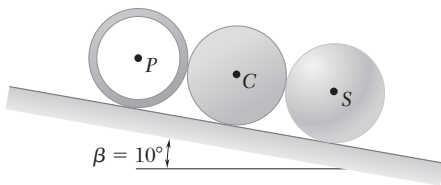
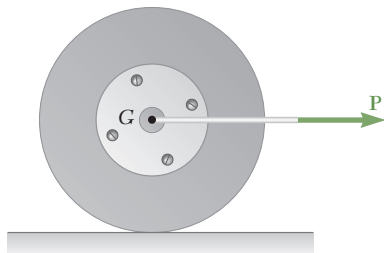



Figura P16.97

16.97 Uma esfera homogênea S, um cilindro uniforme C e um tubo fino P estão em contato quando são liberados a partir do repouso no declive mostrado na figura. Sabendo que todos os três objetos rolam sem deslizar, determine, após 4 s de movimento, a distância livre entre (a) o tubo e o cilindro, (b) o cilindro e a esfera.

16.98 a 16.101 Um tambor de 100 mm de raio está preso a um disco de 200 mm de raio. O disco e o tambor têm peso combinado de 50 N e um raio de giração combinado de 150 mm. Uma corda é presa como mostra a figura e puxada com a força **P** de intensidade 25 N. Sabendo que os coeficientes de atrito estático e cinético são $\mu_s = 0{,}25$ e $\mu_k = 0{,}20$, respectivamente, determine (a) se o disco desliza ou não, (b) a aceleração angular do disco e a aceleração de G.

16.102 a 16.105 Um tambor de 60 mm de raio está preso a um disco de 120 mm de raio. O disco e o tambor têm uma massa total de 6 kg e um raio de giração combinado de 90 mm. Uma corda é presa como mostra a figura e puxada com uma força **P** de intensidade 20 N. Sabendo que o disco rola sem deslizar, determine (a) a aceleração angular do disco e a aceleração de G, (b) o valor mínimo do coeficiente de atrito estático compatível com esse movimento.

Figura P16.98 e P16.102

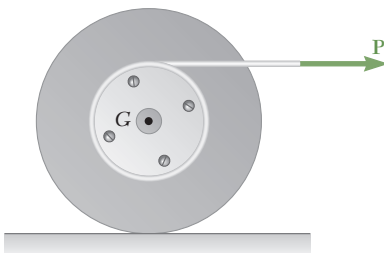



Figura P16.99 e *P16.103*

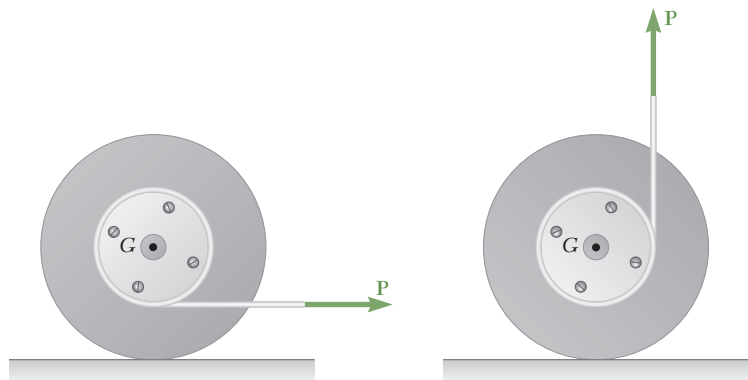



Figura P16.100 e *P16.104*

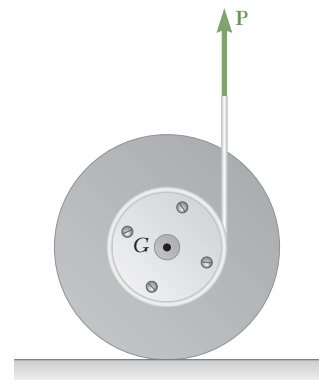



Figura P16.101 e P16.105

16.106 a 16.108 Uma barra de massa m é mantida, como mostra a figura, entre quatro discos, cada um de massa m' e raio $r = 75$ mm. Determine a aceleração da barra imediatamente depois dela ter sido liberada do repouso, sabendo que as forças normais nos discos são suficientes para evitar qualquer escorregamento e considerando que (a) $m = 5$ kg e $m' = 2$ kg, (b) a massa m' dos discos é desprezada, (c) a massa m da barra é desprezada.

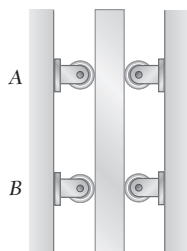
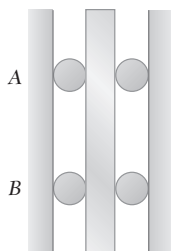
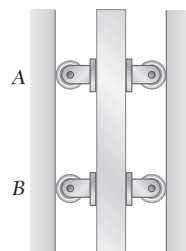



Figura P16.106 Figura P16.107 Figura P16.108

16.109 Dois discos uniformes A e B, cada um com massa de 2 kg, estão ligados por uma haste CD de 1,5 kg como mostra a figura. Um binário **M** de momento 2,25 N · m no sentido anti-horário é aplicado ao disco A. Sabendo que os discos rolam sem deslizar, determine (a) a aceleração do centro de cada disco, (b) o componente horizontal da força exercida no disco B pelo pino D.

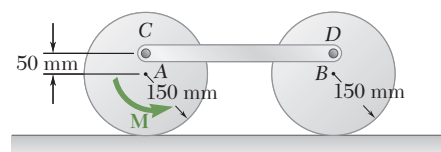



Figura P16.109

16.110 A engrenagem C tem uma massa de 5 kg e um raio de giração do centro de massa de 75 mm. Uma barra uniforme AB tem uma massa de 3 kg e a engrenagem D é fixa. Se o sistema é liberado do repouso na posição mostrada na figura, determine (a) a aceleração angular da engrenagem C, (b) a aceleração do ponto B.

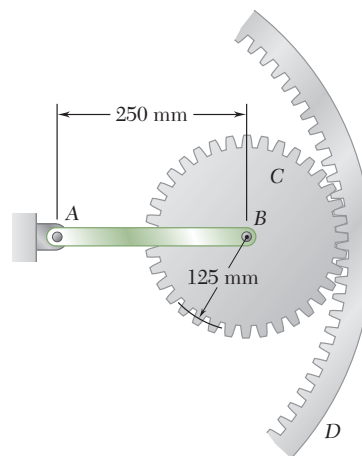



Figura P16.110

16.111 A metade da seção do cilindro uniforme de massa m está em repouso quando a força **P** é aplicada como mostra a figura. Considerando que a seção rola sem deslizamento, determine (a) sua aceleração angular, (b) o mínimo valor de μ_s compatível com o movimento.

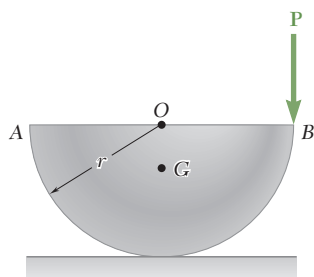



Figura P16.111

16.112 Resolva o Problema 16.111, considerando que a força **P** aplicada em B é dirigida horizontalmente para a direita.

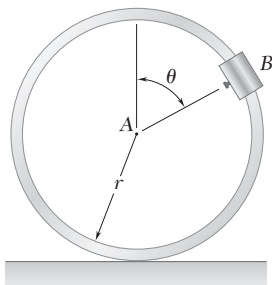
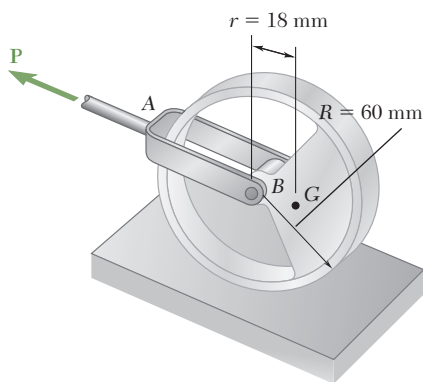
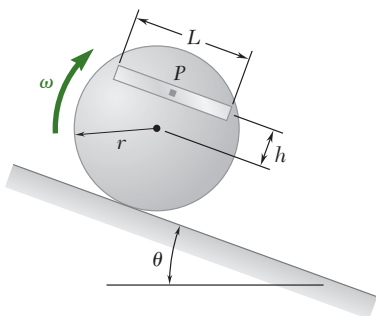
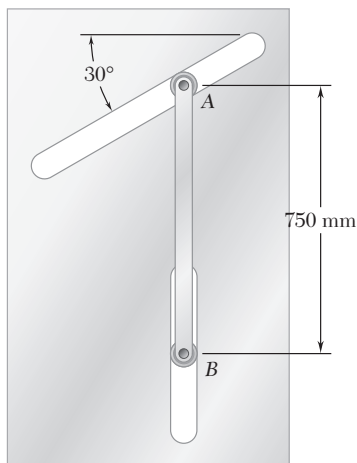



Figura P16.113 e *P16.114*

16.113 Uma pequena braçadeira de massa m_B está presa em B a um arco de massa m_h. O sistema é liberado a partir do repouso quando $\theta = 90°$ e rola sem deslizar. Sabendo que $m_h = 3m_B$, determine (*a*) a aceleração angular do arco, (*b*) os componentes horizontal e vertical da aceleração de B.

16.114 Uma pequena braçadeira de massa m_B está presa em B a um arco de massa m_h. Sabendo que o sistema é liberado a partir do repouso e rola sem deslizar, deduza uma expressão para a aceleração angular do arco em termos de m_B, m_h, r e θ.

Figura *P16.115*

16.115 O centro de gravidade G de uma roda desbalanceada de 1,5 kg está localizado a uma distância $r = 18$ mm de seu centro geométrico B. O raio da roda é $R = 60$ mm e seu raio de giração em relação ao centro de massa é 44 mm. No instante mostrado na figura, o centro B da roda tem uma velocidade de 0,35 m/s e uma aceleração de 1,2 m/s^2, ambas dirigidas para a esquerda. Sabendo que a roda rola sem deslizar e desprezando a massa do braço AB, determine a força horizontal **P** aplicada a esse braço.

Figura P16.116

16.116 Uma barra de 2 kg é ligada a um cilindro uniforme de 5 kg por um pino quadrado P, como mostrado na figura. Sabendo que $r = 0,4$ m, $h = 0,2$ m, $\theta = 20°$, $L = 0,5$ m e $\omega = 2$ rad/s no instante mostrado, determine as reações em P neste instante considerando que o cilindro rola para baixo sem deslizar no plano inclinado.

16.117 As extremidades da haste uniforme AB de 10 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas. Se a haste é liberada a partir do repouso, quando $\theta = 25°$, determine imediatamente após sua liberação (*a*) a aceleração angular da haste, (*b*) a reação em A, (*c*) a reação em B.

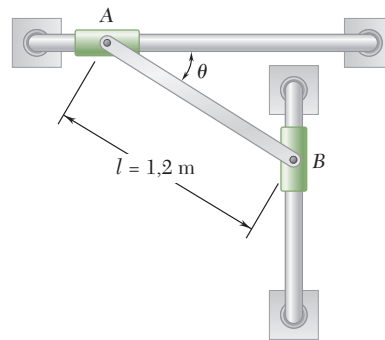



Figura P16.117 e P16.118

16.118 As extremidades da haste uniforme AB de 10 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas. Uma força vertical **P** é aplicada ao cursor B quando $\theta = 25°$, fazendo o cursor partir do repouso com uma aceleração para cima de 12 m/s^2. Determine (*a*) a força **P**, (*b*) a reação em A.

Figura P16.119

16.119 O movimento de uma haste uniforme de 4 kg AB é guiada por pequenas rodas de peso desprezível que rolam ao longo de rasgos sem atrito como mostrado na figura. Se a haste é liberada do repouso na posição mostrada na figura, determine imediatamente depois da liberação (*a*) aceleração angular da haste, (*b*) a reação em B.

16.120 As extremidades da haste uniforme AB de 2 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas mostradas na figura. A haste AB está em repouso na posição $\theta = 25°$ quando uma força horizontal $\mathbf{P}$ é aplicada ao cursor A causando o início do seu movimento para a esquerda com uma aceleração para cima de 4 m/s^2. Determine (*a*) a força $\mathbf{P}$, (*b*) a reação em B.

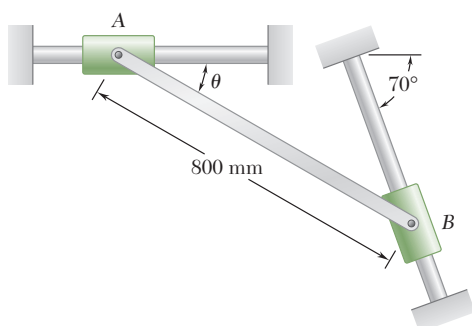



Figura P16.120, P16.121

16.121 As extremidades da haste uniforme AB de 2 kg são presas a cursores de peso desprezível que deslizam sem atrito ao longo de hastes fixas mostradas na figura. Se haste AB é liberada do repouso na posição $\theta = 25°$, determine imediatamente depois da liberação (*a*) aceleração angular da haste, (*b*) a reação em B.

16.122 O movimento da haste uniforme AB de massa 5 kg e comprimento $L = 750$ mm é guiado por pequenas rodas de massa desprezível que rolam sobre a superfície mostrada na figura. Se a haste é liberada a partir do repouso quando $\theta = 20°$, determine (*a*) a aceleração angular da haste, (*b*) a reação em A.

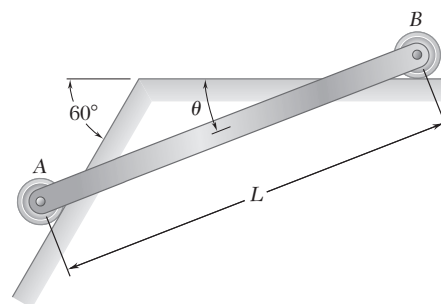



Figura *P16.122*

16.123 A extremidade A da barra uniforme AB de 8 kg é ligada ao colar que pode deslizar sem atrito na barra vertical. A extremidade B da barra é ligada ao cabo vertical BC. Se a barra é liberada do repouso na posição mostrada na figura, determine, imediatamente depois da liberação, (*a*) a aceleração angular da barra, (*b*) a reação em A.

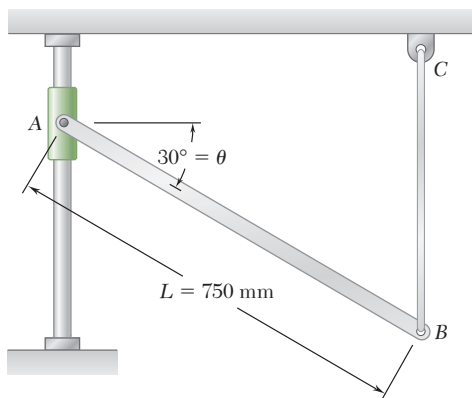



Figura *P16.123*

16.124 A haste uniforme ABD de 4 kg está presa à manivela BC e é ajustada com uma pequena roda que pode rolar sem atrito ao longo de uma fenda vertical. Sabendo que no instante mostrado a manivela BC gira com uma velocidade angular de 6 rad/s no sentido horário e uma aceleração angular de 15 rad/s^2 no sentido anti-horário, determine a reação em A.

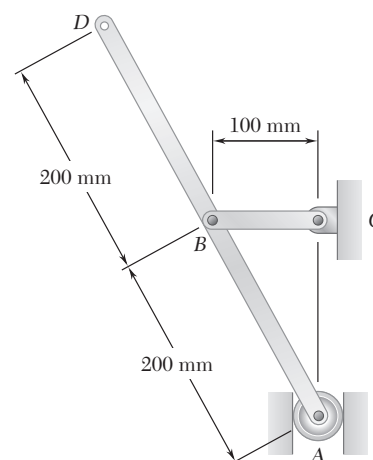



Figura P16.124

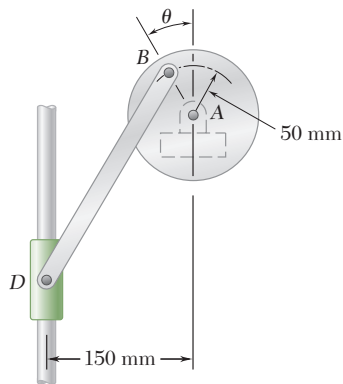



Figura P16.125

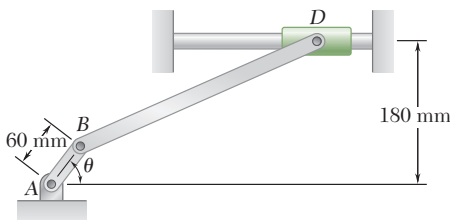
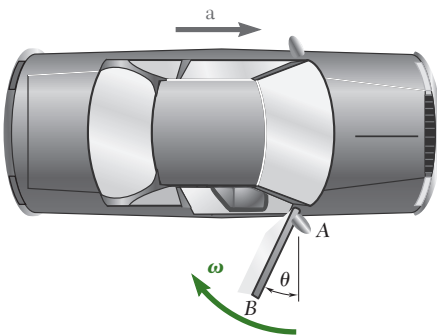
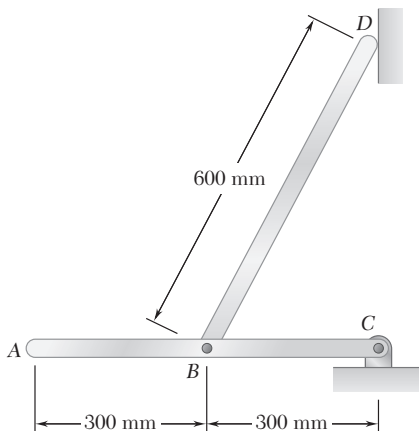



Figura P16.127

16.125 Uma barra uniforme BD de 250 mm e de massa 5 kg é ligada, como mostrado na figura, ao disco A e ao colar de massa desprezível, que pode deslizar livremente ao longo da barra vertical. Sabendo que o disco A gira no sentido anti-horário a uma taxa constante de 500 rpm, determine as reações em D quando $\theta = 0$.

16.126 Resolva o Problema 16.125 quando $\theta = 90°$.

16.127 A barra uniforme BD de 300 mm e massa de 4 kg é ligada como mostra a figura à manivela AB e ao colar D de massa desprezível, que pode deslizar livremente ao longo de uma barra horizontal. Sabendo que a manivela AB gira no sentido anti-horário à taxa constante de 300 rpm, determine a reação em D quando $\theta = 0$.

16.128 Resolva o Problema 16.127 quando $\theta = 90°$.

16.129 A barra uniforme BD de 3 kg é ligada à manivela BD e ao colar de peso desprezível, que pode deslizar livremente ao longo de uma barra EF. Sabendo que, na posição mostrada na figura, a manivela BD gira com uma velocidade angular de 15 rad/s e uma aceleração angular de 60 rad/s^2, ambas no sentido horário, determine a reação em A.

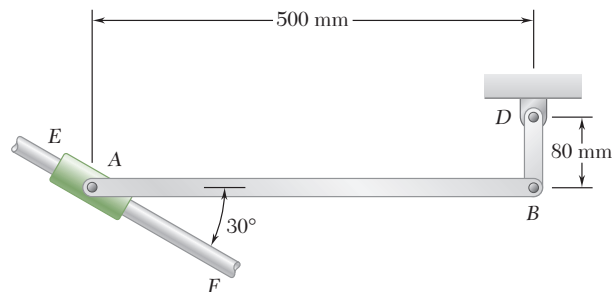



Figura P16.129

16.130 No Problema 16.129, determine a reação em A, sabendo que na posição mostrada na figura a manivela BD gira com uma velocidade angular de 15 rad/s e uma aceleração angular de 60 rad/s^2, no sentido anti-horário.

Figura P16.131

16.131 Um motorista liga seu carro com a porta do lado do passageiro totalmente aberta ($\theta = 0$). A porta de 40 kg tem raio de giração em torno do centro de massa $k = 300$ mm e seu centro de massa está localizado a uma distância $r = 500$ mm de seu eixo vertical de rotação. Sabendo que o motorista mantém uma aceleração constante de 2 m/s^2, determine a velocidade angular da porta quando ela bate ao fechar ($\theta = 90°$).

16.132 Para o carro do Problema 16.131, determine a menor aceleração constante que o motorista pode manter se a porta fechar e travar, sabendo que quando a porta bate na estrutura, sua velocidade angular deve ser no mínimo de 2 rad/s para o mecanismo de travamento funcionar.

16.133 Duas barras uniformes de 4 kg estão ligadas formando o sistema articulado mostrado na figura. Desprezando o efeito do atrito, determine a reação em D imediatamente após o sistema articulado ser liberado do repouso na posição mostrada na figura.

Figura P16.133

16.134 O mecanismo articulado *ABCD* é formado pela união da barra *BC* de 3 kg às barras *AB* e *CD* de 1,5 kg cada. O movimento do mecanismo é controlado pelo binário **M** aplicado à barra *AB*. Sabendo que no instante mostrado na figura a barra *AB* tem uma velocidade angular de 24 rad/s no sentido horário e aceleração angular nula, determine (*a*) o binário **M**, (*b*) os componentes da força exercida em *B* sobre a haste *BC*.

Figura P16.134

16.135 Resolva o Problema 16.134, considerando que no instante mostrado na figura a barra *AB* tem velocidade angular de 24 rad/s sentido horário e uma aceleração angular de 160 rad/s^2 no sentido anti-horário.

16.136 A haste *AB* de 2 kg e a haste *BC* de 3 kg estão ligadas como mostra a figura a um disco que é colocado em rotação em um plano vertical a uma velocidade angular constante de 6 rad/s no sentido horário. Para a posição mostrada na figura, determine as forças aplicadas em *A* e *B* sobre a haste *AB*.

Figura P16.136, P16.137

16.137 A haste *AB* de 2 kg e a haste *BC* de 3 kg estão ligadas, como mostra a figura, a um disco que é colocado em rotação em um plano vertical. Sabendo que no instante mostrado na figura o disco tem uma aceleração angular de 18 rad/s no sentido horário e velocidade angular nula, determine os componentes das forças aplicadas em *A* e *B* sobre a haste *AB*.

16.138 No sistema motor mostrado na figura, $l = 250$ mm e $b = 100$ mm. A haste conectora *BD* é assumida como uma haste delgada uniforme de 1,2 kg e está ligada ao pistão *P* de 1,8 kg. Durante um teste do sistema, a manivela *AB* é posta em rotação com uma velocidade angular constante de 600 rpm no sentido horário sem nenhuma força aplicada na face do pistão. Determine as forças exercidas na haste conectora em *B* e *D* quando $\theta = 180°$. (Despreze o efeito do peso na haste.)

Figura P16.138

16.139 Resolva o Problema 16.138 quando $\theta = 90°$.

16.140 Duas barras idênticas *AC* e *CE*, cada uma com peso *W*, são ligadas em forma de articulação como mostrado na figura. Sabendo que no instante mostrado a força **P** faz com que o rolo ligado a *D* se mova para a direita com velocidade constante $\mathbf{v}_D$, determine a intensidade da força **P** em termos de *L*, *W*, v_D e θ.

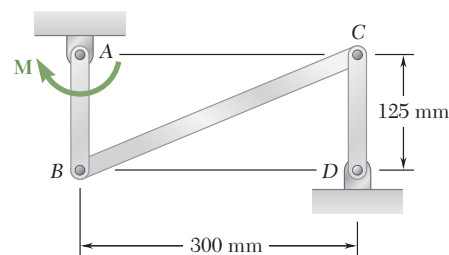
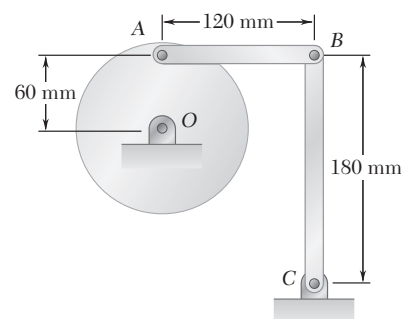
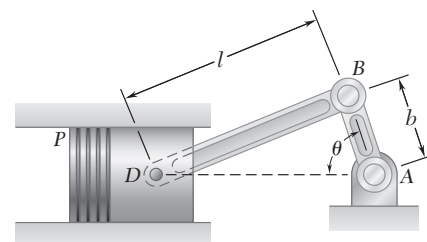
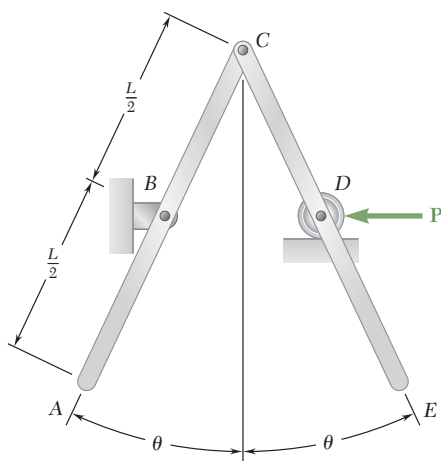
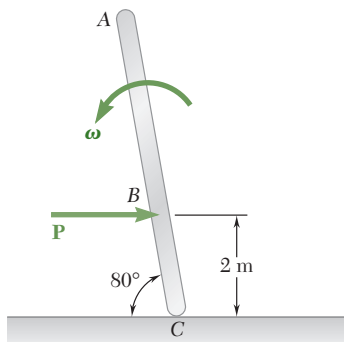



Figura P16.140

Figura P16.141

16.141 No instante mostrado na figura, um poste ABC uniforme de 50 kg, comprimento de 6 m, tem uma velocidade angular de 1 rad/s no sentido anti-horário e o ponto C está deslizando para a direita. Uma força **P** horizontal de 500 N atua em B. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o poste e o chão é 0,3, determine no instante (a) a aceleração do centro de gravidade, (b) a força normal entre o poste e o chão.

***16.142** Um disco uniforme de massa $m = 4$ kg e raio $r = 150$ mm é suportado por uma correia $ABCD$ que é aparafusada no disco em B e C. Se a correia se rompe de repente em um ponto localizado entre A e B, determine (a) a aceleração do centro do centro do disco, (b) a tração na porção CD da correia.

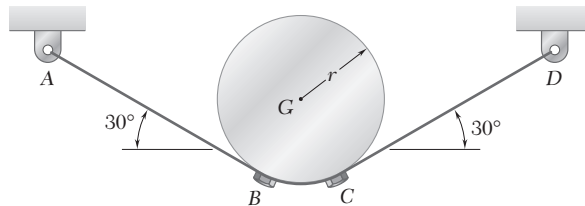



Figura P16.142

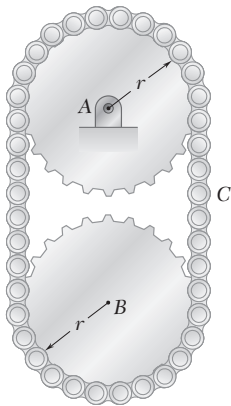



Figura P16.143

***16.143** Dois discos, cada um de massa m e raio r estão ligados como mostra a figura por uma corrente contínua de massa desprezível. Se um pino no ponto C da corrente é repentinamente removido, determine (a) a aceleração angular de cada disco, (b) a tração na porção esquerda da corrente, (c) a aceleração do centro do disco B.

***16.144** A barra delgada uniforme AB, de massa de 15 kg e comprimento de 1 m, está suspensa como mostra a figura a partir do carrinho C de 20 kg. Desprezando o efeito do atrito, determine, imediatamente depois do sistema ter sido liberado do repouso, (a) a aceleração do carrinho, (b) a aceleração angular da barra.

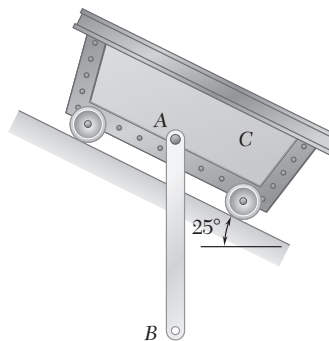



Figura P16.144

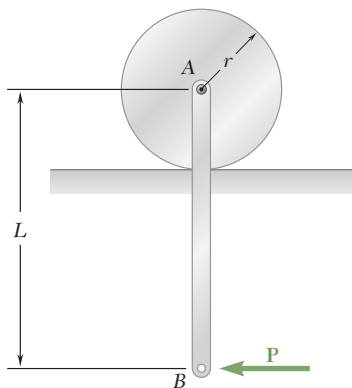



Figura P16.145

***16.145** Uma barra delgada uniforme AB de massa m está suspensa como mostra a figura a partir de um disco uniforme de mesma massa m. Determine as acelerações nos pontos A e B imediatamente após a força horizontal **P** ter sido aplicada em B.

***16.146** Uma barra delgada AB de 5 kg é conectada por pino em um disco uniforme de 8 kg como mostrado na figura. Imediatamente após o sistema ser liberado do repouso, determine a aceleração do (*a*) ponto A, (*b*) ponto B.

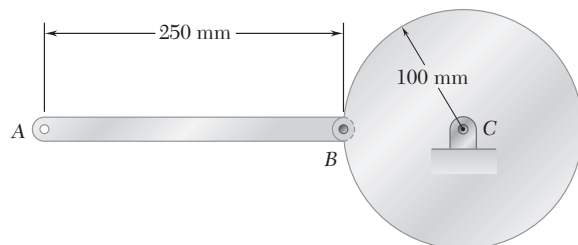



Figura P16.146

***16.147 e *16.148** O cilindro B de 3 kg e a cunha A de 2 kg são mantidos em repouso na posição mostrada na figura pela corda C. Considerando que os cilindros rolam sem deslizar sobre a cunha e desprezando o atrito entre a cunha e o solo, determine, imediatamente após a corda C ter sido cortada, (*a*) a aceleração da cunha, (*b*) a aceleração angular do cilindro.

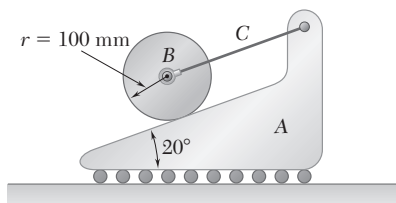



Figura P16.147

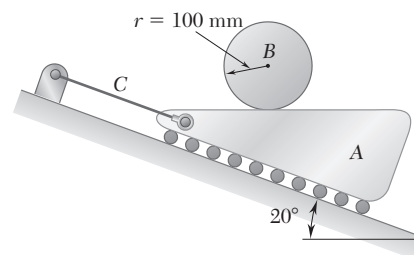



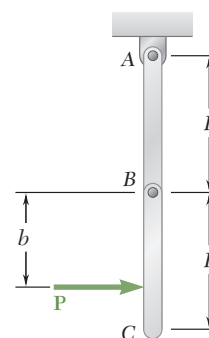
Figura P16.148

****16.149*** Cada uma das barras AB e BC de 3 kg tem comprimento $L = 500$ mm. Uma força horizontal **P** de intensidade de 20 N é aplicada na barra BC como mostra a figura. Sabendo que $b = L$ (**P** está aplicada em C), determine a aceleração angular de cada barra.

****16.150*** Cada uma das barras AB e BC de 3 kg tem comprimento $L = 500$ mm. Uma força horizontal **P** de intensidade de 20 N é aplicada na barra BC. Para a posição mostrada na figura, determine (*a*) a distância b para a qual as barras se movem como se formassem um único corpo rígido, (*b*) a correspondente aceleração angular das barras.

Figura *P16.149* e *P16.150*

***16.151** (*a*) Determine a intensidade e a localização do momento fletor máximo na haste do Problema 16.76. (*b*) Mostre que a resposta para a parte *a* é independente da massa da haste.

****16.152*** Desenhe os diagramas de esforço cortante e de momento fletor da haste do Problema 16.84 imediatamente após o cabo B se romper.

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo, estudamos a *cinética de corpos rígidos*, ou seja, as relações existentes entre as forças aplicadas em um corpo rígido, a forma e a massa desse corpo e o movimento produzido. Exceto nas duas primeiras seções, que tratam do caso mais geral do movimento de um corpo rígido, nossa análise restringiu-se ao *movimento plano de placas rígidas* e de corpos rígidos simétricos em relação ao plano de referência. O estudo do movimento plano de corpos rígidos não simétricos e do movimento de corpos rígidos no espaço tridimensional será considerado no Cap. 18.

Equações fundamentais de movimento para um corpo rígido

Primeiro recordamos [Seção 16.2] as duas equações fundamentais deduzidas no Cap. 14 para o movimento de um sistema de partículas e observamos que elas se aplicam ao caso mais geral do movimento de um corpo rígido. A primeira equação define o movimento do centro de massa G do corpo; temos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{16.1}$$

Figura 16.19

onde m é a massa do corpo e $\overline{\mathbf{a}}$ a aceleração de G. A segunda equação está relacionada com o movimento do corpo relativamente a um sistema de referência ligado ao centro de massa; escrevemos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{16.2}$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ é a taxa de variação da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo, em relação a seu centro de massa G. As Eqs. (16.1) e (16.2), em conjunto, expressam que *o sistema de forças externas é equipolente ao sistema que consiste no vetor $m\overline{\mathbf{a}}$ ligado a G e no binário de momento* $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 16.19).

Quantidade de movimento angular no movimento plano

Restringindo nossa análise neste ponto e no restante do capítulo ao movimento plano de placas rígidas e de corpos rígidos simétricos em relação ao plano de referência, mostramos [Seção 16.3] que a quantidade de movimento angular do corpo pode ser expressa como

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega} \tag{16.4}$$

onde $\bar{I}$ é o momento de inércia do corpo em torno de um eixo que passa pelo centro de massa perpendicular ao plano de referência e $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo. Diferenciando ambos os membros da Eq. (16.4), obtivemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \bar{I}\dot{\boldsymbol{\omega}} = \bar{I}\boldsymbol{\alpha} \tag{16.5}$$

que mostra que, no caso restrito aqui considerado, a taxa de variação da quantidade de movimento angular do corpo rígido pode ser representada por um vetor de mesma direção e sentido que α (isto é, perpendicular ao plano de referência) e de intensidade $\bar{I}\alpha$.

Equações para o movimento plano de um corpo rígido

Resulta do que foi mencionado anteriormente [Seção 16.4], que o movimento plano de uma placa rígida ou de um corpo rígido simétrico em

relação a um plano de referência é determinado pelas três equações escalares:

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma M_G = \bar{I}\alpha \tag{16.6}$$

Princípio de d'Alembert

Resulta ainda do apresentado anteriormente que *as forças externas que atuam sobre o corpo rígido são realmente* **equivalentes** *às forças efetivas sobre as várias partículas que o constituem.* Esse enunciado, conhecido como *princípio de d'Alembert,* pode ser expresso sob a forma do diagrama vetorial mostrado na Fig. 16.20, onde as forças efetivas foram representadas por um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e um binário $\bar{I}\alpha$. No caso particular de uma placa em *translação,* as forças efetivas mostradas na parte b dessa figura se reduzem a um único vetor $m\bar{\mathbf{a}}$, enquanto no caso particular de uma placa em *rotação em torno do centro de massa* elas se reduzem a um único binário $\bar{I}\alpha$ em qualquer outro caso de movimento plano, tanto o vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ como o binário $\bar{I}\alpha$ devem ser incluídos.

Figura 16.20

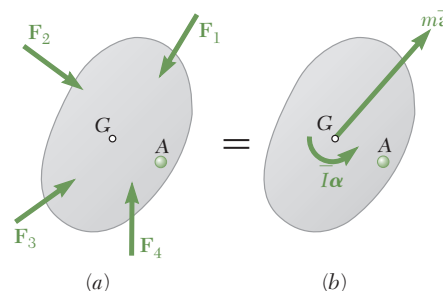
Equação de diagrama de corpo livre

Qualquer problema envolvendo o movimento plano de uma placa rígida pode ser resolvido pelo esboço de uma *equação de diagrama de corpo livre* similar ao da Fig. 16.20 [Seção 16.6]. Três equações de movimento podem então ser obtidas igualando-se os componentes em x, os componentes em y e os momentos em relação a um ponto arbitrário A das forças e vetores envolvidos [Problemas Resolvidos 16.1, 16.2, 16.4 e 16.5]. Uma solução alternativa pode ser obtida pela adição às forças externas de um *vetor de inércia* $-m\bar{\mathbf{a}}$ de sentido oposto ao de $\bar{\mathbf{a}}$, ligado a G, e de um *binário de inércia* $-\bar{I}\alpha$ de sentido oposto ao de α. O sistema obtido dessa maneira é equivalente a zero, e diz-se que a placa está em *equilíbrio dinâmico.*

Corpos rígidos ligados

O método descrito anteriormente também pode ser usado para resolver problemas envolvendo o movimento plano de vários corpos rígidos ligados [Seção 16.7]. Uma equação de diagrama de corpo livre é desenhada para cada parte do sistema e equações de movimento obtidas são resolvidas simultaneamente. Em alguns casos, entretanto, um único diagrama pode ser desenhado para todo o sistema, incluindo todas as forças externas, assim como os vetores $m\bar{\mathbf{a}}$ e os binários $\bar{I}\alpha$ associados às várias partes do sistema [Problema Resolvido 16.3].

Movimento plano restrito

Na segunda parte do capítulo nos preocupamos com o *movimento de corpos rígidos sob dadas restrições* [Seção 16.8]. Embora a análise cinética do movimento plano restrito de uma placa rígida seja a mesma da mencionada anteriormente, ela deve ser complementada por uma *análise cinemática* que tem como objetivo expressar os componentes $\bar{a}_x$ e $\bar{a}_y$ da aceleração do centro de massa G da placa em termos de sua aceleração angular α. Problemas resolvidos dessa maneira incluem os de *rotação em torno de um ponto diferente do centro de massa* de barras e placas [Problemas Resolvidos 16.6 e 16.7], o *movimento de rolamento* de esferas e rodas [Problemas Resolvidos 16.8 e 16.9] e o movimento plano de *vários tipos de sistemas articulados* [Problema Resolvido 16.10].

PROBLEMAS DE REVISÃO

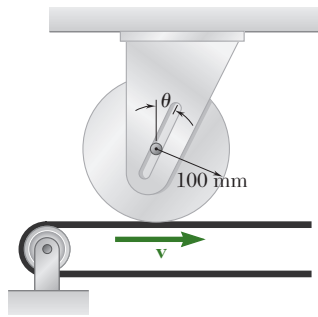



Figura P16.153

16.153 O eixo de um disco de 100 mm de raio é ajustado em um rasgo que forma um ângulo de $\theta = 30°$ com a vertical. O disco está em repouso quando é colocado em contato com uma esteira rolante que se move com uma velocidade escalar constante. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a esteira é de 0,20 e desprezando o atrito dos mancais, determine a aceleração angular do disco enquanto o escorregamento ocorre.

16.154 Resolva o Problema 16.153 considerando que a direção do movimento da esteira rolante é invertida.

16.155 Cilindros idênticos de massa m e raio r são empurrados por uma série de braços de movimentação. Considerando que o coeficiente de atrito entre todas as superfícies é $\mu < 1$ e indicando por a a intensidade da aceleração dos braços, deduza uma expressão para (a) o máximo valor admissível de a se cada cilindro rola sem deslizar, (b) o mínimo valor admissível de a se cada cilindro se move para a direita sem girar.

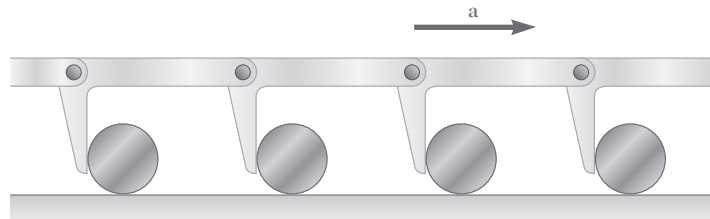



Figura *P16.155*

16.156 Um ciclista está pedalando uma bicicleta a uma velocidade escalar de 30 km/h em uma estrada horizontal. A distância entre eixos é 1.050 mm e o centro de massa do ciclista e da bicicleta é localizado a 650 mm atrás do eixo dianteiro e 1.000 mm acima do chão. Se o ciclista aplica os freios apenas na roda dianteira, determine a menor distância que ele pode parar sem ser jogado sobre a roda dianteira.

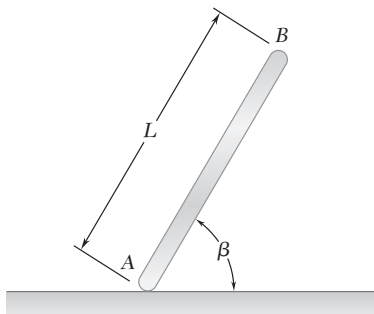



Figura P16.157 e *P16.158*

16.157 A barra uniforme AB de peso W é liberada do repouso quando $\beta = 70°$. Considerando que a força de atrito entre a extremidade A e a superfície é grande o suficiente para evitar o deslizamento, determinar imediatamente após a liberação (a) a aceleração angular da barra, (b) a reação normal em A, (c) a força de atrito em A.

16.158 A barra uniforme AB de peso W é liberada do repouso quando $\beta = 70°$. Considerando que a força de atrito é zero entre a extremidade A e a superfície, determinar imediatamente após a liberação (a) a aceleração angular da barra, (b) a aceleração do centro de massa da barra, (c) a reação em A.

16.159 Uma placa uniforme de massa m é suspensa em cada uma das maneiras mostradas na figura. Para cada caso determine, imediatamente após a conexão B ter sido liberada, (a) a aceleração angular da placa, (b) a aceleração de seu centro de massa.

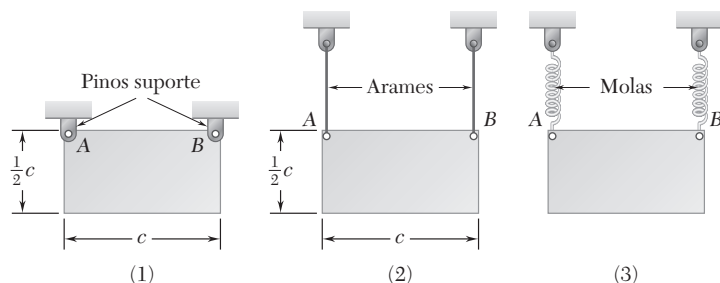



Figura P16.159

16.160 Uma barra delgada AB de peso W é mantida em equilíbrio por dois contra pesos cada um pesando $\frac{1}{2}W$. Se o arame em B é cortado, determine a aceleração nesse instante (a) do ponto A, (b) do ponto B.

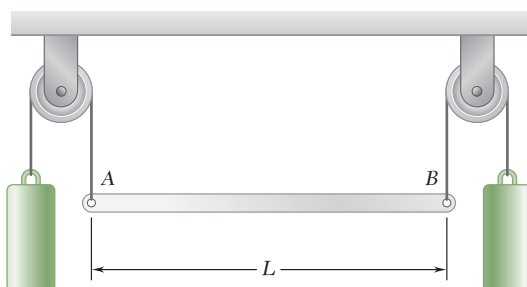



Figura P16.160

16.161 O centro de massa G de uma roda de 5 kg de raio R = 300 mm é localizado a uma distância r = 100 mm do seu centro geométrico C. O raio de giração do centro de massa é $\bar{k}$ = 150 mm. Se a roda gira sem deslizar, sua velocidade angular varia e observa-se que ω = 8 rad/s na posição mostrada na figura. Determine a correspondente aceleração angular da roda.

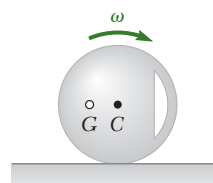



Figura P16.161

16.162 Duas barras delgadas, cada uma com comprimento l e massa m, são liberadas do repouso na posição mostrada na figura. Sabendo que um pequeno puxador na extremidade B da barra AB suporta a barra CD, determine, imediatamente após a liberação, (a) a aceleração da extremidade C da barra CD, (b) a força exercida sobre o puxador.

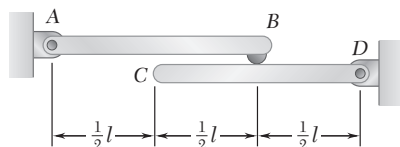



Figura *P16.162*

16.163 O movimento de uma placa quadrada de lado 150 mm e massa 2,5 kg é guiado por pinos nos cantos A e B que deslizam em rasgos cortados em uma parede vertical. Imediatamente após a placa ser liberada do repouso na posição mostrada na figura, determine (*a*) a aceleração angular da placa, (*b*) a reação no canto A.

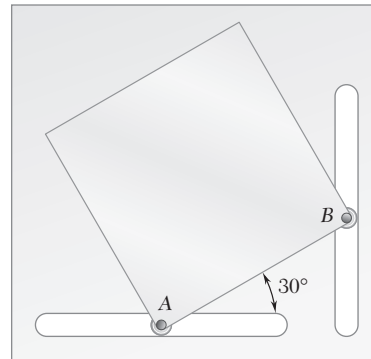



Figura P16.163

16.164 Resolva o Problema 16.163, considerando que a placa é equipada com um único pino no canto A.

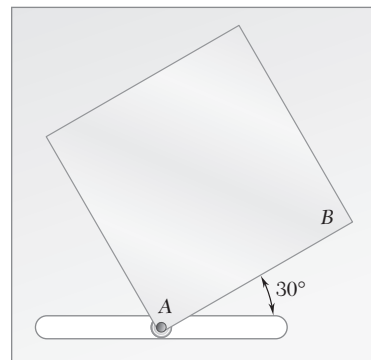



Figura P16.164

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

16.C1 Uma barra AB de 2,5 kg é liberada do repouso na posição mostrada na figura. (a) Considerando que a força de atrito entre a extremidade A e a superfície é grande o suficiente para evitar o deslizamento, usando um programa de computador, calcule a reação normal e a força de atrito em A imediatamente após a liberação para valores de β de 0 a 85°. (b) Sabendo que o coeficiente de atrito estático entre a barra e o chão é de modo eficaz igual a 0,50, determine a faixa de valores de β da barra deslizada imediatamente após ser liberada do repouso.

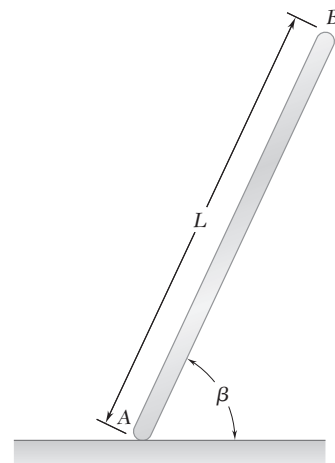



Figura P16.C1

16.C2 A extremidade A da haste AB de 5 kg é movida para a esquerda a uma velocidade escalar constante $v_A = 1{,}5$ m/s. Usando um programa de computador, calcule e trace em um gráfico as reações normais nas extremidades A e B da haste para valores de θ de 0 a 50°. Determine o valor de θ em que a extremidade B da haste perde contato com a parede.

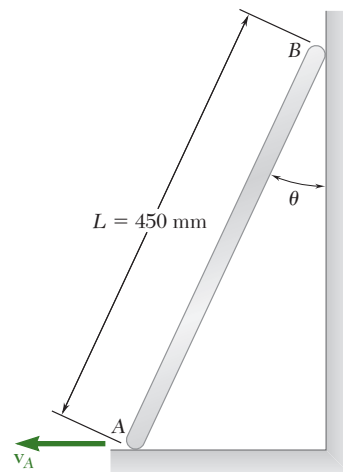



Figura P16.C2

16.C3 Um cilindro de 15 kg, de diâmetro $b = 200$ mm e altura $h = 150$ mm é posto em uma plataforma CD de 5 kg, que é mantida na posição mostrada na figura por três cabos. Deseja-se determinar o valor mínimo de μ_s entre o cilindro e a plataforma em que o cilindro não escorregue sobre a plataforma, imediatamente após o cabo AB ser cortado. Usando um programa de computador, calcule e trace em um gráfico o valor mínimo admissível de μ_s para valores de θ de 0 a 30°. Sabendo que o valor real de μ_s é 0,60, determine o valor de θ no qual o escorregamento é iminente.

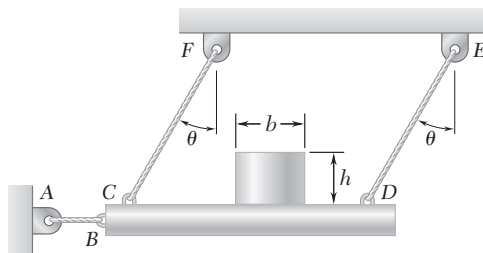



Figura P16.C3

16.C4 No sistema motor do Problema 15.C3 do Cap. 15, a massa do pistão P e da haste de conexão BD são 2,5 kg e 3 kg respectivamente. Sabendo que durante um teste do sistema nenhuma força é aplicada na face do pistão, use um programa de computador para calcular e traçar em um gráfico os componentes horizontal e vertical das reações dinâmicas exercidas na haste de conexão em B e D para valores de θ de 0 até 180°.

16.C5 Uma barra delgada uniforme AB de massa m está suspensa por molas AC e BD como mostra a figura. Usando um programa de computador, calcule e trace em um gráfico as acelerações das extremidades A e B, imediatamente após a mola AC quebrar, para valores de θ de 0 até 90°.

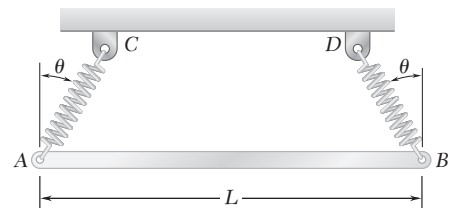



Figura P16.C5

Neste capítulo, os métodos de energia e quantidade de movimento serão adicionados às ferramentas disponíveis para o seu estudo do movimento de corpos rígidos. Por exemplo, usando o princípio da conservação da energia e a aplicação direta da Segunda Lei de Newton, as forças exercidas nas mãos deste ginasta podem ser determinadas na medida em que ele troca de uma argola para outra.

CAPÍTULO 17

Movimento plano de corpos rígidos: métodos de energia e quantidade de movimento

17 Movimento plano de corpos rígidos: métodos de energia e quantidade de movimento

Foto 17.1 O trabalho feito pelo atrito reduz a energia cinética da roda.

17.1 Introdução

Neste capítulo, o método de trabalho e energia e o método de impulso e quantidade de movimento serão usados para analisar o movimento plano de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos.

O método de trabalho e energia será considerado em primeiro lugar. Nas Seções 17.2 a 17.5, o trabalho de uma força e de um binário será definido e será obtida uma expressão para a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano. O princípio de trabalho e energia será, então, usado para resolver problemas envolvendo deslocamentos e velocidades. Na Seção 17.6, o princípio de conservação da energia será aplicado à resolução de uma variedade de problemas de engenharia.

Na segunda parte do capítulo, o princípio de impulso e quantidade de movimento será aplicado à resolução de problemas que envolvem velocidades e tempo (Seções 17.8 e 17.9), e o conceito de conservação de quantidade de movimento angular será introduzido e discutido (Seção 17.10).

Na parte final do capítulo (Seções 17.11 e 17.12), serão considerados problemas que envolvem o impacto excêntrico de corpos rígidos. Como fizemos no Cap. 13 ao analisar o impacto de partículas, o coeficiente de restituição entre os corpos em colisão será usado juntamente com o princípio de impulso e quantidade de movimento para a resolução de problemas de impacto. Será mostrado, também, que o método usado é aplicável não apenas quando os corpos em colisão movem-se livremente após o impacto, mas também quando eles estão parcialmente restritos em seu movimento.

17.2 Princípio de trabalho e energia para um corpo rígido

O princípio de trabalho e energia será usado agora na análise do movimento plano de corpos rígidos. Conforme salientado no Cap. 13, o método de trabalho e energia adapta-se particularmente bem à resolução de problemas que envolvem velocidades e deslocamentos. Sua vantagem principal reside no fato de que o trabalho de forças e a energia cinética de partículas são grandezas escalares.

Para aplicar o princípio de trabalho e energia à análise do movimento de um corpo rígido, admitiremos novamente que o corpo rígido é constituído de um grande número n de partículas de massa Δm_i. Retomando a Eq. (14.30) da Seção 14.8, escrevemos

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{17.1}$$

onde T_1, T_2 = valores inicial e final da energia cinética total das partículas constituintes do corpo rígido

$U_{1\to 2}$ = trabalho de todas as forças que agem sobre as várias partículas do corpo.

A energia cinética total

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i\, v_i^2 \tag{17.2}$$

é obtida adicionando-se as grandezas escalares positivas, sendo ela mesma uma grandeza escalar positiva. Veremos adiante que T pode ser determinada para vários tipos de movimento de um corpo rígido.

A expressão $U_{1\to2}$ na Eq. (17.1) representa o trabalho de todas as forças que agem sobre as várias partículas do corpo, sejam essas forças internas ou externas. Todavia, como você verá agora, o trabalho total das forças internas que mantêm as partículas de um corpo rígido juntas é nulo. Considere duas partículas A e B de um corpo rígido e as duas forças iguais e opostas $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ que elas exercem uma sobre a outra (Fig. 17.1). Embora, em geral, pequenos deslocamentos $d\mathbf{r}$ e $d\mathbf{r}'$ das duas partículas sejam diferentes, os componentes desses deslocamentos ao longo de AB precisam ser iguais; caso contrário, as partículas não permaneceriam à mesma distância uma da outra e o corpo não seria rígido. Portanto, o trabalho de $\mathbf{F}$ é igual em módulo e tem sinal oposto ao trabalho de $-\mathbf{F}$, e sua soma é igual a zero. Logo, o trabalho total das forças internas que agem sobre as partículas de um corpo rígido é nulo, e *a expressão* $U_{1\to2}$ na Eq. (17.1) *se reduz ao trabalho das forças externas* que agem sobre o corpo durante o deslocamento considerado.

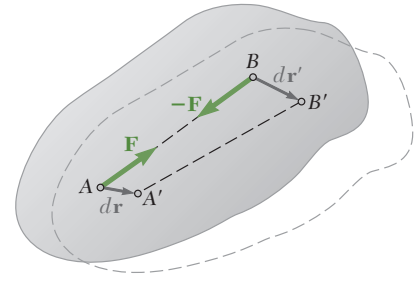



Figura 17.1

17.3 Trabalho de forças que agem sobre um corpo rígido

Nós vimos na Seção 13.2 que o trabalho de uma força $\mathbf{F}$ durante um deslocamento de seu ponto de aplicação de A_1 até A_2 é

$$U_{1\to2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{17.3}$$

ou

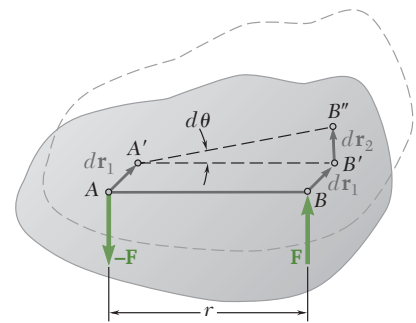
$$U_{1\to2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \tag{17.3'}$$

onde F é a intensidade da força, α é o ângulo que ela forma com a direção do movimento de seu ponto de aplicação A e s é a variável de integração que mede a distância percorrida por A ao longo de sua trajetória.

No cálculo do trabalho das forças externas que agem sobre um corpo rígido, frequentemente convém determinar o trabalho de um binário sem considerar separadamente o trabalho de cada uma das duas forças que o constituem. Considere as duas forças $\mathbf{F}$ e $-\mathbf{F}$ que formam um binário de momento $\mathbf{M}$ e que agem sobre um corpo rígido (Fig. 17.2). Um pequeno deslocamento qualquer do corpo rígido levando A e B, respectivamente, para A' e B'' pode ser dividido em duas partes: em uma parte, os pontos A e B realizam deslocamentos iguais a $d\mathbf{r}_1$ na outra parte, A' permanece fixo, enquanto B' move-se para B'' por meio de um deslocamento $d\mathbf{r}_2$ de intensidade $ds_2 = r\, d\theta$. Na primeira parte do movimento, o trabalho de $\mathbf{F}$ é igual em intensidade e tem sinal oposto ao trabalho de $-\mathbf{F}$, e sua soma é igual a zero. Na segunda parte do movimento, apenas a força $\mathbf{F}$ realiza trabalho, igual a $dU = F\, ds_2 = Fr\, d\theta$. Mas o produto Fr é igual à intensidade M do momento do binário. Portanto, o trabalho de um binário de momento $\mathbf{M}$ que age sobre um corpo rígido é

Figura 17.2

$$dU = M\, d\theta \tag{17.4}$$

onde $d\theta$ é o pequeno ângulo, expresso em radianos, por meio do qual o corpo gira. Observamos novamente que o trabalho deve ser expresso em unidades obtidas pelo produto das unidades de força e de comprimento.

O trabalho do binário durante uma rotação finita do corpo rígido é obtido por integração de ambos os membros de (17.4) desde o valor inicial θ_1 do ângulo θ até seu valor final θ_2. Escrevemos

$$U_{1\rightarrow 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \tag{17.5}$$

Quando o momento **M** *do binário é constante,* a Eq. (17.5) reduz-se a

$$U_{1\rightarrow 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \tag{17.6}$$

Na Seção 13.2, destacamos que certas forças encontradas em problemas de cinética *não realizam trabalho.* Trata-se de forças aplicadas a pontos fixos ou que atuam em uma direção perpendicular ao deslocamento de seu ponto de aplicação. Entre as forças que não realizam trabalho, foram listadas as seguintes: a reação em um pino sem atrito quando o corpo apoiado gira em torno do pino; a reação em uma superfície sem atrito quando o corpo em contato se move ao longo da superfície; e o peso de um corpo quando seu centro de gravidade move-se horizontalmente. Podemos agora acrescentar que, *quando um corpo rígido rola sem deslizar sobre uma superfície fixa, a força de atrito* **F** *no ponto de contato C não realiza trabalho.* A velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto de contato C é nula e o trabalho da força de atrito **F** durante um pequeno deslocamento do corpo rígido é

$$dU = F\, ds_C = F(v_C\, dt) = 0$$

17.4 Energia cinética de um corpo rígido em movimento plano

Considere um corpo rígido de massa m em movimento plano. Recordemos a partir da Seção 14.7 que, sendo a velocidade absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i do corpo expressa como a soma da velocidade $\overline{\mathbf{v}}$ do centro de massa G do corpo e da velocidade $\mathbf{v}'_i$ da partícula relativa a um sistema de referência $Gx'y'$ ligado a G e de orientação fixa (Fig. 17.3), a energia cinética do sistema de partículas constituintes do corpo rígido pode ser escrita sob a forma

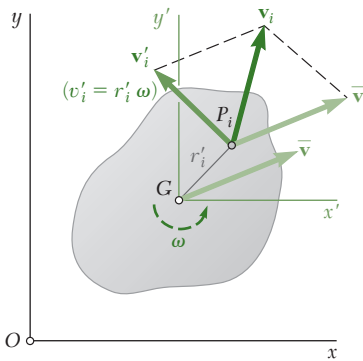
Figura 17.3

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 \tag{17.7}$$

Mas a intensidade v'_i da velocidade relativa de P_i é igual ao produto $r'_i\omega$ da distância r'_i de P_i ao eixo perpendicular ao plano do movimento, passando por G, pela intensidade ω da velocidade angular do corpo no instante considerado. Com essa consideração na Eq. (17.7), temos

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i'^2\, \Delta m_i\right)\omega^2 \tag{17.8}$$

ou, então, como a somatória representa o momento de inércia $\overline{I}$ do corpo em torno do eixo que passa por G

$$T = \frac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\overline{I}\omega^2 \tag{17.9}$$

Notemos que, no caso particular de um corpo em translação ($\omega = 0$), a expressão obtida reduz-se a $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ enquanto no caso de uma rotação centroidal ($\bar{v} = 0$), ela se reduz a $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$. Concluímos que a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano pode ser separada em duas partes: (1) a energia cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ associada ao movimento do centro de massa G do corpo e (2) a energia cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$ associada à rotação do corpo em torno de G.

Rotação não centroidal. A relação (17.9) é válida para qualquer tipo de movimento plano e pode, portanto, ser usada para expressar a energia cinética de um corpo rígido que gira com uma velocidade angular ω em torno de um eixo fixo passando por O (Fig. 17.4). Neste caso, porém, a energia cinética do corpo pode ser expressa mais diretamente considerando-se que a velocidade v_i da partícula P_i é igual ao produto $r_i\omega$ da distância r_i de P_i do eixo fixo pela intensidade ω da velocidade angular do corpo no instante considerado. Substituindo em Eq. (17.2), escrevemos

Figura 17.4

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i (r_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\,\Delta m_i\right)\omega^2$$

ou, então, como o último somatório representa o momento de inércia I_O do corpo em torno do eixo fixo que passa por O,

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \qquad (17.10)$$

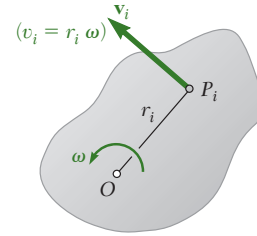
Observamos que os resultados obtidos não são limitados ao movimento de placas planas, ou ao movimento de corpos simétricos em relação ao plano de referência, e que podem ser aplicados ao estudo do movimento plano de qualquer corpo rígido, qualquer que seja o seu formato. Todavia, como a Eq. (17.9) é aplicável a qualquer movimento plano, enquanto a Eq. (17.10) aplica-se apenas em casos que envolvem rotação não centroidal, a Eq. (17.9) será usada para a resolução de todos os Problemas Resolvidos.

17.5 Sistemas de corpos rígidos

Quando um problema envolve diversos corpos rígidos, cada um deles pode ser considerado em separado e o princípio de trabalho e energia pode ser aplicado a cada corpo. Somando as energias cinéticas de todas as partículas e considerando o trabalho de todas as forças envolvidas, podemos também escrever a equação de trabalho e energia para todo o sistema. Temos

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2 \qquad (17.11)$$

onde T representa a soma aritmética das energias cinéticas dos corpos rígidos constituintes do sistema (todos os termos são positivos) e $U_{1\rightarrow 2}$ representa o trabalho de todas as forças que agem sobre os vários corpos, sejam elas forças *internas* ou *externas* do ponto de vista do sistema como um todo.

O método de trabalho e energia é particularmente útil para a resolução de problemas que envolvem elementos conectados por pinos, blocos e polias ligados por cabos inextensíveis e transmissões por engrenagens.

Em todos esses casos, as forças internas ocorrem em pares de forças iguais e opostas, e os pontos de aplicação das forças em cada par *movem-se por meio de distâncias iguais* durante um pequeno deslocamento do sistema. Como resultado, o trabalho das forças internas é nulo e $U_{1\rightarrow 2}$ se reduz ao trabalho *das forças externas ao sistema.*

17.6 Conservação de energia

Vimos na Seção 13.6 que o trabalho de forças conservativas, tais como o peso de um corpo ou a força exercida por uma mola, pode ser expresso como uma variação da energia potencial. Quando um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, move-se sob a ação de forças conservativas, o princípio de trabalho e energia estabelecido na Seção 17.2 pode ser expresso por meio de uma forma modificada. Substituindo $U_{1\rightarrow 2}$ da Eq. (13.19′) na Eq. (17.1), escrevemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

A equação (17.12) estabelece que, quando um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, move-se sob a ação de forças conservativas, *a soma da energia cinética e da energia potencial do sistema permanece constante.* Deve-se notar que, no caso do movimento plano de um corpo rígido, a energia cinética do corpo deve incluir tanto o termo *translacional* $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$ como o termo *rotacional* $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$.

Como um exemplo de aplicação do princípio de conservação da energia, consideremos uma barra delgada AB, de comprimento l e massa m, cujas extremidades estão conectadas a blocos de massa desprezível que deslizam ao longo de pista horizontal e vertical. Assumimos que a barra é liberada, sem velocidade inicial, de uma posição horizontal (Fig. 17.5*a*) e desejamos determinar sua velocidade angular depois de ela ter girado por meio de um ângulo θ (Fig. 17.5*b*).

Como a velocidade inicial é nula, temos $T_1 = 0$. Medindo a energia potencial a partir do nível da pista horizontal, escrevemos $V_1 = 0$. Após o giro da barra por meio do ângulo θ, o centro de gravidade G da barra está a uma distância $\frac{1}{2}l$ sen θ abaixo do nível de referência e temos

$$V_2 = -\tfrac{1}{2}Wl \text{ sen } \theta = -\tfrac{1}{2}mgl \text{ sen } \theta$$

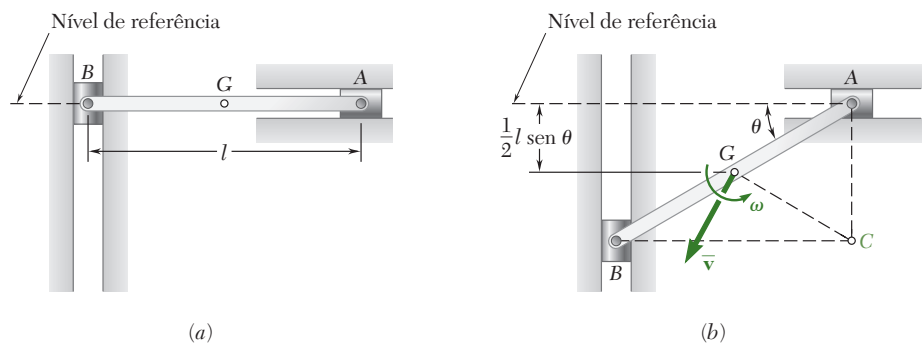



Figura 17.5

Observando que nessa posição o centro instantâneo de rotação da barra está localizado em C e que $CG = \frac{1}{2}l$, escrevemos $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}l\omega$, obtemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}l\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{12}ml^2)\omega^2$$
$$= \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2$$

Aplicando o princípio da conservação da energia, escrevemos:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 = \frac{1}{2}\frac{ml^2}{3}\omega^2 - \tfrac{1}{2}mgl \operatorname{sen}\theta$$
$$\omega = \left(\frac{3g}{l}\operatorname{sen}\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

As vantagens do método de trabalho e energia, assim como suas limitações, foram indicadas na Seção 13.4. Aqui, devemos acrescentar que esse método precisa ser suplementado pela aplicação do princípio de d'Alembert quando for determinar reações em eixos fixos, rolamentos e blocos deslizantes. Por exemplo, para calcular as reações nas extremidades A e B da barra da Fig. 17.5*b*, deve-se desenhar um diagrama para expressar que o sistema de forças externas aplicadas à barra é equivalente ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e ao binário $\bar{I}\alpha$. Entretanto, a velocidade angular ω da barra é determinada pelo método de trabalho e energia antes que as equações de movimento sejam resolvidas para as reações. Portanto, a análise completa do movimento da barra e das forças exercidas sobre ela requer o uso combinado do método de trabalho e energia e do princípio de equivalência das forças externas e efetivas.

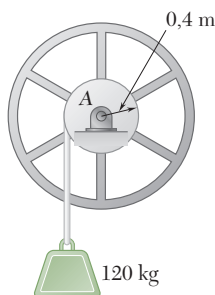
17.7 Potência

Potência foi definida na Seção 13.5 como sendo a taxa temporal em que o trabalho é realizado. No caso de um corpo sujeito a uma força $\mathbf{F}$, movendo-se com velocidade $\mathbf{v}$, a potência foi expressa da seguinte maneira:

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (13.13)$$

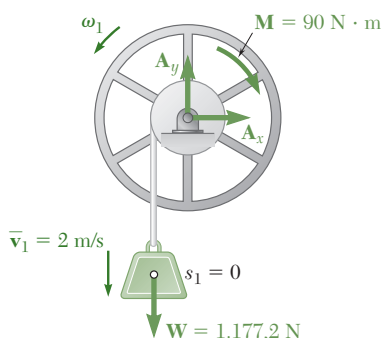
No caso de um corpo rígido girando com velocidade angular ω e sujeito a um binário de momento $\mathbf{M}$ paralelo ao eixo de rotação, temos, pela Eq. (17.4),

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \qquad (17.13)$$

As diferentes unidades usadas para medir a potência, tais como o watt (W) e o cavalo-potência (hp), foram definidas na Seção 13.5.

PROBLEMA RESOLVIDO 17.1

Um bloco de 120 kg está suspenso por um cabo inextensível enrolado em torno de um tambor de 0,4 m de raio, preso rigidamente a um volante. O tambor e o volante têm um momento de inércia centroidal combinado $\bar{I} = 16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. No instante mostrado na figura, a velocidade do bloco é de 2 m/s para baixo. Sabendo que o mancal em A é pouco lubrificado e que seu atrito equivale a um binário **M** de intensidade de 90 N · m, determine a velocidade do bloco após ele ter se deslocado 1,25 m para baixo.

SOLUÇÃO

Consideremos o sistema formado pelo volante e pelo bloco. Como o cabo é inextensível, o trabalho realizado pelas forças internas exercidas pelo cabo se cancela. As posições inicial e final do sistema e as forças externas que agem sobre ele estão mostradas na figura.

Energia cinética. ***Posição 1.***

Bloco: $\bar{v}_1 = 2 \text{ m/s}$

Volante: $\omega_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{r} = \dfrac{2 \text{ m/s}}{0{,}4 \text{ m}} = 5 \text{ rad/s}$

$T_1 = \frac{1}{2}m\bar{v}_1^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega_1^2$ (observe que a velocidade do centro da massa do tambor = 0)

$= \frac{1}{2}(120 \text{ kg})(2 \text{ m/s})^2 + \frac{1}{2}(16 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(5 \text{ rad/s})^2$

$= 440 \text{ J}$

Posição 2. Observando que $\omega_2 = \bar{v}_2/0{,}4$, escrevemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2$$

$$= \tfrac{1}{2}(120)\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}(16)\left(\frac{\bar{v}_2}{0{,}4}\right)^2 = 110\,\bar{v}_2^2$$

Trabalho. Durante o movimento, apenas o peso **W** do bloco e o binário de atrito **M** realizam trabalho. Observando que **W** realiza trabalho positivo e que o binário de atrito **M** realiza trabalho negativo, escrevemos

$s_1 = 0 \qquad s_2 = 1{,}25 \text{ m}$

$\theta_1 = 0 \qquad \theta_2 = \dfrac{s_2}{r} = \dfrac{1{,}25 \text{ m}}{0{,}4 \text{ m}} = 3{,}125 \text{ rad}$

$U_{1\to 2} = W(s_2 - s_1) - M(\theta_2 - \theta_1)$

$= (120 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2)(1{,}25 \text{ m}) - (90 \text{ N} \cdot \text{m})(3{,}125 \text{ rad})$

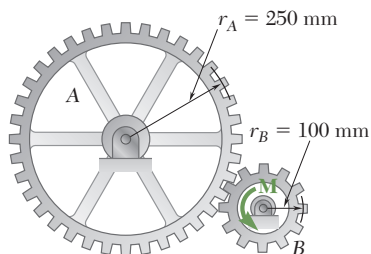
$= 768 \text{ ft} \cdot \text{lb}$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2$$

$$(440 \text{ J}) + (1.190 \text{ J}) = 110\bar{v}_2^2$$

$$\bar{v}_2 = 3{,}85 \text{ m/s}$$

$\bar{\mathbf{v}}_2 = 3{,}85 \text{ m/s} \downarrow$ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 17.2

A engrenagem A tem massa de 10 kg e raio de giração de 200 mm; a engrenagem B tem massa de 3 kg e raio de giração de 80 mm. O sistema está em repouso quando um binário **M** de intensidade 6 N · m é aplicado à engrenagem B. Desprezando o atrito, determine (a) o número de revoluções executadas pela engrenagem B antes que sua velocidade angular atinja 600 rpm e (b) a força tangencial que a engrenagem B exerce sobre a engrenagem A.

SOLUÇÃO

Movimento do sistema como um todo. Notando que as velocidades periféricas das engrenagens são iguais, escrevemos

$$r_A\omega_A = r_B\omega_B \qquad \omega_A = \omega_B\frac{r_B}{r_A} = \omega_B\frac{100\text{ mm}}{250\text{ mm}} = 0{,}40\omega_B$$

Para ω_B = 600 rpm, temos

$$\omega_B = 62{,}8\text{ rad/s} \qquad \omega_A = 0{,}40\omega_B = 25{,}1\text{ rad/s}$$
$$\bar{I}_A = m_A\bar{k}_A^2 = (10\text{ kg})(0{,}200\text{ m})^2 = 0{,}400\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$
$$\bar{I}_B = m_B\bar{k}_B^2 = (3\text{ kg})(0{,}080\text{ m})^2 = 0{,}0192\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Energia cinética. Como o sistema está inicialmente em estado de repouso, T_1 = 0. Somando as energias cinéticas das duas engrenagens quando ω_B = 600 rpm, obtemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_B\omega_B^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0{,}400\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(25{,}1\text{ rad/s})^2 + \tfrac{1}{2}(0{,}0192\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(62{,}8\text{ rad/s})^2$$
$$= 163{,}9\text{ J}$$

Trabalho. Representando por θ_B o deslocamento angular da engrenagem B, temos

$$U_{1\rightarrow 2} = M\theta_B = (6\text{ N}\cdot\text{m})(\theta_B\text{ rad}) = (6\theta_B)\text{ J}$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2$$
$$0 + (6\theta_B)\text{ J} = 163{,}9\text{ J}$$
$$\theta_B = 27{,}32\text{ rad} \qquad \theta_B = 4{,}35\text{ rev} \blacktriangleleft$$

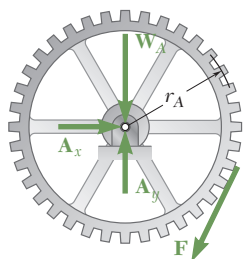
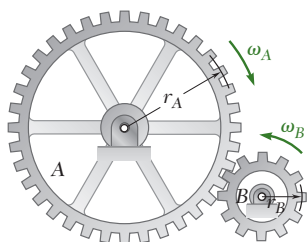
Movimento da engrenagem A. ***Energia cinética.*** Inicialmente, a engrenagem A está em repouso, de modo que T_1 = 0. Quando ω_B = 600 rpm, a energia cinética da engrenagem A é

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\bar{I}_A\omega_A^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}400\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(25{,}1\text{ rad/s})^2 = 126{,}0\text{J}$$

Trabalho. As forças que agem sobre a engrenagem A estão mostradas na figura. A força tangencial **F** realiza trabalho igual ao produto de sua intensidade pelo comprimento $\theta_A r_A$ do arco descrito pelo ponto de contato. Como $\theta_A r_A = \theta_B r_B$, temos

$$U_{1\rightarrow 2} = F(\theta_B r_B) = F(27{,}3\text{ rad})(0{,}100\text{ m}) = F(2{,}73\text{ m})$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\rightarrow 2} = T_2$$
$$0 + F(2{,}73\text{ m}) = 126{,}0\text{ J}$$
$$F = +46{,}2\text{ N} \qquad \mathbf{F} = 46{,}2\text{ N}\swarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 17.3

Uma esfera, um cilindro e um aro, todos de mesma massa e mesmo raio, são liberados do repouso em um plano inclinado. Determine a velocidade de cada corpo depois de ele ter rolado por uma distância correspondente a uma variação de elevação h.

SOLUÇÃO

O problema será resolvido primeiro em termos gerais e, em seguida, serão encontrados os resultados para cada corpo. Representamos a massa por m, o momento de inércia centroidal por $\bar{I}$, o peso por W e o raio por r.

Cinemática. Como cada corpo rola, o centro instantâneo de rotação está localizado em C e escrevemos

$$\omega = \frac{\bar{v}}{r}$$

Energia cinética

$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2$$
$$= \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\left(\frac{\bar{v}}{r}\right)^2 = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2$$

Trabalho. Como a força de atrito **F** em movimento de rolagem não realiza trabalho,

$$U_{1\to2} = Wh$$

Princípio de trabalho e energia

$$T_1 + U_{1\to2} = T_2$$
$$0 + Wh = \tfrac{1}{2}\left(m + \frac{\bar{I}}{r^2}\right)\bar{v}^2 \qquad \bar{v}^2 = \frac{2Wh}{m + \bar{I}/r^2}$$

Observando que $W = mg$, reordenamos o resultado e obtemos

$$\bar{v}^2 = \frac{2gh}{1 + \bar{I}/mr^2}$$

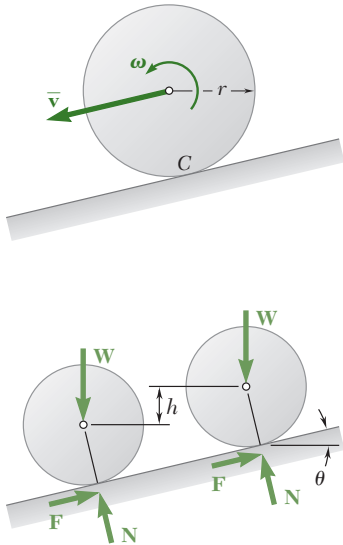
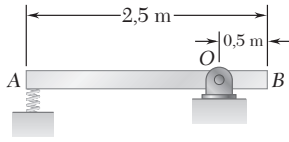
Velocidades da esfera, cilindro e aro. Introduzindo sucessivamente a expressão particular para $\bar{I}$, obtemos

Esfera: $\bar{I} = \tfrac{2}{5}mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0{,}845\sqrt{2gh}$ ◀

Cilindro: $\bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0{,}816\sqrt{2gh}$ ◀

Aro: $\bar{I} = mr^2$ $\qquad \bar{v} = 0{,}707\sqrt{2gh}$ ◀

Observação. Comparemos os resultados com a velocidade atingida por um bloco sem atrito que desliza pela mesma distância. A solução é idêntica à solução anterior, exceto que $\omega = 0$; encontramos $\bar{v} = \sqrt{2gh}$.

Ao compararmos os resultados, verificamos que a velocidade do corpo é independente tanto da massa como do raio. Entretanto, a velocidade depende do quociente $\bar{I}/mr^2 = \bar{k}^2/r^2$, que mede a razão entre a energia cinética rotacional e a energia cinética translacional. Assim, o aro, que possui o maior $\bar{k}$ para um raio dado r, atinge a menor velocidade, enquanto o bloco deslizante, que não gira, atinge a maior velocidade.

PROBLEMA RESOLVIDO 17.4

Uma barra delgada AB de 15 kg tem 2,5 m de comprimento e está pivotada em um ponto O, situado a 0,5 m da extremidade B. A outra extremidade é pressionada contra uma mola de constante k = 300 kN/m, até que a mola esteja comprimida 40 mm. A barra fica, então, em uma posição horizontal. Se a barra é liberada dessa posição, determine a velocidade angular e a reação no pivô O quando a barra passa pela posição vertical.

SOLUÇÃO

Posição 1. ***Energia potencial.*** Como a mola está comprimida 40 mm, temos x_1 = 40 mm.

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_1^2 = \tfrac{1}{2}(300\,000 \text{ N/m})(0{,}040 \text{ m})^2 = 240 \text{ J}$$

Escolhendo o nível de referência mostrado na figura, temos $V_g = 0$; logo,

$$V_1 = V_e + V_g = 240 \text{ J}$$

Energia cinética. Como a velocidade na posição *1* é nula, temos $T_1 = 0$.

Posição 2. ***Energia potencial.*** A elongação da mola é zero e temos $V_e = 0$. Como o centro de gravidade da barra está agora a 0,75 m acima do nível de referência,

$$V_g = (147{,}15 \text{ N})(0{,}75 \text{ m}) = 110{,}4 \text{ J}$$
$$V_2 = V_e + V_g = 110{,}4 \text{ J}$$

Energia cinética. Representando por $\boldsymbol{\omega}_2$ a velocidade angular da barra na posição *2*, notamos que a barra gira em torno de O e escrevemos $\bar{v}_2 = \bar{r}\omega_2 = 0{,}75\omega_2$.

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}5 \text{ kg})(2{,}5 \text{ m})^2 = 7{,}81 \text{ kg}\cdot\text{m}$$

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}(15)(0{,}75\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(7{,}81)\omega_2^2 = 8{,}12\omega_2^2$$

Conservação da energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 240 \text{ J} = 8{,}12\omega_2^2 + 110{,}4 \text{ J}$$

$\boldsymbol{\omega}_2 = 3{,}995$ rad/s ↻ ◀

Reação na posição 2. Como ω_2 = 3,995 rad/s, os componentes da aceleração de G quando a barra passa pela posição *2* são

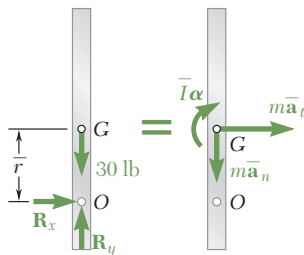
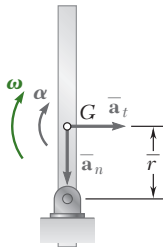
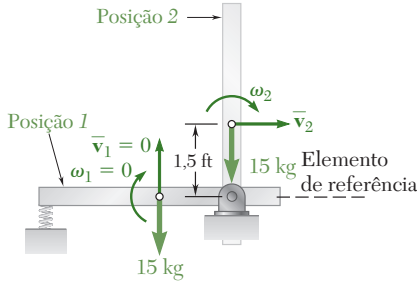
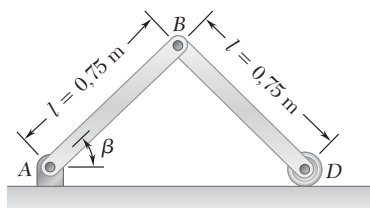
$$\bar{a}_n = \bar{r}\omega_2^2 = (0{,}75 \text{ m})(3{,}995 \text{ rad/s})^2 = 11{,}97 \text{ m/s}^2 \qquad \bar{\mathbf{a}}_n = 11{,}97 \text{ m/s}^2 \downarrow$$
$$\bar{a}_t = \bar{r}\alpha \qquad \bar{\mathbf{a}}_t = \bar{r}\alpha \rightarrow$$

Expressamos que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, representado pelo vetor de componentes $m\bar{\mathbf{a}}_t$ e $m\bar{\mathbf{a}}_n$, ligados a G, e pelo binário $\bar{I}\alpha$.

$$+\circlearrowright\Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{efet}}: \qquad 0 = \bar{I}\alpha + m(\bar{r}\alpha)\bar{r} \qquad \alpha = 0$$
$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = \Sigma(F_x)_{\text{efet}}: \qquad R_x = m(\bar{r}\alpha) \qquad R_x = 0$$
$$+\uparrow\Sigma F_y = \Sigma(F_y)_{\text{efet}}: \quad R_y - 147{,}15 \text{ N} = -m\bar{a}_n$$

$$R_y - 147{,}15 \text{ N} = -(15 \text{ kg})(11{,}97 \text{ m/s}^2)$$

$$R_y = +32{,}4 \text{ N}$$

$\mathbf{R}$ = 32,4 N ↑ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 17.5

Cada uma das barras delgadas mostradas tem 0,75 m de comprimento e 6 kg de massa. Se o sistema é liberado do repouso com $\beta = 60°$, determine (*a*) a velocidade angular da barra *AB* quando $\beta = 20°$ e (*b*) a velocidade do ponto *D* no mesmo instante.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento quando $\beta = 20°$. Como $\mathbf{v}_B$ é perpendicular à barra *AB* e $\mathbf{v}_D$ é horizontal, o centro instantâneo de rotação da barra *BD* está localizado em *C*. Considerando a geometria da figura, obtemos

$$BC = 0{,}75 \text{ m} \qquad CD = 2(0{,}75 \text{ m}) \text{ sen } 20° = 0{,}513 \text{ m}$$

Aplicando a lei dos cossenos ao triângulo *CDE*, estando *E* localizado no centro de massa da barra *BD*, encontramos $EC = 0{,}522$ m. Representando por ω a velocidade angular da barra *AB*, temos

$$\bar{v}_{AB} = (0{,}375 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{AB} = 0{,}375\omega \searrow$$
$$v_B = (0{,}75 \text{ m})\omega \qquad \mathbf{v}_B = 0{,}75\omega \searrow$$

Como a barra *BD* parece girar em torno do ponto *C*, escrevemos

$$v_B = (BC)\omega_{BD} \qquad (0{,}75 \text{ m})\omega = (0{,}75 \text{ m})\omega_{BD} \qquad \omega_{BD} = \omega \circlearrowleft$$
$$\bar{v}_{BD} = (EC)\omega_{BD} = (0{,}522 \text{ m})\omega \qquad \bar{\mathbf{v}}_{BD} = 0{,}522\,\omega \searrow$$

Posição 1. ***Energia potencial.*** Escolhendo o nível de referência mostrado e observando que $W = (6 \text{ kg})(9{,}81 \text{ m/s}^2) = 58{,}86$ N, temos

$$V_1 = 2W\bar{y}_1 = 2(58{,}86 \text{ N})(0{,}325 \text{ m}) = 38{,}26 \text{ J}$$

Energia cinética. Como o sistema está em repouso, $T_1 = 0$.

Posição 2. ***Energia potencial***

$$V_2 = 2W\bar{y}_2 = 2(58{,}86 \text{ N})(0{,}1283 \text{ m}) = 15{,}10 \text{ J}$$

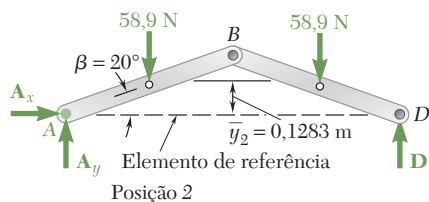
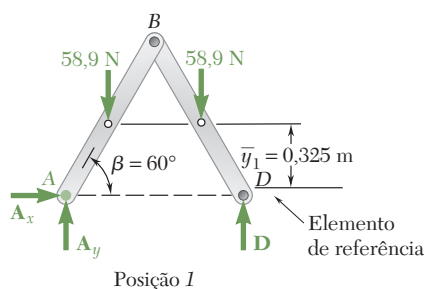
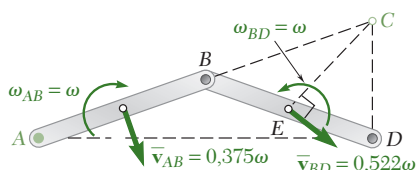
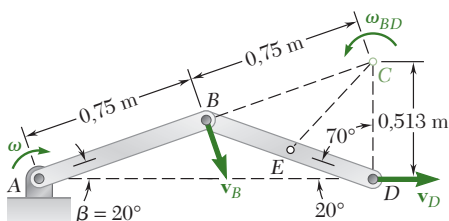
Energia cinética

$$I_{AB} = \bar{I}_{BD} = \tfrac{1}{12}ml^2 = \tfrac{1}{12}(6 \text{ kg})(0{,}75 \text{ m})^2 = 0{,}281 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{AB}\omega_{AB}^2 + \tfrac{1}{2}m\bar{v}_{BD}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_{BD}\omega_{BD}^2 =$$
$$= \tfrac{1}{2}(6)(0{,}375\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0{,}281)\omega^2 + \tfrac{1}{2}(6)(0{,}522\omega)^2 + \tfrac{1}{2}(0{,}281)\omega^2 =$$
$$= 1{,}520\,\omega^2$$

Conservação da energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$
$$0 + 38{,}26 \text{ J} = 1{,}520\,\omega^2 + 15{,}10 \text{ J}$$
$$\omega = 3{,}90 \text{ rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB} = 3{,}90 \text{ rad/s} \circlearrowright \quad ◀$$

Velocidade do ponto *D*

$$v_D = (CD)\omega = (0{,}513 \text{ m})(3{,}90 \text{ rad/s}) = 2{,}00 \text{ m/s}$$
$$\mathbf{v}_D = 2{,}00 \text{ m/s} \rightarrow \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, introduzimos métodos de energia para determinar a velocidade de corpos rígidos para várias posições durante seu movimento. Como você constatou anteriormente no Cap. 13, métodos de energia devem ser considerados para problemas que envolvem deslocamentos e velocidades.

1. O método de trabalho e energia, quando aplicado a todas as partículas constituintes de um corpo rígido, conduz à equação

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

onde T_1 e T_2 são, respectivamente, os valores inicial e final da energia cinética total das partículas constituintes do corpo rígido e $U_{1\to 2}$ é o *trabalho realizado pelas forças externas* exercidas sobre esse corpo.

a. Trabalho de forças e binários. À expressão do trabalho de uma força (Cap. 13), adicionamos a expressão do trabalho de um binário e escrevemos

$$U_{1\to 2} = \int_{A_1}^{A_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \qquad U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \qquad (17.3,\ 17.5)$$

Quando o momento de um binário é constante, o trabalho do binário é

$$U_{1\to 2} = M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (17.6)$$

onde θ_1 e θ_2 são expressos em radianos [Problemas Resolvidos 17.1 e 17.2].

b. A energia cinética de um corpo rígido em movimento plano foi encontrada considerando-se o movimento do corpo como a soma de uma translação com seu centro de massa e de uma rotação em torno dele

$$T = \tfrac{1}{2} m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \qquad (17.9)$$

onde $\bar{v}$ é a velocidade do centro de massa e ω é a velocidade angular do corpo [Problemas Resolvidos 17.3 e 17.4].

2. Para um sistema de corpos rígidos usamos novamente a equação

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \qquad (17.1)$$

onde T é a soma das energias cinéticas dos corpos que formam o sistema e U é o trabalho realizado por *todas as forças que agem sobre os corpos,* tanto internas como externas. Seus cálculos serão simplificados se você tiver em mente o que vem a seguir.

a. As forças exercidas entre si por elementos conectados por pinos ou pelas engrenagens de uma transmissão são iguais e opostas e, como elas têm o mesmo ponto de aplicação, efetuarão pequenos deslocamentos iguais. Portanto, *seu trabalho total será nulo* e pode ser omitido de seus cálculos [Problema Resolvido 17.2].

(*continua*)

b. As forças exercidas por um cabo inextensível sobre dois corpos por ele conectados têm a mesma intensidade e seus pontos de aplicação percorrem distâncias iguais, mas o trabalho de uma força é positivo e o trabalho da outra é negativo. Portanto, *seu trabalho total é nulo,* podendo novamente ser omitido de seus cálculos [Problema Resolvido 17.1].

c. As forças exercidas por uma mola sobre os dois corpos por ela conectados também têm a mesma intensidade, mas seus pontos de aplicação, em geral, percorrerão distâncias diferentes. Portanto, *seu trabalho total normalmente não é nulo* e deve ser levado em conta em seus cálculos.

3. O princípio de conservação da energia pode ser expresso como

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

onde V representa a energia potencial do sistema. Esse princípio pode ser usado quando um corpo ou um sistema de corpos está sujeito a forças conservativas, tais como a força exercida por uma mola ou a força da gravidade [Problemas Resolvidos 17.4 e 17.5].

4. A última lição desta seção foi dedicada à potência, que é a taxa de variação temporal com que o trabalho é realizado. Para um corpo sujeito a um binário de momento $\mathbf{M}$, a potência pode ser expressa como

$$\text{Potência} = M\omega \tag{17.13}$$

onde ω é a velocidade angular do corpo expressa em rad/s. Como no Cap. 13, você deve expressar a potência em watts ou em cavalo-potência (1 hp = 746 W).

PROBLEMAS

17.1 Sabe-se que são necessárias 1.500 revoluções para um volante de 3.000 kg chegar ao repouso partindo de uma velocidade angular de 300 rpm. Sabendo que o raio de giração do volante é de 1 m, determine a intensidade média do binário devido ao atrito cinético nos mancais.

17.2 O rotor de um motor elétrico tem uma velocidade angular de 3.600 rpm quando a carga e a potência são cortadas. O rotor de 50 kg, com um raio de giração centroidal de 180 mm, chega então ao estado de repouso. Sabendo que o atrito cinético do rotor produz um binário de intensidade de 3,5 N · m, determine o número de revoluções que o rotor executa antes de chegar ao repouso.

17.3 Dois discos de mesmo material estão presos a um eixo como mostrado na figura. O disco *A* tem raio *r* e espessura *b*, enquanto o disco *B* tem raio *nr* e espessura 3*b*. Um binário **M** de intensidade constante é aplicado quando o sistema está em repouso e é removido após o sistema realizar duas revoluções. Determinar o valor de *n* que resulte na maior velocidade final para um ponto na aba do disco *B*.

Figura P17.3 e P17.4

17.4 Dois discos de mesmo material estão presos a um eixo como mostrado na figura. O disco *A* tem massa de 15 kg e um raio $r = 125$ mm. O disco *B* tem o triplo da espessura do disco *A*. Sabendo que um binário **M** de intensidade 20 N · m é aplicado ao disco *A* quando o sistema está em repouso, determine o raio *nr* do disco *B* para que a velocidade angular do sistema seja de 600 rpm após quatro revoluções.

17.5 O volante de uma máquina perfuratriz tem uma massa de 300 kg e um raio de giração de 600 mm. Cada operação de perfuração requer 2.500 J de trabalho. (*a*) Sabendo que a velocidade do volante é de 300 rpm logo antes de uma perfuração, determine a velocidade imediatamente após a perfuração. (*b*) Se um binário constante de 25 N · m é aplicado ao eixo do volante, determine o número de revoluções executadas antes da velocidade atingir novamente 300 rpm.

17.6 O volante de uma pequena máquina perfuratriz gira a 360 rpm. Cada operação de perfuração requer 2.250 N · m de trabalho, sendo desejável que a velocidade do volante após cada perfuração não seja menor que 95% da velocidade original. (*a*) Determine o momento de inércia requerido do volante. (*b*) Se um binário constante de 27 N · m é aplicado ao eixo do volante, determine o número de revoluções que devem ocorrer entre duas perfurações sucessivas, sabendo que a velocidade inicial precisa ser de 360 rpm no início de cada perfuração.

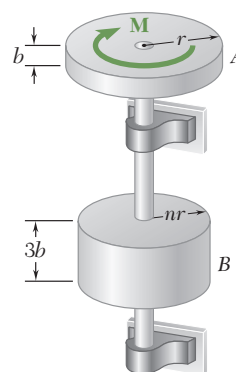
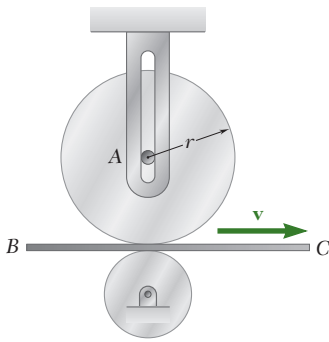
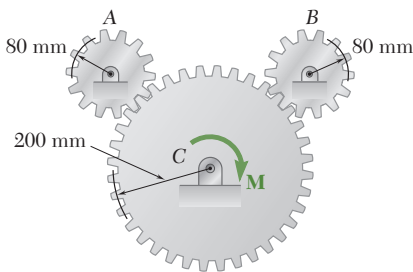
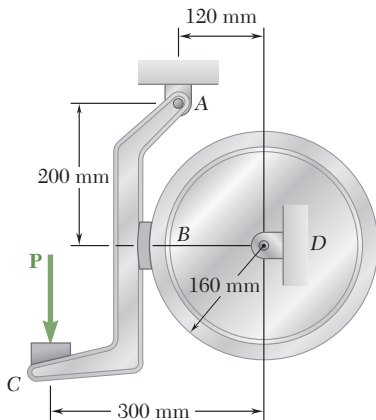



Figura P17.7 e P17.8

17.7 O disco A tem espessura constante e está em repouso quando posto em contato com a esteira BC, que se move com velocidade constante $\mathbf{v}$. Indicado por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a esteira, deduza uma expressão para o número de revoluções executadas pelo disco antes dele atingir uma velocidade angular constante.

17.8 O disco A de massa 5 kg e raio r = 150 mm está em repouso quando posto em contato com a esteira BC, que se move para a direita com velocidade constante v = 12 m/s. Sabendo que μ_k = 0,20 entre o disco e a esteira, determine o número de revoluções executadas pelo disco antes dele atingir uma velocidade angular constante.

Figura P17.9

17.9 Cada uma das engrenagens A e B tem uma massa de 2,4 kg e um raio de giração de 60 mm, enquanto a engrenagem C tem uma massa de 12 kg e um raio de giração de 150 mm. Um binário **M** de intensidade 10 N · m é aplicado à engrenagem C. Determine (*a*) o número de revoluções da engrenagem C necessárias para sua velocidade angular aumentar de 100 para 450 rpm, (*b*) a força tangencial correspondente que age sobre a engrenagem A.

17.10 Resolva o Problema 17.9, considerando que a binário 10 N · m é aplicado na engrenagem B.

17.11 A polia dupla mostrada na figura tem massa de 15 kg e um raio de giração centroidal de 160 mm. O cilindro A e o bloco B estão presos a cordas enroladas sobre as polias, conforme ilustrado na figura. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco B e a superfície é de 0,25. Sabendo que o sistema é liberado do repouso na posição mostrada, determine (*a*) a velocidade do cilindro A quando ele atinge o solo, (*b*) a distância total percorrida pelo bloco B antes de retornar ao estado de repouso.

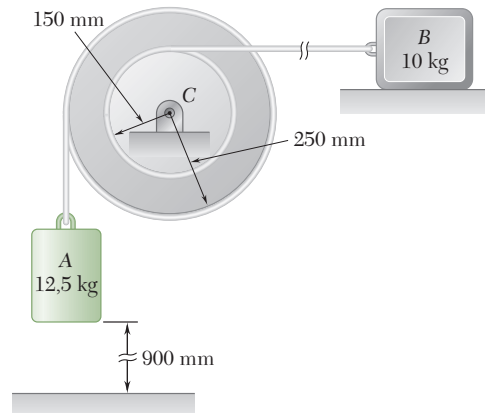



Figura P17.11

Figura P17.12

17.12 O tambor de freio de 160 mm de raio é preso a um volante maior que não está mostrado na figura. O momento de inércia de massa total do volante e do tambor é 20 kg · m² e o coeficiente de atrito cinético entre o tambor e a sapata do freio é 0,35. Sabendo que a velocidade angular inicial do volante é 360 rpm no sentido anti-horário, determine a força vertical **P** que precisa ser aplicada ao pedal C para fazer o sistema parar em 100 revoluções.

17.13 Resolva o Problema 17.12, considerando que a velocidade angular inicial do volante é 360 rpm no sentido horário.

17.14 O trem de engrenagens mostrado na figura consiste de quatro engrenagens de mesma espessura e do mesmo material: duas engrenagens têm raio r e as outras duas tem raio nr. O sistema está em repouso quando o binário $\mathbf{M}_0$ é aplicado no eixo C. Indicado por I_0 o momento de inércia de uma engrenagem de raio r, determine a velocidade angular do eixo A se o binário $\mathbf{M}_0$ é aplicado para uma revolução do eixo C.

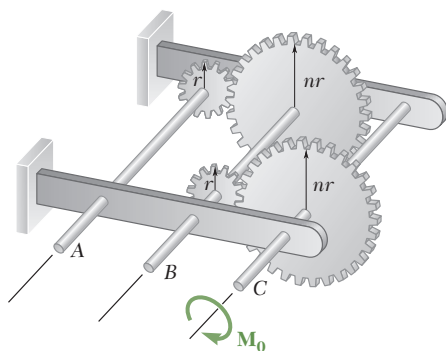



Figura P17.14

17.15 Os três discos de atrito mostrados na figura são feitos do mesmo material e tem a mesma espessura. Sabe-se que o disco A tem massa de 6 kg e que os raios dos discos são $r_A = 200$ mm, $r_B = 150$ mm e $r_C = 100$ mm. O sistema está em repouso quando um binário $\mathbf{M}_0$ de intensidade constante 7,5 N · m é aplicado no disco A. Considerando que não ocorre nenhum escorregamento entre os discos, determine o número de revoluções requerido para o disco A para alcançar a velocidade angular de 150 rpm.

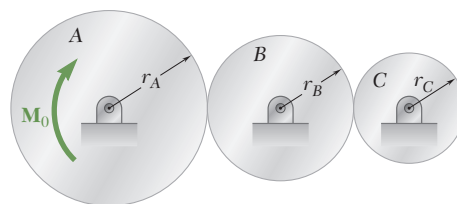



Figura P17.15

17.16 e 17.17 Uma barra delgada de 4 kg pode girar em um plano vertical em torno de um pivô em B. Uma mola de constante $k = 400$ N/m e comprimento indeformado de 150 mm é presa à barra como mostrado na figura. Sabendo que a barra é liberada do repouso na posição mostrada, determine sua velocidade angular após ela ter girado 90°.

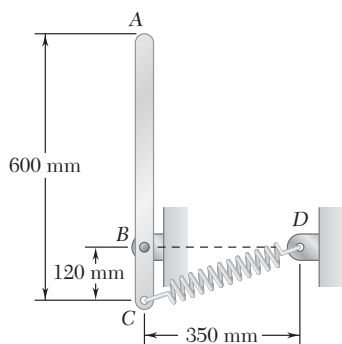



Figura P17.16

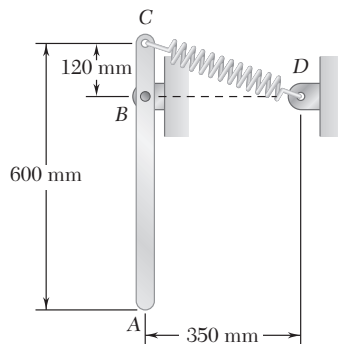



Figura P17.17

17.18 Uma barra delgada de comprimento l e peso W é pivotada em uma extremidade como mostra a figura. Ela é liberada do repouso na posição horizontal e oscila livremente. (a) Determine a velocidade angular da barra quando ela passa por meio da posição vertical e determine a reação correspondente no pivô. (b) Resolva a parte a para $W = 10$ N e $l = 1$ m.

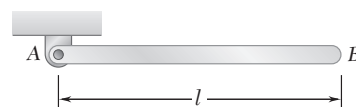



Figura P17.18

17.19 Uma barra delgada de comprimento l está pivotada no ponto C, localizado a uma distância b de seu centro G. Ela é liberada do repouso em uma posição horizontal e oscila livremente. Determine (*a*) a distância b para que a velocidade angular da barra seja máxima quando passar por uma posição vertical, (*b*) os valores correspondentes de sua velocidade angular e da reação em C.

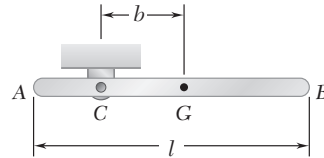



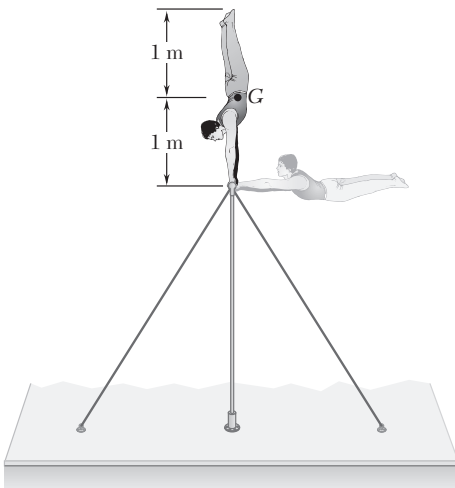
Figura P17.19

17.20 Um ginasta de 80 kg está executando uma série de giros completos em uma barra horizontal. Na posição mostrada na figura, ele tem velocidade angular pequena e desprezível e manterá seu corpo ereto e rígido à medida que girar para baixo. Admitindo que, durante o giro, o raio de giração centroidal de seu corpo seja de 0,4 m, determine a velocidade angular e a força exercida sobre suas mãos após ele ter girado (*a*) 90°, (*b*) 180°.

Figura P17.20

17.21 Duas barras delgadas idênticas AB e BC estão soldadas entre si, formando um conjunto em forma de L. O conjunto é pressionado contra uma mola em D e liberado a partir da posição mostrada na figura. Sabendo que o ângulo máximo de rotação do conjunto em seu movimento subsequente é de 90° no sentido anti-horário, determine a intensidade da velocidade angular do conjunto quando ele atingir a posição em que a barra AB forma um ângulo de 30° com a horizontal.

Figura P17.21

17.22 Um cursor com massa de 1 kg é rigidamente preso a uma distância $d = 300$ mm da extremidade de uma barra uniforme delgada AB. A barra tem uma massa de 3 kg e comprimento $L = 600$ mm. Sabendo que a barra é liberada do repouso na posição mostrada na figura, determine a velocidade angular da barra depois dela ter girado 90°.

17.23 Um cursor com massa de 1 kg é rigidamente preso a uma barra uniforme delgada AB de massa de 3 kg e tem comprimento $L = 600$ mm. A barra é liberada do repouso na posição mostrada na figura. Determine a distância d para que a velocidade angular da barra seja máxima depois dela ter girado 90°.

17.24 Um rolo cilíndrico uniforme de 20 kg, inicialmente em repouso, está sujeito a uma força de 90 N como mostrado na figura. Sabendo que o corpo rola sem deslizar, determine (*a*) a velocidade do seu centro G após ele ter se deslocado 1,5 m, (*b*) a força de atrito requerida para evitar o deslizamento.

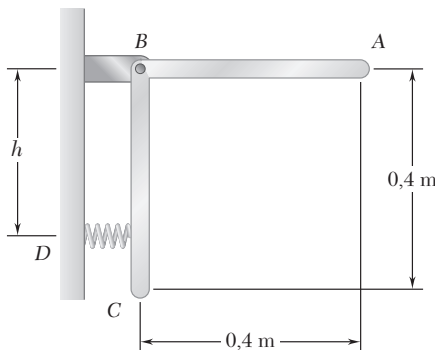
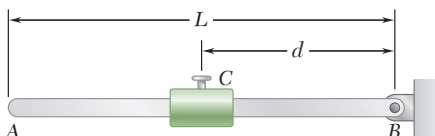



Figura P17.22 e P17.23

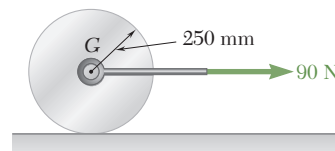



Figura P17.24

17.25 Uma corda é enrolada em torno de um cilindro de raio r e massa m como mostrado na figura. Sabendo que o cilindro é liberado do repouso, determine a velocidade do centro do cilindro após ele ter se deslocado para baixo a uma distância s.

17.26 Resolva o Problema 17.25 considerando que o cilindro é substituído por um tubo de parede fina de raio r e massa m.

Figura P17.25

17.27 O centro de massa G de uma roda de 3 kg de raio R = 180 mm é localizado a uma distância r = 60 mm do centro geométrico C. O raio de giração centroidal da roda é $\bar{k}$ = 90 mm. Como a roda rola sem deslizamento, observa-se que sua velocidade angular varia. Sabendo que ω = 8 rad/s na posição mostrada na figura, determine (a) a velocidade angular da roda quando o centro de massa G está diretamente acima do centro geométrico C, (b) a reação na superfície horizontal no mesmo instante.

Figura P17.27

17.28 Um cursor B, de massa m e dimensões desprezíveis, está preso à periferia de um aro de mesma massa m e de raio r que rola sem deslizar sobre uma superfície horizontal. Determine a velocidade angular ω_1 do aro em termos de g e r quando B estiver diretamente acima do centro A, sabendo que a velocidade angular do aro é $3\omega_1$ quando B está diretamente abaixo de A.

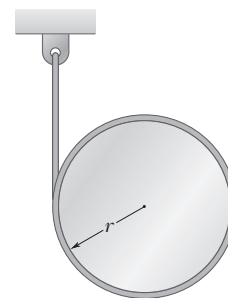



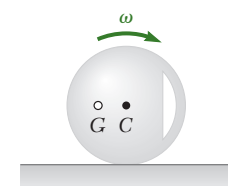
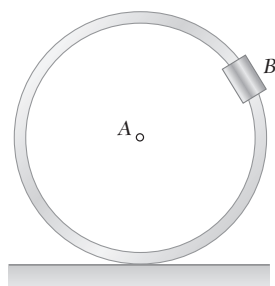
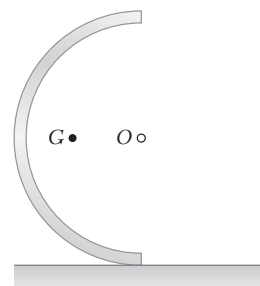
Figura P17.28

17.29 Um semicilindro de massa m e raio r é liberado do repouso na posição mostrada na figura. Sabendo que ele rola sem deslizar, determine (a) sua velocidade angular após ele ter rolado por 90°, (b) a reação na superfície horizontal no mesmo instante. [*Dica:* observe que $GO = 2r/\pi$ e que, pelo teorema dos eixos paralelos, $\bar{I} = mr^2 - m(GO)^2$].

Figura P17.29

17.30 Dois cilindros uniformes, cada um de massa m = 7 kg e raio r = 100 mm, estão conectados por uma esteira como mostrado na figura. Sabendo que a velocidade angular inicial do cilindro B é de 30 rad/s no sentido anti-horário, determine (a) a distância que o cilindro A subirá antes que a velocidade angular do cilindro B seja reduzida para 5 rad/s, (b) a tração na parte da esteira que liga os dois cilindros.

17.31 Dois cilindros uniformes, cada um de massa m = 7 kg e raio r = 100 mm, estão conectados por uma esteira como mostrado na figura. Se o sistema é liberado do repouso, determine (a) a velocidade do centro do cilindro A após ele ter movido por 1 m, (b) a tração na parte da esteira que liga os dois cilindros.

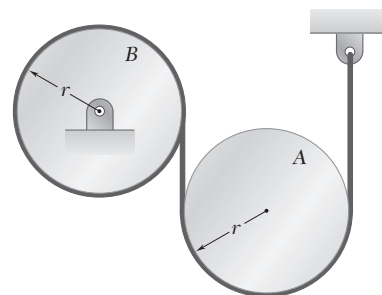



Figura P17.30 e *P17.31*

Figura *P17.32*

17.32 A barra BC de 5 kg é presa por pinos a dois discos uniformes como mostra a figura. A massa do disco de raio de 150 mm é 6 kg e que a massa do disco de raio de 75 mm é 1,5 kg. Sabendo que o sistema é liberado do repouso na posição mostrada, determine a velocidade da barra depois do disco A ter girado 90°.

17.33 a 17.35 O estrado de 9 kg está apoiado como mostrado na figura, por dois discos uniformes que rolam sem deslizar em todas as superfícies de contato. A massa de cada disco é $m = 6$ kg e o raio de cada disco é $r = 80$ mm. Sabendo que o sistema está inicialmente em repouso, determine a velocidade do estrado após ele ter se deslocado 250 mm.

Figura P17.33

Figura P17.34

Figura P17.35

17.36 O movimento da barra delgada uniforme AB de 10 kg é guiado por cursores de massa desprezível que deslizam livremente nas barras vertical e horizontal mostradas na figura. Sabendo que a barra é liberada do repouso quando $\theta = 30°$, determine a velocidade dos cursores A e B quando $\theta = 60°$.

17.37 O movimento da barra delgada uniforme AB de 10 kg é guiado por cursores de massa desprezível que deslizam livremente nas barras vertical e horizontal mostradas na figura. Sabendo que a barra é liberada do repouso quando $\theta = 20°$, determine a velocidade dos cursores A e B quando $\theta = 90°$.

Figura P17.36 e P17.37

17.38 As extremidades de uma barra AB de 4,5 kg são forçadas a se mover ao longo de ranhuras cortadas em um plano vertical, como mostrado na figura. Uma mola de constante $k = 600$ N/m está presa à extremidade A de tal maneira que sua extensão é nula quando $\theta = 0$, determine a velocidade angular da barra e a velocidade da extremidade B quando $\theta = 30°$.

17.39 As extremidades de uma barra AB de 4,5 kg são forçadas a se mover ao longo de ranhuras cortadas em um plano vertical, como mostrado na figura. Uma mola de constante $k = 600$ N/m está presa à extremidade A de tal maneira que sua extensão é nula quando $\theta = 0$. Se a barra é liberada do repouso quando $\theta = 50°$, determine a velocidade angular da barra e a velocidade da extremidade B quando $\theta = 0$.

Figura *P17.38* e P17.39

17.40 O movimento da barra uniforme AB é guiado por roletes de massa desprezível que rolam sobre a superfície mostrada na figura. Se a barra é liberada do repouso quando $\theta = 0$, determine as velocidades de A e B quando $\theta = 30°$.

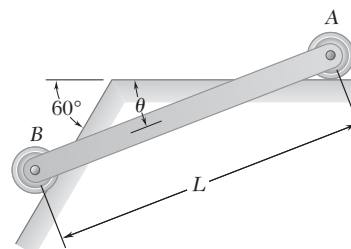



Figura P17.40

17.41 O movimento de uma barra delgada de comprimento R é guiado por pinos em A e B que deslizam livremente em ranhuras feitas em uma placa vertical como mostrado na figura. Se a extremidade B é movida ligeiramente para a esquerda e então liberada, determine a velocidade angular da barra e a velocidade de seu centro de massa (*a*) no instante em que a velocidade da extremidade é zero, (*b*) quando a extremidade B passa pelo ponto D.

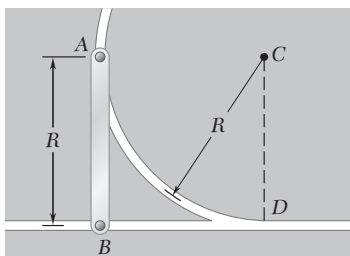



Figura *P17.41*

17.42 Duas barras uniformes, cada uma com massa m e comprimento L, estão conectadas para formar a articulação mostrada na figura. A extremidade D da barra BD pode deslizar livremente na ranhura horizontal, enquanto a extremidade A da barra AB está apoiada em um suporte pinado. Se a extremidade D é levemente deslocada para a esquerda e então liberada, determine sua velocidade (*a*) quando ela está diretamente abaixo de A, (*b*) quando a barra AB é vertical.

Figura P17.42

17.43 As barras uniformes AB e BC têm massas de 1,2 kg e 2 kg, respectivamente, e o rolete em C tem massa desprezível. Se o rolete é levemente deslocado para a direita e então liberado, determine a velocidade do pino B após a barra AB ter girado 90°.

17.44 As barras uniformes AB e BC têm massas de 1,2 kg e 2 kg, respectivamente, e o rolete em C tem massa desprezível. Sabendo que, na posição mostrada na figura, a velocidade do rolete C é de 2 m/s para a direita, determine a velocidade do pino B após a barra AB ter girado 90°.

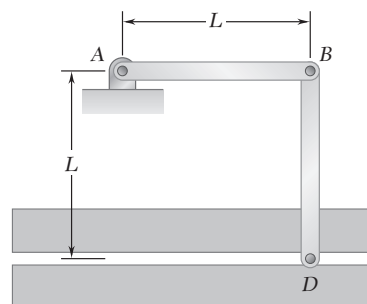
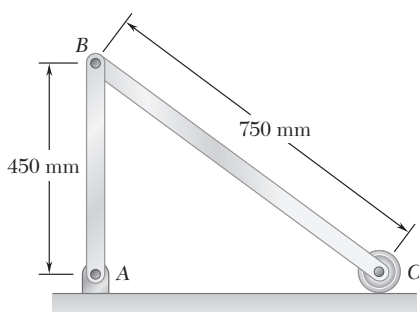



Figura *P17.43* e *P17.44*

17.45 A barra AB de 4 kg está presa a um cursor de peso desprezível em A e a um volante em B. O volante tem massa de 16 kg e raio de giração de 180 mm. Sabendo que, na posição mostrada na figura, a velocidade angular do volante é de 60 rpm no sentido horário, determine a velocidade do volante quando o ponto B está diretamente abaixo do C.

17.46 No Problema 17.45, se a velocidade angular do volante tiver de ser a mesma da posição mostrada na figura, e quando o ponto B estiver diretamente acima de C, determine o valor requerido de sua velocidade angular na posição mostrada na figura.

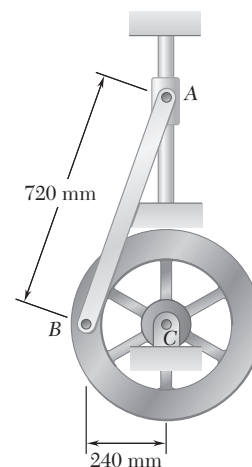



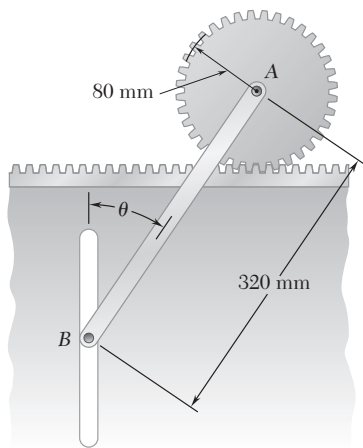
Figura P17.45 e P17.46

17.47 A engrenagem de raio 80 mm mostrada na figura tem uma massa de 5 kg e um raio de giração centroidal de 60 mm. A barra AB de 4 kg é presa ao centro da engrenagem e ao pino em B que desliza livremente na ranhura vertical. Sabendo que o sistema é liberado do repouso quando $\theta = 60°$, determine a velocidade do centro da engrenagem quando $\theta = 20°$.

Figura P17.47

17.48 O motor mostrado na figura gira a uma frequência de 22.5 Hz e movimenta uma máquina presa ao eixo em B. Sabendo que o motor desenvolve 3 kW, determine a intensidade do binário exercido (a) pelo motor na polia A, (b) pelo eixo na polia B.

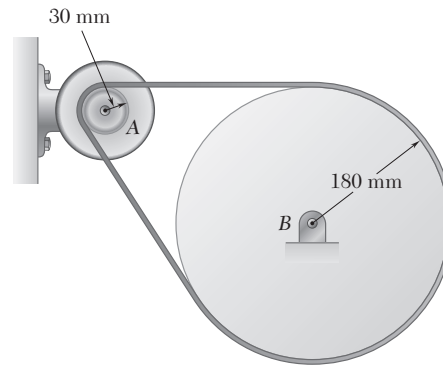



Figura P17.48

17.49 Sabendo que o binário máximo admissível que pode ser aplicado ao eixo é de 2.000 N · m, determine a potência máxima (em kW) que pode ser transmitida pelo eixo em (a) 180 rpm, (b) 480 rpm.

17.50 Três eixos e quatro engrenagens são usados para formar um trem de engrenagens que transmitirá 7,5 kW de um motor em A para uma máquina ferramenta em F. (Os mancais dos eixos foram omitidos do esboço.) Sabendo que a frequência do motor é 30 Hz, determine a intensidade do binário que é aplicado ao eixo (a) AB, (b) CD, (c) EF.

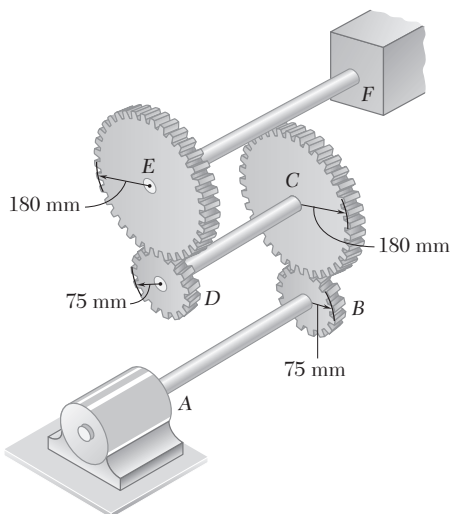



Figura P17.50

17.51 O dispositivo eixo-disco-esteira mostrado na figura é usado para transmitir 2,4 kW do ponto A ao ponto D. Sabendo que os binários máximos admissíveis que podem ser aplicados aos eixos AB e CD são de 25 N · m e 80 N · m, respectivamente, determine a velocidade mínima requerida do eixo AB.

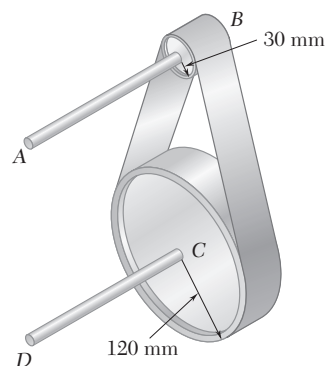



Figura P17.51

17.8 Princípio de impulso e quantidade de movimento para o movimento plano de um corpo rígido

O princípio de impulso e quantidade de movimento será agora aplicado à análise do movimento plano de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos. Como salientado no Cap. 13, o método de impulso e quantidade de movimento adapta-se particularmente bem à resolução de problemas que envolvem tempo e velocidades. Além disso, o princípio de impulso e quantidade de movimento fornece o único método praticável para a solução de problemas envolvendo o movimento impulsivo ou o impacto (Seções 17.11 e 17.12).

Considerando outra vez um corpo rígido como sendo constituído de diversas partículas P_i, relembremos a partir da Seção 14.9 que o sistema formado pelas quantidades de movimento das partículas no tempo t_1 e o sistema de impulsos das forças externas aplicadas de t_1 até t_2 são, em conjunto, equipolentes ao sistema formado pelas quantidades de movimento das partículas no tempo t_2. Uma vez que os vetores associados a um corpo rígido podem ser considerados como vetores deslizantes (Seção 3.19), segue-se que o sistema de vetores mostrados na Fig. 17.6 são não apenas

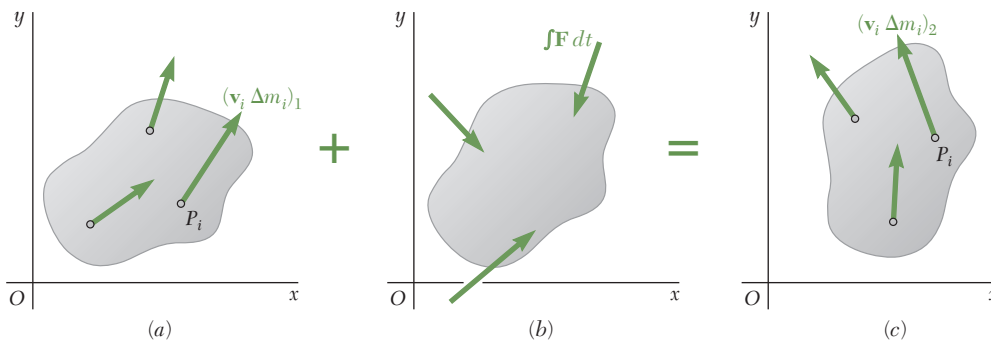



Figura 17.6

equipolentes mas, de fato, *equivalentes*, no sentido de que os vetores do lado esquerdo do sinal de igualdade podem ser transformados nos vetores do lado direito pelo uso das operações fundamentais listadas na Seção 3.13. Portanto, escrevemos

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \tag{17.14}$$

Mas as quantidades de movimento $\mathbf{v}_i\,\Delta m_i$ das partículas podem ser reduzidas a um vetor ligado a G, igual à sua soma

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\,\Delta m_i$$

e a um binário de momento igual à soma de seus momentos em relação a G

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i\,\Delta m_i$$

Recordemos da Seção 14.3 que $\mathbf{L}$ e $\mathbf{H}_G$ definem, respectivamente, a quantidade de movimento linear e a quantidade de movimento angular em relação a G do sistema de partículas constituintes do corpo rígido. Observe-

Foto 17.2 Um teste de impacto Charpy é usado para determinar a quantidade de energia absorvida pelo material durante o impacto pela diferença entre a energia potencial gravitacional final do braço e sua energia potencial gravitacional inicial.

mos também, pela Eq. (14.14), que $\mathbf{L} = m\overline{\mathbf{v}}$. Por outro lado, restringindo a presente análise ao movimento plano de uma placa rígida ou de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência, relembramos pela Eq. (16.4) que $\mathbf{H}_G = \overline{I}\boldsymbol{\omega}$. Logo, concluímos que o sistema de quantidades de movimento $\mathbf{v}_i\,\Delta m_i$ é equivalente ao *vetor quantidade de movimento linear* $m\overline{\mathbf{v}}$ ligado a G e ao *binário quantidade de movimento angular* $\overline{I}\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 17.7). Observando que o sistema de quantidades de movimento se reduz ao vetor $m\overline{\mathbf{v}}$ no caso particular de uma translação ($\boldsymbol{\omega} = 0$) e ao binário $\overline{I}\boldsymbol{\omega}$ no caso particular de uma rotação centroidal ($\overline{\mathbf{v}} = 0$), verificamos uma vez mais que o movimento plano de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência pode ser decomposto em uma translação com o centro de massa G e em uma rotação em torno de G.

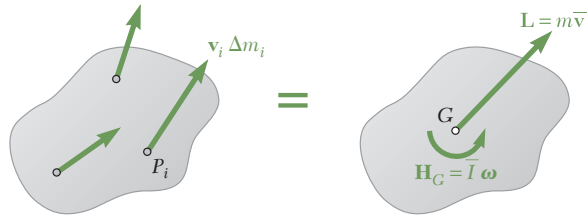



Figura 17.7

Substituindo o sistema de quantidades de movimento das partes *a* e *c* da Fig. 17.6 pelos equivalentes vetor quantidade de movimento linear e binário quantidade de movimento angular, obtemos os três diagramas mostrados na Fig. 17.8. Essa figura expressa, sob a forma de uma equação baseada no diagrama de corpo livre, a relação fundamental (17.14) no caso do movimento plano de uma placa rígida ou de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência.

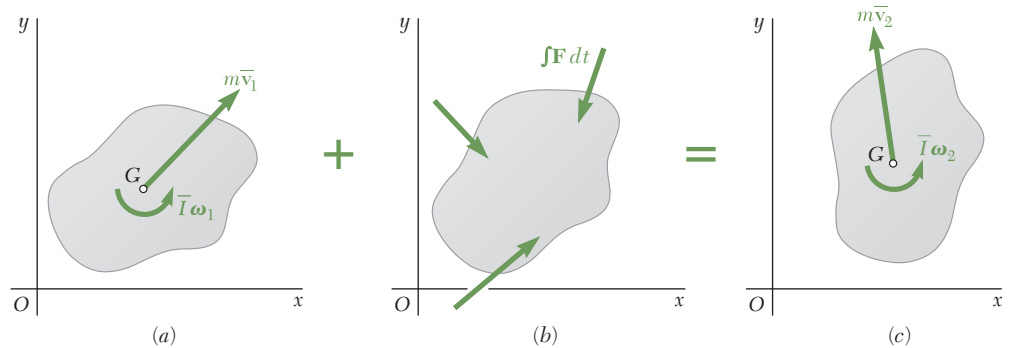



Figura 17.8

Três equações de movimento podem ser deduzidas da Fig. 17.8. Duas delas podem ser obtidas somando-se e igualando os *componentes em x* e *em y* das quantidades de movimento e impulsos, e a terceira equação é obtida somando-se e igualando os *momentos* desses vetores *em torno de um dado ponto qualquer.* Os eixos de coordenadas podem ser escolhidos como sendo fixos no espaço ou deslocando-se com o centro do massa do corpo, embora mantendo uma orientação fixa. Em qualquer dos casos, o ponto em torno do qual os momentos são efetuados deve manter a mesma posição relativamente aos eixos de coordenadas durante o intervalo de tempo considerado.

Ao deduzir as três equações de movimento para um corpo rígido, deve-se tomar cuidado para não adicionar quantidades de movimento lineares e angulares indiscriminadamente. Pode-se evitar confusões relembrando que $m\bar{v}_x$ e $m\bar{v}_y$ representam os *componentes de um vetor*, a saber, o vetor quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$, ao passo que $\bar{I}\omega$ representa a *intensidade de um binário*, isto é, o binário quantidade de movimento angular $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Logo, a grandeza $\bar{I}\omega$ deve ser adicionada somente ao *momento* da quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$, e jamais a esse próprio vetor nem a seus componentes. Todas as grandezas envolvidas serão, então, expressas na mesma unidade, a saber, N · m · s.

Rotação não centroidal. Nesse caso particular de movimento, a intensidade da velocidade do centro de massa do corpo é $\bar{v} = \bar{r}\omega$, onde $\bar{r}$ representa a distância do centro de massa ao eixo fixo de rotação e $\boldsymbol{\omega}$ representa a velocidade angular do corpo no instante considerado; a intensidade do vetor quantidade de movimento ligado a G é, então, $m\bar{v} = m\bar{r}\omega$. Somando os momentos em relação a O do vetor quantidade de movimento e do binário quantidade de movimento angular (Fig. 17.9) e

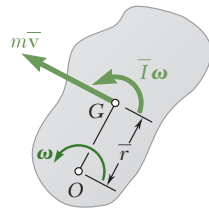



Figura 17.9

usando o teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia, verificamos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação a O tem a intensidade*

$$\bar{I}\omega + (m\bar{r}\omega)\bar{r} = (\bar{I} + m\bar{r}^2)\omega = I_O\omega \qquad (17.15)$$

Igualando os momentos em relação a O das quantidades de movimento e impulsos em (17.14), escrevemos

$$I_O\omega_1 + \sum \int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\omega_2 \qquad (17.16)$$

No caso geral do movimento plano de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência, a Eq. (17.16) pode ser usada em relação ao eixo instantâneo de rotação, sob certas condições. Todavia, é recomendável que todos os problemas de movimento plano sejam resolvidos pelo método geral descrito anteriormente nesta seção.

17.9 Sistemas de corpos rígidos

O movimento de sistemas de corpos rígidos pode ser analisado pela aplicação do princípio de impulso e quantidade de movimento a cada corpo em

* Observe que a soma $\mathbf{H}_A$ dos momentos em relação a um ponto arbitrário A das quantidades de movimento das partículas de uma placa rígida *não é*, em geral, igual a $I_A\boldsymbol{\omega}$ (ver Problema 17.67).

separado (Problema Resolvido 17.6). Entretanto, ao resolver problemas envolvendo não mais que três incógnitas (incluindo os impulsos de reações desconhecidas), é muitas vezes conveniente aplicar o princípio de impulso e quantidade de movimento ao sistema como um todo. Os diagramas de quantidade de movimento e impulso são desenhados para todo o sistema de corpos. Para cada parte móvel do sistema, os diagramas das quantidades de movimento devem incluir um vetor de quantidade de movimento, um binário de quantidade de movimento angular, ou ambos. Impulsos de forças internas ao sistema podem ser omitidos do diagrama de impulso, pois eles ocorrem em pares de vetores iguais e opostos. Somando e equacionando sucessivamente os componentes em x, os componentes em y e os momentos de todos os vetores envolvidos, obtêm-se três relações que expressam que as quantidades de movimento no tempo t_1 e os impulsos das forças externas formam um sistema equipolente ao sistema de quantidades de movimento no tempo t_2.* Novamente, deve-se tomar cuidado para não adicionar quantidades de movimento lineares e angulares indiscriminadamente; cada equação deve ser verificada para se ter certeza do emprego de unidades consistentes. Essa abordagem é usada no Problema Resolvido 17.8 e, ainda, nos Problemas Resolvidos 17.9 e 17.10.

Foto 17.3 Uma patinadora artística no início e no final de uma rotação. Usando o princípio de conservação da quantidade de movimento angular, você verificará que a velocidade angular da patinadora é muito maior no final da rotação.

17.10 Conservação da quantidade de movimento angular

Quando não há forças externas agindo sobre um corpo rígido ou sistema de corpos rígidos, os impulsos das forças externas são nulos, e o sistema de quantidades de movimento no tempo t_1 é equipolente ao sistema de quantidades de movimento no tempo t_2. Somando e igualando sucessivamente os componentes em x, os componentes em y e os momentos das quantidades de movimento nos tempos t_1 e t_2, concluímos que a quantidade de movimento linear total do sistema conserva-se em qualquer direção e que sua quantidade de movimento angular total conserva-se em relação a qualquer ponto.

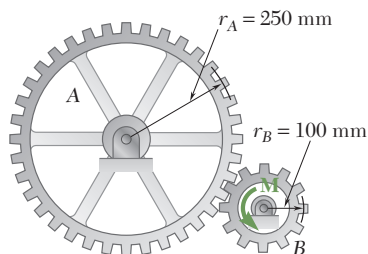
Entretanto, há muitas aplicações de engenharia em que *a quantidade de movimento linear não se conserva,* embora *a quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_O$ do sistema em relação a um dado ponto O *seja conservada,* isto é, em que

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{17.17}$$

Tais casos ocorrem quando as linhas de ação de todas as forças externas passam por O ou, de modo mais geral, quando a soma dos impulsos angulares das forças externas em torno de O é nula.

Problemas envolvendo a *conservação da quantidade de movimento angular* em relação a um ponto O podem ser resolvidos pelo método geral de impulso e quantidade de movimento, ou seja, desenhando diagramas de quantidade de movimento e de impulso como descrita nas Seções 17.8 e 17.9. Assim, a Eq. (17.17) é obtida somando-se e igualando momentos em relação a O (Problema Resolvido 17.8). Como você verá adiante, no Problema Resolvido 17.9, duas equações adicionais podem ser escritas, somando-se e igualando os componentes em x e em y, e essas equações podem ser usadas para determinar dois impulsos lineares desconhecidos, tais como os impulsos dos componentes da reação em um ponto fixo.

---

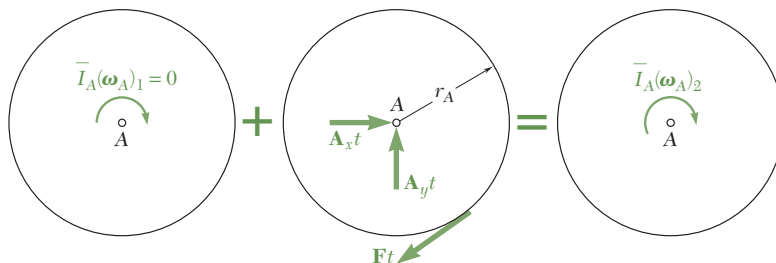
* Observe que, como na Seção 16.7, não podemos falar de sistemas *equivalentes*, pois não estamos tratando de um único corpo rígido.

PROBLEMA RESOLVIDO 17.6

A engrenagem A tem massa de 10 kg e raio de giração de 200 mm e a engrenagem B tem massa de 3 kg e raio de giração de 80 mm. O sistema está em repouso quando um binário **M** de intensidade de 6 N · m é aplicado à engrenagem B. (Essas engrenagens foram consideradas no Problema Resolvido 17.2.) Desprezando o atrito, determine (a) o tempo requerido para a velocidade angular da engrenagem B atingir 600 rpm e (b) a força tangencial exercida pela engrenagem B sobre a engrenagem A.

SOLUÇÃO

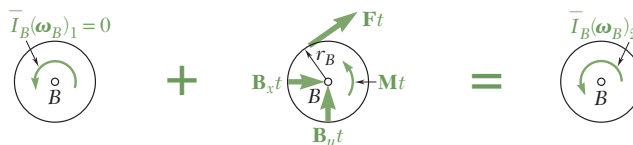
Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento a cada engrenagem separadamente. Como todas as forças e o binário são constantes, seus impulsos são obtidos multiplicando-os pelo tempo desconhecido t. Relembremos do Problema Resolvido 17.2 onde os momentos de inércia centroidais e as velocidades angulares finais são

$$\bar{I}_A = 0{,}400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \bar{I}_B = 0{,}0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$(\omega_A)_2 = 25{,}1 \text{ rad/s} \qquad (\omega_B)_2 = 62{,}8 \text{ rad/s}$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento para a engrenagem *A*. Os sistemas de quantidades de movimento iniciais, impulsos e quantidades de movimento finais estão mostrados em três esboços separados.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + Sist. de Imp. Ext.$_{1\to2}$ =
= Sist. de Quant. de Mov.$_2$

+↰ sobre o momento A: $\qquad 0 - Ftr_A = -\bar{I}_A(\omega_A)_2$

$$Ft(0{,}250 \text{ m}) = (0{,}400 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(25{,}1 \text{ rad/s})$$
$$Ft = 40{,}2 \text{ N} \cdot \text{s}$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento para a engrenagem *B*.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + Sist. de Imp. Ext.$_{1\to2}$ =
= Sist. de Quant. de Mov.$_2$

+↰ sobre o momento B: $\qquad 0 + Mt - Ftr_B = -\bar{I}_B(\omega_B)_2$

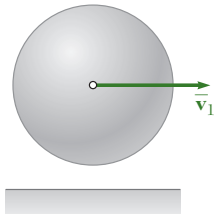
$$+(6 \text{ N} \cdot \text{m})t - (40{,}2 \text{ N} \cdot \text{s})(0{,}100 \text{ m}) = (0{,}0192 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)(62{,}8 \text{ rad/s})$$

$t = 0{,}871$ s ◀

Relembrando que $Ft = 40{,}2$ N · s, escrevemos

$$F(0{,}871 \text{ s}) = 40{,}2 \text{ N} \cdot \text{s} \qquad F = +46{,}2 \text{ N}$$

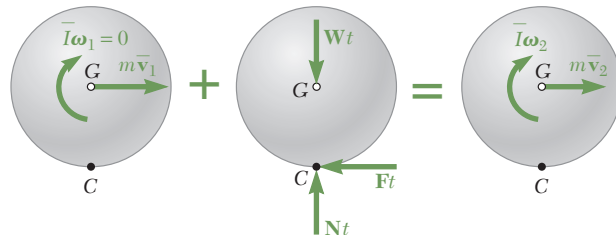
Logo, a força exercida pela engrenagem B sobre a engrenagem A é

$\mathbf{F} = 46{,}2$ N ↙ ◀

PROBLEMA RESOLVIDO 17.7

Uma esfera uniforme de massa m e raio r é lançada ao longo de uma superfície horizontal rugosa com uma velocidade linear $\overline{\mathbf{v}}_1$ e sem velocidade angular. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e a superfície, determine (a) o tempo t_2 em que a esfera começará a rolar sem deslizar e (b) as velocidades linear e angular da esfera no tempo t_2.

SOLUÇÃO

Enquanto a esfera está deslizando em relação à superfície, ela está sujeita à força normal **N**, à força de atrito **F** e a seu peso **W** de intensidade $W = mg$.

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento à esfera desde o tempo $t_1 = 0$, quando ela é posta sobre a superfície, até o tempo $t_2 = t$, quando ela começa a rolar sem deslizar.

**Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + Sist. de Imp. Ext.$_{1\to 2}$ =
= Sist. de Quant. de Mov.$_2$**

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad Nt - Wt = 0 \quad$ (1)

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad m\overline{v}_1 - Ft = m\overline{v}_2 \quad$ (2)

$+\circlearrowright$ sobre o momento G: $\quad Ftr = \overline{I}\omega_2 \quad$ (3)

De (1), obtemos $N = W = mg$. Durante todo o intervalo de tempo considerado, ocorre deslizamento no ponto C e temos $F = \mu_k N = \mu_k mg$. Substituindo CS no lugar de F em (2), escrevemos

$$m\overline{v}_1 - \mu_k mgt = m\overline{v}_2 \qquad \overline{v}_2 = \overline{v}_1 - \mu_k gt \tag{4}$$

Substituindo $F = \mu_k mg$ e $\overline{I} = \frac{2}{5}mr^2$ em (3),

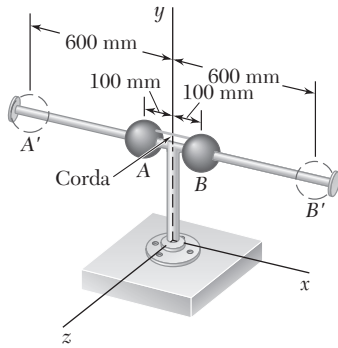
$$\mu_k mgtr = \tfrac{2}{5}mr^2\omega_2 \qquad \omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t \tag{5}$$

A esfera começará a rolar sem deslizar quando a velocidade $\mathbf{v}_C$ do ponto de contato for nula. Nesse instante, o ponto C torna-se o centro instantâneo de rotação e temos $\overline{v}_2 = r\omega_2$. Com essa consideração em (4) e (5), escrevemos

$$\overline{v}_2 = r\omega_2 \qquad \overline{v}_1 - \mu_k gt = r\left(\frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}t\right) \qquad t = \frac{2}{7}\frac{\overline{v}_1}{\mu_k g} \quad \blacktriangleleft$$

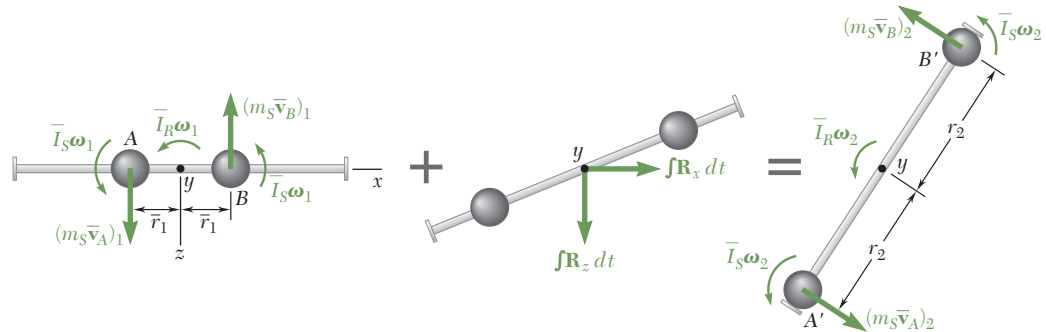
Substituindo essa expressão para t em (5),

$$\omega_2 = \frac{5}{2}\frac{\mu_k g}{r}\left(\frac{2}{7}\frac{\overline{v}_1}{\mu_k g}\right) \qquad \omega_2 = \frac{5}{7}\frac{\overline{v}_1}{r} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \frac{5}{7}\frac{\overline{v}_1}{r}\circlearrowright \quad \blacktriangleleft$$

$$\overline{v}_2 = r\omega_2 \qquad \overline{v}_2 = r\left(\frac{5}{7}\frac{\overline{v}_1}{r}\right) \qquad \overline{\mathbf{v}}_2 = \tfrac{5}{7}\overline{v}_1 \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 17.8

Duas esferas sólidas de raio de 100 mm, pesando 1 kg cada, estão montadas em A e B sobre a barra horizontal $A'B'$, que gira livremente em torno da vertical com uma velocidade angular de 6 rad/s no sentido anti-horário. As esferas são mantidas no lugar por uma corda que é subitamente cortada. Sabendo que o momento de inércia centroidal da barra e do pivô é $\bar{I}_R = 0{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, determine (*a*) a velocidade angular da barra após as esferas terem se movido para as posições A' e B' e (*b*) a energia perdida devido ao impacto plástico das esferas e dos anteparos em A' e B'.

SOLUÇÃO

a. Princípio de impulso e quantidade de movimento. Para determinar a velocidade angular final da barra, expressaremos que as quantidades de movimento inicial das várias partes do sistema e os impulsos das forças externas são, em conjunto, equipolentes às quantidades de movimento finais do sistema.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + Sist. de Imp. Ext.$_{1\to 2}$ =
= Sist. de Quant. de Mov.$_2$

Observando que as forças externas consistem dos pesos e da reação no pivô, que não produzem momento em torno do eixo y, e notando que $\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{r}\omega$, igualamos os momentos em torno do eixo y:

$$2(m_S\bar{r}_1\omega_1)\bar{r}_1 + 2\bar{I}_S\omega_1 + \bar{I}_R\omega_1 = 2(m_S\bar{r}_2\omega_2)\bar{r}_2 + 2\bar{I}_S\omega_2 + \bar{I}_R\omega_2$$

$$(2m_S\bar{r}_1^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_1 = (2m_S\bar{r}_2^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega_2 \qquad (1)$$

expressando que *a quantidade de movimento angular do sistema em relação ao eixo y conserva-se*. Calculamos agora

$$\bar{I}_S = \tfrac{2}{5}m_S a^2 = \tfrac{2}{5}(1 \text{ kg})(0{,}1 \text{ m})^2 = 0{,}004 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$m_S\bar{r}_1^2 = (1 \text{ kg})(0{,}1 \text{ m})^2 = 0{,}01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad m_S\bar{r}_2^2 = (1 \text{ kg})(0{,}6 \text{ m})^2 = 0{,}36 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Substituindo esses valores e $\bar{I}_R = 0{,}4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ e $\omega_1 = 6$ rad/s em (1):

$$0{,}428(6 \text{ rad/s}) = 1{,}128\omega_2 \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = 2{,}28 \text{ rad/s} \circlearrowleft \quad ◀$$

b. Energia perdida. A energia cinética do sistema em um instante qualquer é

$$T = 2(\tfrac{1}{2}m_S\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}_S\omega^2) + \tfrac{1}{2}\bar{I}_R\omega^2 = \tfrac{1}{2}(2m_S\bar{r}^2 + 2\bar{I}_S + \bar{I}_R)\omega^2$$

Trazendo os valores numéricos encontrados anteriormente, temos

$$T_1 = \tfrac{1}{2}(0{,}428)(6)^2 = 7{,}704 \text{ J} \qquad T_2 = \tfrac{1}{2}(1{,}128)\,(2{,}28)^2 = 2{,}932 \text{ J}$$

$$\text{Energia perdida} = T_1 = T_2 = 7{,}704 - 2{,}932 \qquad = 4{,}77 \text{ J} \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção você aprendeu a usar o método de impulso e quantidade de movimento para resolver problemas envolvendo o movimento plano de corpos rígidos. Como você verificou no Cap. 13, esse método é bastante eficaz quando usado na resolução de problemas que envolvem velocidade e tempo.

1. O princípio de impulso e quantidade de movimento para o movimento plano de um corpo rígido é expresso pela seguinte equação vetorial:

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \qquad (17.14)$$

onde **Sist. de Quant. de Mov.** representa o sistema de quantidades de movimento das partículas constituintes do corpo rígido e **Sist. de Imp. Ext.** representa o sistema de todos os impulsos externos exercidos durante o movimento.

a. O sistema de quantidades de movimento de um corpo rígido é equivalente a um vetor quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$ ligado ao centro de massa do corpo e a um binário quantidade de movimento angular $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 17.7).

b. Você deve definir uma equação baseada no desenho do diagrama de corpo livre para o corpo rígido para expressar graficamente a equação vetorial anterior. Sua equação de diagrama consistirá de três esboços do corpo, representando, respectivamente, as quantidades de movimento iniciais, os impulsos das forças externas e as quantidades de movimento finais. Ela mostrará que o sistema de quantidades de movimento iniciais e o sistema de impulsos das forças externas são, em conjunto, equivalentes ao sistema de quantidades de movimento finais (Fig. 17.8).

c. Usando a equação baseada no diagrama de corpo livre, você pode somar componentes em qualquer direção e somar momentos em relação a qualquer ponto. Ao somar momentos em relação a um ponto, lembre-se de incluir a *quantidade de movimento angular* $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ do corpo, bem como os *momentos* dos componentes de sua *quantidade de movimento linear.* Em muitos casos, você estará apto a selecionar e resolver uma equação que envolva apenas uma incógnita. Isso foi feito em todos os Problemas Resolvidos desta seção.

2. Em problemas envolvendo um sistema de corpos rígidos, você pode aplicar o princípio de impulso e quantidade de movimento ao sistema como um todo. Uma vez que as forças externas ocorrem em pares de forças iguais e opostas, elas não farão parte de sua resolução [Problema Resolvido 17.8.].

3. A conservação da quantidade de movimento angular em relação a um eixo dado ocorre quando, para um sistema de corpos rígidos, *a soma dos momentos dos impulsos externos em relação àquele eixo é nula.* De fato, você pode observar facilmente na equação baseada no diagrama de corpo livre que as quantidades de movimento angulares inicial e final do sistema em relação àquele eixo são iguais e, portanto, que *a quantidade de movimento angular do sistema em relação ao eixo dado conserva-se.* Logo, você pode somar as quantidades de movimento angulares dos diversos corpos do sistema e os momentos de suas quantidades de movimento lineares em relação àquele eixo para obter uma equação que pode ser resolvida para uma incógnita [Problema Resolvido 17.8].

PROBLEMAS

17.52 O rotor de um motor elétrico tem massa de 25 kg e raio de giração de 180 mm. Observa-se que são necessários 4,2 min para o rotor chegar ao repouso a partir de uma velocidade angular de 3.600 rpm após ser desligado. Determine a intensidade média do binário devido ao atrito cinético nos mancais do rotor.

17.53 Um volante de 2.000 kg com raio de giração de 700 mm é deixado livre a partir de uma velocidade angular de 450 rpm. Sabendo que o atrito cinético produz um binário de intensidade de 16 N · m, determine o tempo necessário para o volante chegar ao repouso.

17.54 Dois discos de mesma espessura e mesmo material são presos a um eixo como mostrado na figura. O disco *A* de 4 kg tem um raio $r_A = 100$ mm e o disco *B* tem um raio $r_B = 150$ mm. Sabendo que o binário **M** de intensidade 2,5 N · m é aplicado ao disco *A* quando o sistema está em repouso, determine o tempo requerido para a velocidade angular do sistema alcançar 960 rpm.

17.55 Dois discos de mesma espessura e mesmo material são presos a um eixo como mostrado na figura. O disco *A* de 3 kg tem um raio $r_A = 100$ mm e o disco *B* tem um raio $r_B = 125$ mm. Sabendo que a velocidade angular do sistema deve ser aumentada de 200 rpm para 800 rpm durante o intervalo de 3 s, determine a intensidade do binário **M** que deve ser aplicado ao disco *A*.

Figura P17.54 e *P17.55*

17.56 Um cilindro de raio *r* e peso *W* com velocidade angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0$ no sentido anti-horário é colocado no canto formado pelo piso e por uma parede vertical. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o cilindro, a parede e o piso, deduza uma expressão para o tempo necessário de o cilindro chegar ao estado de repouso.

17.57 Um cilindro de 3 kg de raio $r = 125$ mm com uma velocidade angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0 = 90$ rad/s no sentido anti-horário é colocado no canto formado pelo piso e por uma parede vertical. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético é 0,10 entre o cilindro, a parede e o piso, deduza uma expressão para o tempo necessário de o cilindro chegar ao estado de repouso.

Figura *P17.56* e P17.57

17.58 Um disco de espessura uniforme, inicialmente em estado de repouso, é posto em contato com uma esteira que se move com velocidade constante **v**. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a esteira, deduza uma expressão para o tempo necessário de o disco atingir uma velocidade angular constante.

17.59 O disco *A*, de massa de 2,5 kg e raio $r = 100$ mm, está em estado de repouso quando é posto em contato com uma esteira que se move à velocidade constante de $v = 15$ m/s. Sabendo que $\mu_k = 0{,}20$ entre o disco e a esteira, determine o tempo necessário para o disco atingir uma velocidade angular constante.

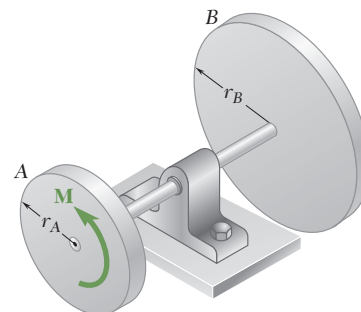
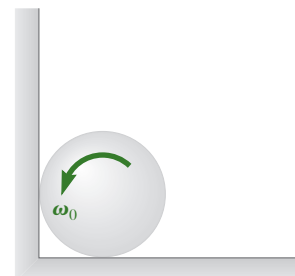
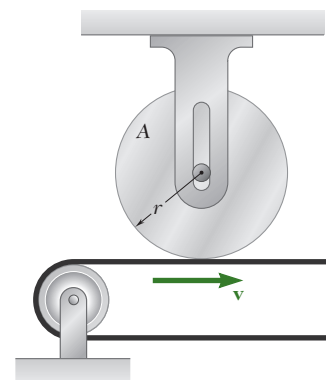



Figura *P17.58* e P17.59

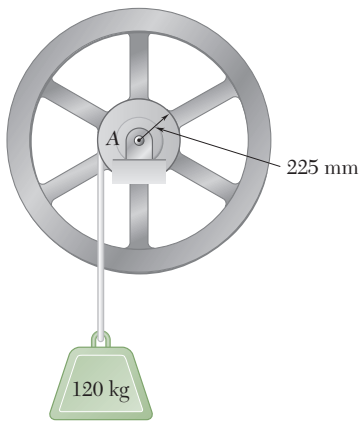



Figura P17.60

17.60 O volante de 350 kg de um pequeno guincho tem um raio de giração de 600 mm. Se o motor é desligado quando a velocidade angular do volante é de 100 rpm no sentido horário, determine o tempo necessário para o sistema chegar ao estado de repouso.

17.61 No Problema 17.60, determine o tempo necessário para a velocidade do volante ser reduzida a 40 rpm no sentido horário.

17.62 Uma fita move-se sobre dois tambores mostrados na figura. O tambor A tem massa de 0,6 kg e raio de giração de 20 mm, enquanto o tambor B tem massa de 1,75 kg e raio de giração de 30 mm. Na porção inferior da fita, a tensão é constante e igual a $T_A = 4$ N. Sabendo que a fita está inicialmente em repouso, determine (*a*) a tensão constante requerida T_B se a velocidade da fita deve ser $v = 3$ m/s após 0,24 s, (*b*) a tensão correspondente na porção da fita entre os tambores.

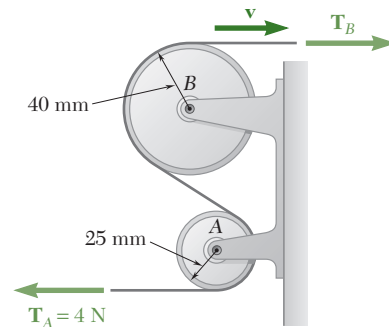



Figura P17.62

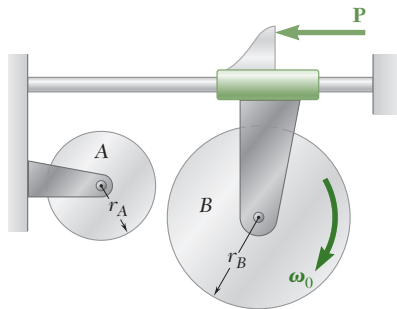



Figura P17.63 e P17.64

17.63 O disco B tem velocidade angular inicial $\boldsymbol{\omega}_0$ quando é posto em contato com o disco A, que está em repouso. Mostre que a velocidade angular final do disco B depende apenas de $\boldsymbol{\omega}_0$ e da razão das massas m_A e m_B dos dois discos.

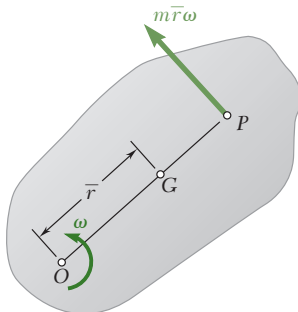
17.64 O disco A de 4 kg tem raio $r_A = 150$ mm e está inicialmente em repouso. O disco B de 5 kg tem raio $r_B = 200$ mm e velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0$ de 900 rpm quando é posto em contato com o disco A. Desprezando o atrito nos mancais, determine (*a*) a velocidade angular final de cada disco, (*b*) o impulso total da força de atrito exercida sobre o disco A.

17.65 Mostre que o sistema de quantidades de movimento de uma placa rígida em movimento plano reduz-se a um vetor único e expresse a distância do centro de massa G à linha de ação desse vetor em termos do raio centroidal de giração $\bar{k}$ da placa, da intensidade v da velocidade de G e da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

Figura P17.66

17.66 Mostre que, quando uma placa rígida gira em torno de um eixo fixo passando por O perpendicular à placa, o sistema de quantidades de movimento de suas partículas é equivalente a um vetor único de intensidade $m\bar{r}\omega$, perpendicular à linha OG e aplicado a um ponto P sobre essa linha, denominado *centro de percussão,* a uma distância $GP = \bar{k}^2/\bar{r}$ do centro de massa da placa.

17.67 Mostre que a soma $\mathbf{H}_A$ dos momentos em relação ao ponto A das quantidades de movimento das partículas de uma placa rígida em movimento plano é igual a $I_A\boldsymbol{\omega}$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da placa no instante considerado e I_A é o momento de inércia da placa em relação a A, se e somente se uma das seguintes condições é satisfeita: (*a*) A é o centro de massa da placa, (*b*) A é o centro instantâneo de rotação, (*c*) a velocidade de A é dirigida ao longo de uma linha que liga o ponto A ao centro de massa G.

17.68 Considere uma placa rígida inicialmente em estado de repouso e sujeita a uma força impulsiva $\mathbf{F}$ contida no plano da placa. Definimos o *centro de percussão* P como o ponto de interseção da linha de ação de $\mathbf{F}$ com a perpendicular desenhada a partir de G. (*a*) Mostre que o centro instantâneo de rotação C da placa está localizado sobre a linha GP a uma distância $GC = \bar{k}^2/GP$ sobre o lado oposto a G. (*b*) Mostre que, se o centro de percussão estivesse localizado em C, o centro instantâneo de rotação estaria localizado em P.

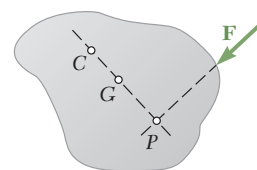



Figura P17.68

17.69 Uma roda de raio r e raio de giração centroidal $\bar{k}$ é liberada do estado de repouso sobre o plano inclinado mostrado na figura no instante $t = 0$. Admitindo que a roda rola sem deslizar, determine (*a*) a velocidade do seu centro no tempo t, (*b*) o coeficiente de atrito estático necessário para evitar o deslizamento.

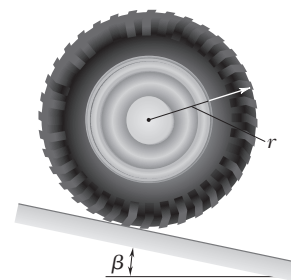



Figura P17.69

17.70 Um volante está rigidamente montado em um eixo de 40 mm de raio que rola sem deslizar ao longo de trilhos paralelos. Sabendo que, após ser liberado do estado de repouso, o sistema atinge uma velocidade de 150 mm/s em 30 s, determine o raio de giração centroidal do sistema.

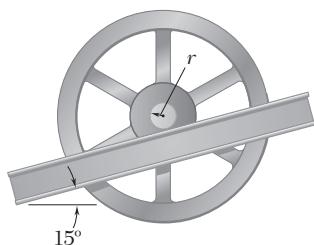



Figura P17.70

17.71 A polia dupla mostrada na figura tem massa de 3 kg e um raio de giração de 100 mm. Sabendo que, quando a polia está em repouso, uma força $\mathbf{P}$ de intensidade de 24 N é aplicada à corda B, determine (*a*) a velocidade do centro da polia após 1,5 s, (*b*) a tração na corda C.

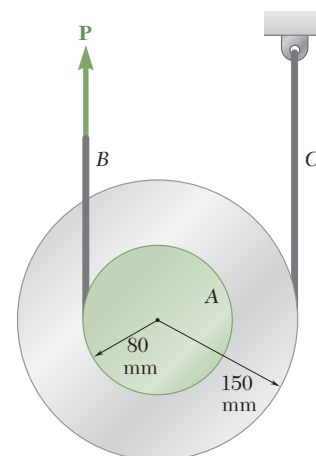



Figura P17.71

17.72 Dois cilindros uniformes, cada um com massa $m = 7$ kg e raio $r = 100$ mm, estão conectados por uma esteira como mostrado na figura. Se o sistema é liberado do repouso quando $t = 0$, determine (*a*) a velocidade do centro do cilindro B em $t = 3$ s, (*b*) a tração na parte da esteira que liga os dois cilindros.

17.73 Dois cilindros uniformes, cada um com massa $m = 7$ kg e raio $r = 100$ mm, estão conectados por uma esteira como mostrado na figura. Sabendo que, no instante mostrado, a velocidade angular do cilindro A é de 30 rad/s no sentido anti-horário, determine (*a*) o tempo necessário para a velocidade angular do cilindro A seja reduzida para 5 rad/s, (*b*) a tração na parte da esteira que liga os dois cilindros.

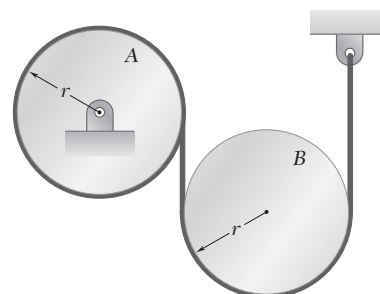



Figura P17.72 e *P17.73*

17.74 e 17.75 Um cilindro de 240 mm de raio e massa de 8 kg repousa sobre um transportador de 3 kg. O sistema está em estado de repouso quando uma força **P** de intensidade 10 N é aplicada como mostrado na figura durante 1,2 s. Sabendo que o cilindro rola sem deslizar sobre o transportador e desprezando a massa dos roletes, determine a velocidade resultante (*a*) do transportador, (*b*) do centro do cilindro.

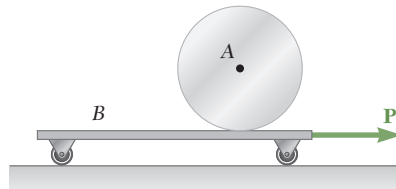



Figura P17.74

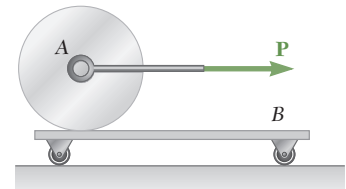



Figura P17.75

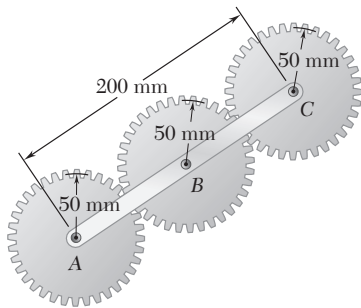



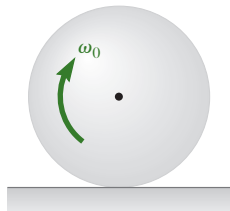
Figura P17.76

17.76 No arranjo das engrenagens mostrado na figura, as engrenagens *A* e *C* estão presas à barra *ABC*, que é livre para girar em torno de *B*, enquanto a engrenagem interna *B* é fixa. Sabendo que o sistema está em repouso, determine a intensidade do binário **M** que deve ser aplicado na barra *ABC* se 2,5 s depois a velocidade angular da barra for de 240 rpm no sentido horário. As engrenagens *A* e *C* têm massa de 1,25 kg cada uma e podem ser consideradas como discos de raio de 50 mm; a barra *ABC* tem massa de 2 kg.

Figura P17.77

17.77 Uma esfera de raio *r* e massa *m* é colocada sobre um piso horizontal sem velocidade linear, mas com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0$ no sentido horário. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre a esfera e o piso, determine (*a*) o tempo t_1 em que a esfera começará a rolar sem deslizar, (*b*) as velocidades linear e angular da esfera no tempo t_1.

17.78 Uma esfera de raio *r* e massa *m* é lançada ao longo de uma superfície horizontal rugosa com as velocidades iniciais mostradas na figura. Para que a velocidade final da esfera seja nula, expresse (*a*) a intensidade requerida de $\boldsymbol{\omega}_0$ em termos de v_0 e *r*, (*b*) o tempo necessário para a esfera chegar ao repouso em termos de v_0 e do coeficiente de atrito cinético μ_k.

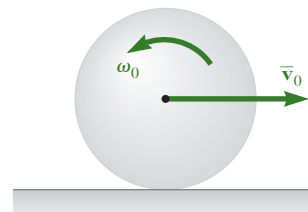
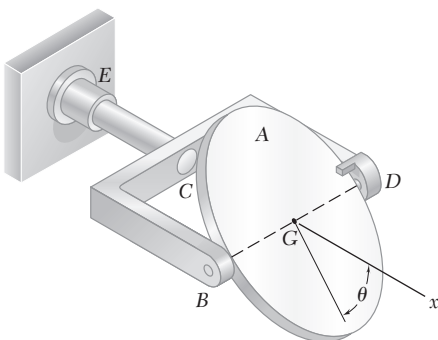



Figura P17.78

Figura P17.79

17.79 Um disco de 1,25 kg e 100 mm de raio está preso ao suporte *BCD* por meio de pequenos eixos montados em mancais em *B* e *D*. O suporte de 0,75 kg tem raio de giração de 75 mm em relação ao eixo *x*. Inicialmente, o conjunto está girando a 120 rpm com o disco no plano do suporte ($\theta = 0$). Se o disco for levemente deslocado e girar em relação ao suporte até $\theta = 90°$, onde ele é contido por uma pequena barra em *D*, determine a velocidade angular final do conjunto.

17.80 Dois painéis A e B são ligados por dobradiças a uma placa retangular e mantidos por um fio como mostra na figura. A placa e os painéis são feitos do mesmo material e têm a mesma espessura. Sabendo que todo o conjunto está girando com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0$, quando o fio se parte, determine a velocidade angular do conjunto após os painéis terem chegado ao estado de repouso contra a placa.

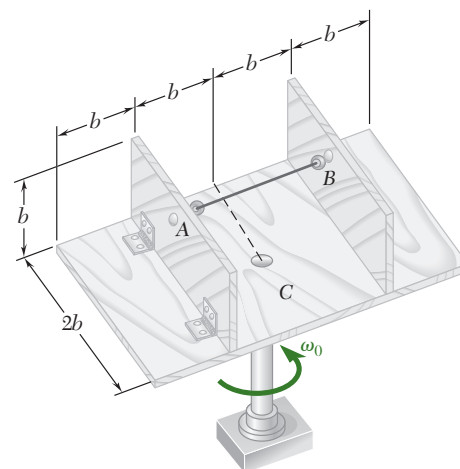



Figura P17.80

17.81 Um tubo AB de 1,6 kg desliza livremente na barra DE que pode girar livremente no plano horizontal. Inicialmente o conjunto está rodando com velocidade angular $\omega = 5$ rad/s e o tubo é mantido na posição por uma corda. O momento de inércia da barra e do braço em torno do eixo vertical de rotação é 0,30 kg · m^2 e o momento de inércia centroidal do tubo em torno eixo vertical é 0,0025 kg · m^2. Se a corda é subitamente rompida, determine (a) a velocidade angular do conjunto após o tubo ter se movido para a extremidade E, (b) a energia perdida pelo impacto plástico em E.

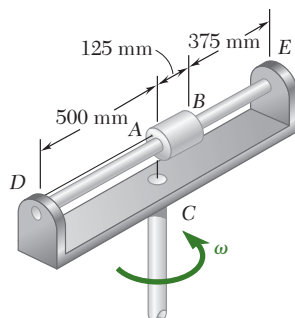



Figura P17.81

17.82 Duas bolas de 0,4 kg são inseridas sucessivamente no centro C do tubo delgado AB de 2 kg. Sabendo que, quando a primeira bola é inserida no tubo, a velocidade angular inicial do tubo é de 8 rad/s e desprezando o efeito do atrito, determine a velocidade angular do tubo exatamente após (a) a primeira bola sair do tubo, (b) a segunda bola deixar o tubo.

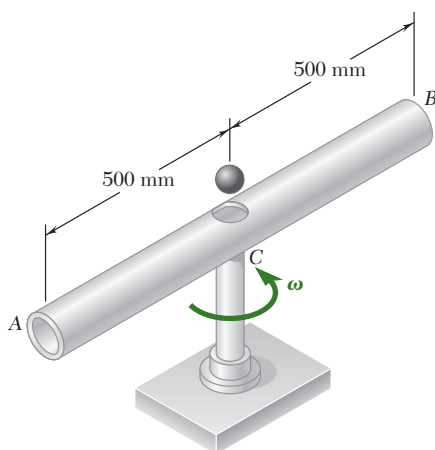



Figura P17.82

17.83 Uma barra de 3 kg e comprimento de 800 mm pode deslizar livremente no cilindro *DE* de 240 mm, que pode girar livremente no plano horizontal. Na posição mostrada na figura, o conjunto está girando com velocidade angular de intensidade ω = 40 rad/s e a extremidade *B* da barra se movimenta na direção do cilindro a uma velocidade de 75 mm/s em relação ao cilindro. Sabendo que o momento de inércia da massa centroidal do cilindro em torno do eixo vertical é 0,025 kg · m² e desprezando o efeito do atrito, determine a velocidade angular do conjunto quando a extremidade *B* da barra bate na extremidade *E* do cilindro.

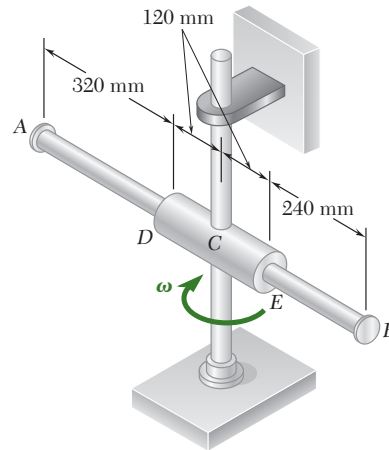



Figura P17.83

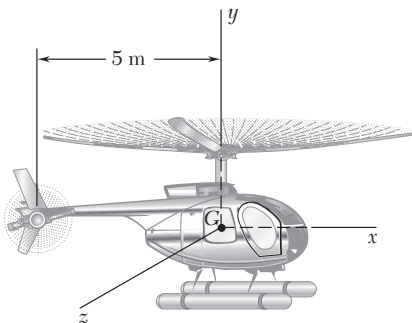



Figura P17.84

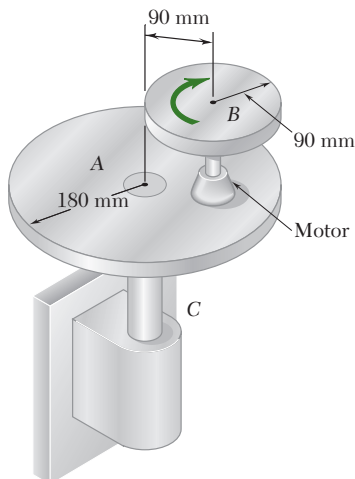
17.84 No helicóptero mostrado na figura, um rotor de cauda é usado para impedir a rotação da cabine à medida que a velocidade das pás principais é alterada. Admitindo que o rotor de cauda não esteja em operação, determine a velocidade angular final da cabine após a velocidade das pás principais ter sido alterada de 180 para 240 rpm. (A velocidade das pás principais é medida em relação à cabine, que tem um momento de inércia centroidal de 1.000 kg · m². Cada uma das quatro pás principais é considerada como uma barra delgada de 4,2 m de comprimento e 25 kg de massa.)

17.85 Admitindo que o rotor de cauda do Problema 17.84 esteja operando e que a velocidade angular da cabine permaneça nula, determine a velocidade horizontal final da cabine quando a velocidade das pás principais for alterada de 180 para 240 rpm. A cabine tem massa de 625 kg e está inicialmente em estado de repouso. Determine também a força exercida pelo rotor de cauda considerando que a variação de velocidade seja uniforme durante 12 s.

Figura P17.86

17.86 O disco *B* de 4 kg está ligado ao eixo de um motor montado sobre a placa *A*, que pode girar livremente em torno do eixo vertical *C*. A unidade motor-placa-eixo tem um momento de inércia de 0,20 kg · m² em relação à linha de centro do eixo *C*. Se o motor é ligado quando o sistema está em repouso, determine as velocidades angulares do disco e da placa após o motor ter atingido sua velocidade normal de operação de 360 rpm.

17.87 Uma plataforma circular *A* é presa a um aro de raio interno de 200 mm e pode girar livremente sobre um eixo vertical. É sabido que a unidade plataforma-aro tem massa de 5 kg e raio de giração de 175

mm com relação ao eixo. No momento em que a plataforma está girando com uma velocidade de 50 rpm, um disco *B* de 3 kg e raio de 80 mm é colocado na plataforma com velocidade nula. Sabendo que o disco *B*, então, desliza de encontro ao aro até ficar em repouso relativo à plataforma, determine a velocidade angular final da plataforma.

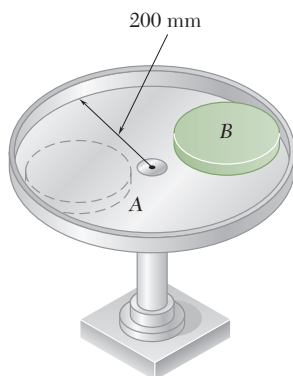



Figura P17.87

17.88 Um pequeno cursor *C* de 2 kg pode deslizar livremente sobre um anel fino de massa de 3 kg e raio de 250 mm. O anel está soldado a um eixo vertical curto, que pode girar livremente em um mancal fixo. Inicialmente, o anel tem uma velocidade angular de 35 rad/s e o cursor está no alto do anel ($\theta = 0$), quando este recebe um leve toque. Desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a velocidade angular do anel quando o cursor passar pela posição $\theta = 90°$, (*b*) a velocidade correspondente do cursor relativamente ao anel.

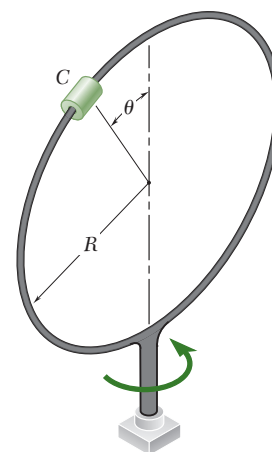



Figura P17.88

17.89 O cursor *C* tem massa de 8 kg e pode deslizar livremente sobre a barra *AB*, que por sua vez pode girar livremente em um plano horizontal. O conjunto está girando com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de 1,5 rad/s quando uma mola localizada entre *A* e *C* é liberada, projetando o cursor ao longo da barra com uma velocidade relativa inicial $v_r = 1{,}5$ m/s. Sabendo que o momento de inércia combinado da barra e da mola em relação a *B* é de 1,2 kg · m^2, determine (*a*) a distância mínima entre o cursor e o ponto *B* no movimento subsequente, (*b*) a velocidade angular correspondente do conjunto.

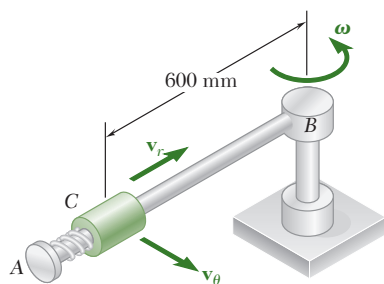



Figura P17.89

17.90 No Problema 17.89, determine a intensidade requerida da velocidade relativa inicial v_r para que, durante o movimento subsequente, a distância mínima entre o cursor *C* e o ponto *B* seja de 300 mm.

17.91 Um cursor C de 3 kg é preso a uma mola e pode deslizar na barra AB, podendo girar em torno do plano horizontal. O momento de inércia da massa da barra AB em relação a extremidade A é $0{,}5\ \text{kg} \cdot \text{m}^2$. A mola tem uma constante $k = 3.000$ N/m e um comprimento indeformado de 250 mm. No instante mostrado na figura, a velocidade do cursor relativa à barra é zero e o conjunto está girando com uma velocidade angular de 12 rad/s. Desprezando o efeito do atrito, determine (*a*) a velocidade angular do conjunto quando o cursor passa pelo ponto localizado 180 mm da extremidade A da barra, (*b*) a velocidade correspondente do cursor em relação à barra.

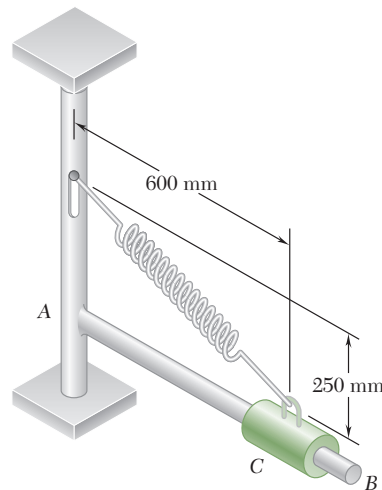



Figura P17.91

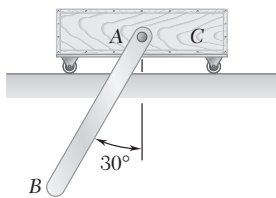



Figura P17.92

17.92 A barra AB de massa 7,5 kg e comprimento 1 m está presa a um carrinho C de 12,5 kg. Sabendo que o sistema é liberado do repouso na posição mostrada na figura e desprezando o atrito, determine (*a*) a velocidade do ponto B quando a barra AB passa por uma posição vertical, (*b*) a velocidade correspondente do carrinho C.

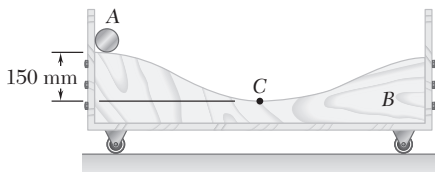
17.93 No Problema 17.83, determine a velocidade da barra AB em relação ao cilindro DE quando a extremidade B da barra bate na extremidade E do cilindro.

17.94 No Problema 17.81, determine a velocidade do tubo em relação à barra quando o tubo bate na extremidade E do conjunto.

Figura P17.95

17.95 Um cilindro A de aço de 3 kg e um carrinho B de madeira de 5 kg estão em repouso na posição mostrada na figura quando o cilindro recebe um empurrãozinho, fazendo com que ele role sem deslizar ao longo da superfície superior do carrinho. Desprezando o atrito entre o carrinho e o chão, determine a velocidade do carrinho quando o cilindro passa pelo ponto mais baixo da superfície em C.

17.11 Movimento impulsivo

Você viu no Cap. 13 que o método de impulso e quantidade de movimento é o único praticável para a resolução de problemas que envolvem o movimento impulsivo de uma partícula. Vai verificar agora que os problemas que envolvem o movimento impulsivo de corpos rígidos adaptam-se particularmente bem à resolução pelo método de impulso e quantidade de movimento. Uma vez que o intervalo de tempo considerado no cálculo de impulsos lineares e de impulsos angulares é muito curto, é possível considerar que os corpos envolvidos ocupem a mesma posição durante aquele intervalo de tempo, o que torna o cálculo bastante simples.

17.12 Impacto excêntrico

Nas Seções 13.13 e 13.14, você aprendeu a resolver problemas de *impacto central,* isto é, problemas em que os centros de massa dos dois corpos em colisão estão localizados sobre a linha de impacto. Agora, analisará o *impacto excêntrico* de dois corpos rígidos. Considere dois corpos que colidem e represente por $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$ as velocidades antes do impacto *dos dois pontos de contato* A e *B* (Fig. 17.10*a*). Sob o impacto, os dois corpos se *deformarão* e, ao final do período de deformação, as velocidades $\mathbf{u}_A$ e $\mathbf{u}_B$ de *A* e *B* terão componentes iguais ao longo da linha de impacto *nn* (Fig. 17.10*b*). Um período de *restituição* então, se seguirá, ao término

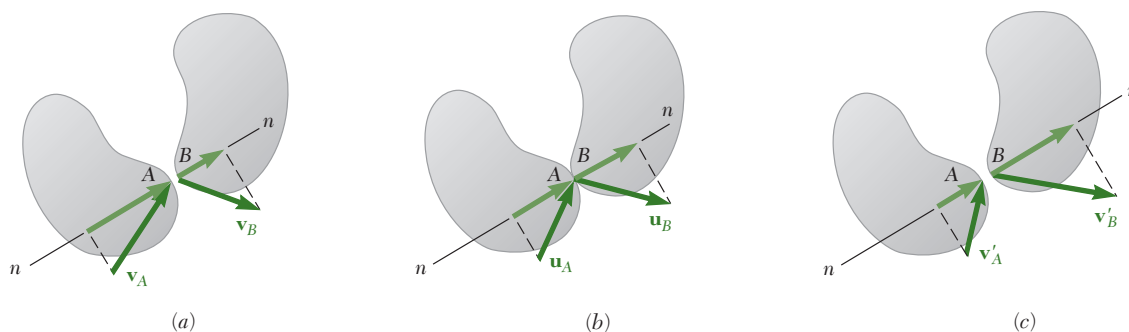



Figura 17.10

do qual *A* e *B* terão velocidades $\mathbf{v}'_A$ e $\mathbf{v}'_B$ (Fig. 17.10*c*). Admitindo que os corpos estão sem atrito, concluiremos que as forças que eles exercem um sobre o outro são dirigidas ao longo da linha de impacto. Representando a intensidade do impulso de uma dessas forças durante o período de deformação por $\int P\,dt$ e a intensidade do seu impulso durante o período de restituição por $\int R\,dt$, relembremos que o coeficiente de restituição *e* é definido pela razão

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} \qquad (17.18)$$

Propomo-nos a mostrar que as relações estabelecidas na Seção 13.13 entre as velocidades relativas de duas partículas antes e depois do impacto também valem para os componentes das velocidades relativas dos dois

Foto 17.4 Quando o bastão em rotação entra em contato com a bola, ele aplica uma força impulsiva na bola requerendo o uso do método de impulso e quantidade de movimento para determinar as velocidades finais da bola e do bastão.

pontos de contato A e B ao longo da linha de impacto. Portanto, queremos mostrar que

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)n] \tag{17.19}$$

Primeiro, iremos admitir que o movimento de cada um dos dois corpos em colisão da Fig. 17.10 é irrestrito. Logo, as únicas forças impulsivas exercidas sobre os corpos durante o impacto estão aplicadas em A e B, respectivamente. Considere o corpo ao qual o ponto A pertence e desenhe os três diagramas de impulso e quantidade de movimento correspondentes ao período de deformação (Fig. 17.11). Representemos por

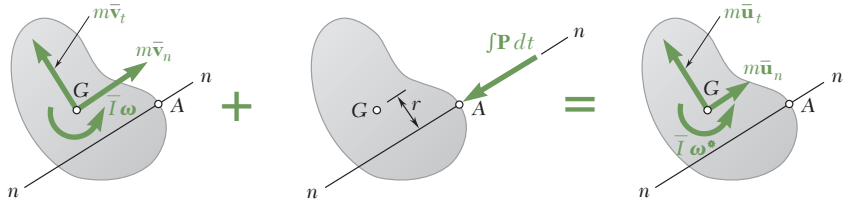



Figura 17.11

$\bar{\mathbf{v}}$ e $\bar{\mathbf{u}}$, respectivamente, a velocidade do centro de massa no início e no fim do período de deformação, e por $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\omega}^*$ as velocidades angulares do corpo nos mesmos instantes. Somando e igualando os componentes das quantidades de movimento e impulsos ao longo da linha de impacto nn, escrevemos

$$m\bar{v}_n - \int P\,dt = m\bar{u}_n \tag{17.20}$$

Somando e igualando os momentos em relação a G das quantidades de movimento e impulsos, escrevemos também

$$\bar{I}\omega - r\int P\,dt = \bar{I}\omega^* \tag{17.21}$$

onde r representa a distância perpendicular entre G e a linha de impacto. Considerando agora o período de restituição, obtemos de modo similar

$$m\bar{u}_n - \int R\,dt = m\bar{v}'_n \tag{17.22}$$

$$\bar{I}\omega^* - r\int R\,dt = \bar{I}\omega' \tag{17.23}$$

onde $\bar{\mathbf{v}}'$ e $\boldsymbol{\omega}'$ representam, respectivamente, a velocidade do centro de massa e a velocidade angular do corpo após o impacto. Resolvendo (17.20) e (17.22) para os dois impulsos e substituindo os resultados em (17.18), e, em seguida, resolvendo (17.21) e (17.23) para os mesmos dois impulsos e substituindo os resultados novamente em (17.18), obtemos as duas expressões alternativas seguintes para o coeficiente de restituição:

$$e = \frac{\bar{u}_n - \bar{v}'_n}{\bar{v}_n - \bar{u}_n} \qquad e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} \tag{17.24}$$

Multiplicando por r o numerador e o denominador da segunda expressão obtida para e e adicionando os produtos, respectivamente, ao numerador e ao denominador da primeira expressão, temos

$$e = \frac{\bar{u}_n + r\omega^* - (\bar{v}'_n + r\omega')}{\bar{v}_n + r\omega - (\bar{u}_n + r\omega^*)} \tag{17.25}$$

Observando que $\bar{v}_n + r\omega$ representa o componente $(v_A)_n$ ao longo de nn da velocidade do ponto de contato A e que, analogamente, $\bar{u}_n + r\omega^*$ e $\bar{v}'_n + r\omega'$ representam, respectivamente, os componentes $(u_A)_n$ e $(v'_A)_n$, escrevemos

$$e = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n} \tag{17.26}$$

A análise do movimento do segundo corpo conduz a uma expressão semelhante para e em termos dos componentes das velocidades sucessivas do ponto B ao longo de nn. Relembrando que $(u_A)_n = (u_B)_n$ eliminando esses dois componentes de velocidade por uma manipulação semelhante àquela usada na Seção 13.13, obtemos a relação (17.19).

Se um ou ambos os corpos em colisão forem restringidos a girar em torno de um ponto fixo O, como no caso de um pêndulo composto (Fig. 17.12*a*), uma reação impulsiva será exercida em O (Fig. 17.12*b*).

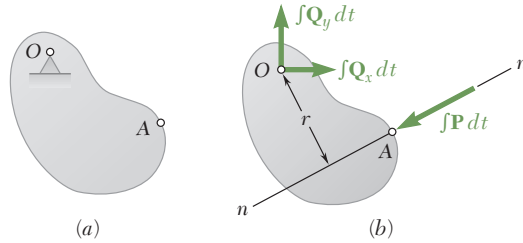



Figura 17.12

Verificamos que as Eqs. (17.26) e (17.19) permanecem válidas, embora sua dedução deva ser modificada. Aplicando a fórmula (17.16) ao período de deformação e ao período de restituição, escrevemos

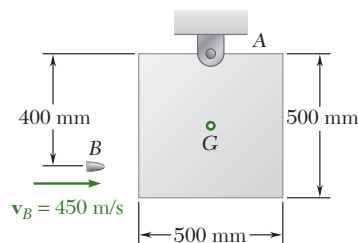
$$I_O\omega - r\int P\,dt = I_O\omega^* \tag{17.27}$$

$$I_O\omega^* - \mathrm{r}\int R\,dt = I_O\omega' \tag{17.28}$$

onde r representa a distância perpendicular do ponto fixo O à linha de impacto. Resolvendo (17.27) e (17.28) para os dois impulsos, substituindo os resultados em (17.18) e observando então que $r\omega$, $r\omega^*$ e $r\omega'$ representam os componentes das sucessivas velocidades do ponto A ao longo de nn, escrevemos

$$e = \frac{\omega^* - \omega'}{\omega - \omega^*} = \frac{r\omega^* - r\omega'}{r\omega - r\omega^*} = \frac{(u_A)_n - (v'_A)_n}{(v_A)_n - (u_A)_n}$$

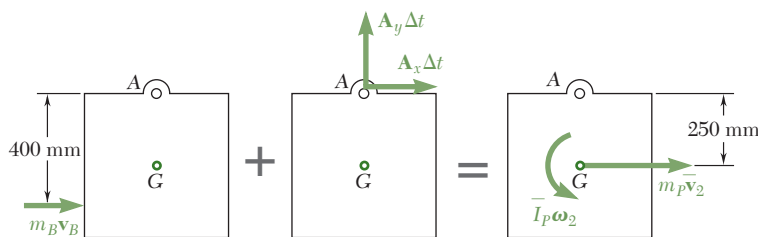
e constatamos que a Eq. (17.26) ainda vale. Logo, a Eq. (17.19) permanece válida quando um ou ambos os corpos em colisão forem restringidos a girar em torno de um ponto fixo O.

Para determinar as velocidades dos dois corpos em colisão após o impacto, a relação (17.19) deve ser usada em conjunto com uma ou várias outras equações obtidas pela aplicação do princípio de impulso e quantidade de movimento (Problema Resolvido 17.10).

PROBLEMA RESOLVIDO 17.9

Uma bala B de 25 kg é disparada com uma velocidade horizontal de 450 m/s contra a lateral de um painel quadrado de 10 kg, suspenso por uma articulação em A. Sabendo que o painel está inicialmente em estado de repouso, determine (*a*) a velocidade angular do painel imediatamente após a bala se alojar no painel e (*b*) a reação impulsiva em A, considerando que a bala leva 0,0006 s para se alojar.

SOLUÇÃO

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Consideramos a bala e o painel como um sistema único e expressamos que as quantidades de movimento iniciais da bala e do painel e os impulsos das forças externas são, em conjunto, equipolentes às quantidades de movimento finais do sistema. Como o intervalo de tempo $\Delta t = 0{,}0006$ s é muito curto, desprezamos todas as forças não impulsivas e consideramos apenas os impulsos externos $\mathbf{A}_x\,\Delta t$ e $\mathbf{A}_y\,\Delta t$.

Após o impacto, a bala fica incorporada ao painel. Já que o painel gira com uma velocidade angular ω_2, a velocidade da bala é $(AB)\omega_2$ direcionada perpendicularmente para AB. Assim, a velocidade da bala é da mesma ordem que a do centro de massa do painel. Uma vez que $m_{\text{bala}} << m_{\text{painel}}$, desprezamos a dinâmica da bala após o impacto. Isto contrasta com o caso de pré-impacto, onde $v_{\text{bala}} >> v_G$. No caso de m_{bala} e m_{painel} serem comparáveis, o momento pós-impacto da bala não pode ser desprezado.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + **Sist. de Imp. Ext.**$_{1\to2}$ =
= **Sist. de Quant. de Mov.**$_2$

$+\circlearrowleft$ sobre o momento A: $\quad m_B v_B(0{,}4\text{ m}) + 0 = m_P\bar{v}_2(0{,}25\text{ m}) + \bar{I}_P\omega_2 \quad (1)$

$\xrightarrow{+}$ componentes em x: $\quad m_B v_B + A_x\Delta t = m_P\bar{v}_2 \quad (2)$

$+\uparrow$ componentes em y: $\quad 0 + A_y\Delta t = 0 \quad (3)$

O momento de inércia de massa centroidal do painel quadrado é

$$\bar{I}_P = \tfrac{1}{6}m_P b^2 = \tfrac{1}{6}(10\text{ kg})(0{,}5\text{ m})^2 = 0{,}417\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Substituindo esse valor, bem como os dados fornecidos na Eq. (1), e notando que

$$\bar{v}_2 = (0{,}25\text{ m})\omega_2$$

escrevemos

$$(0{,}25)(450)(0{,}4) = (10)(0{,}25\omega_2)(0{,}25) + 0{,}417\omega_2$$

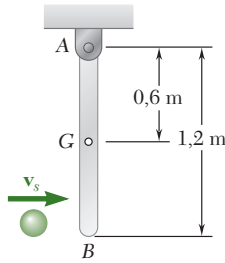
$$\omega_2 = 4{,}67\text{ rad/s} \qquad \omega_2 = 4{,}32\text{ rad/s}\circlearrowleft \quad \blacktriangleleft$$

$$\bar{v}_2 = (0{,}25\text{ m})\omega_2 = (0{,}25\text{ m})(4{,}32\text{ rad/s}) = 1{,}08\text{ m/s}$$

Substituindo $\bar{v}_2 = 1{,}08$ m/s, $\Delta t = 0{,}0006$ s e os dados fornecidos na Eq. (2), temos

$$(0{,}025)(450) + A_x(0{,}0006) = 10(1{,}08)$$

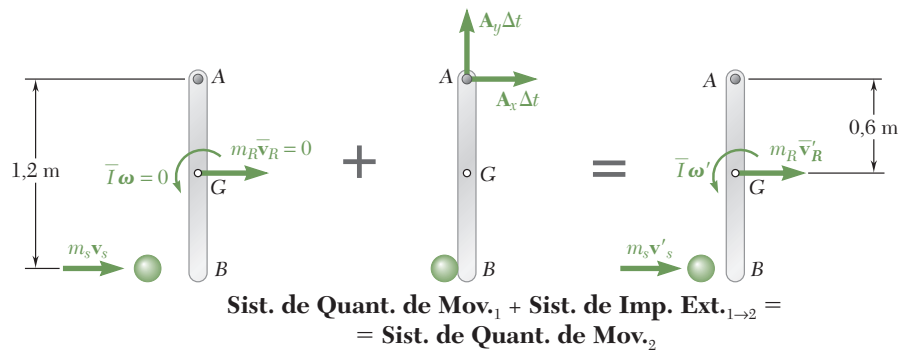
$$A_x = -750\text{ N} \qquad \mathbf{A}_x = 750\text{ N}\leftarrow \quad \blacktriangleleft$$

A partir da Eq. (3), encontramos $\quad A_y = 0 \qquad \mathbf{A}_y = 0 \quad \blacktriangleleft$

PROBLEMA RESOLVIDO 17.10

Uma esfera de 2 kg movendo-se horizontalmente para a direita com velocidade inicial de 5 m/s bate na extremidade inferior de uma barra rígida *AB* de 8 kg. A barra está suspensa por uma articulação em *A* e está inicialmente em repouso. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a barra e a esfera é de 0,80, determine a velocidade angular da barra e a velocidade da esfera imediatamente após o impacto.

SOLUÇÃO

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Consideramos a barra e a esfera como um sistema único e expressamos que as quantidades de movimento iniciais da barra e da esfera e os impulsos das forças externas são, em conjunto, equipolentes às quantidades de movimento finais do sistema. Observamos que a única força impulsiva externa ao sistema é a reação impulsiva em *A*.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + **Sist. de Imp. Ext.**$_{1\to2}$ =
= **Sist. de Quant. de Mov.**$_2$

+↰ momentos em relação a *A*:

$$m_s v_s\,(1{,}2\text{ m}) = m_s v'_s\,(1{,}2\text{ m}) + m_R \bar{v}'_R\,(0{,}6\text{ m}) + \bar{I}\omega' \qquad (1)$$

Como a barra gira em torno de *A*, temos $\bar{v}'_R = \bar{r}\omega' = (0{,}6\text{ m})\omega'$. Ainda,

$$\bar{I} = \tfrac{1}{12}mL^2 = \tfrac{1}{12}(8\text{ kg})(1{,}2\text{ m})^2 = 0{,}96\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Substituindo esses valores e os dados fornecidos na Eq. (1), temos

$$(2\text{ kg})(5\text{ m/s})(1{,}2\text{ m}) = (2\text{ kg})v'_s(1{,}2\text{ m}) + (8\text{ kg})(0{,}6\text{ m})\omega'(0{,}6\text{ m}) + (0{,}96\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega'$$

$$12 = 2{,}4v'_s + 3{,}84\omega' \qquad (2)$$

Velocidades relativas. Escolhendo o sentido positivo para a direita, escrevemos

$$v'_B - v'_s = e(v_s - v_B)$$

Substituindo $v_s = 5$ m/s, $v_B = 0$ e $e = 0{,}80$, obtemos

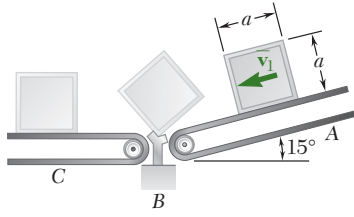
$$v'_B - v'_s = 0{,}80(5\text{ m/s}) \qquad (3)$$

Novamente, considerando que a barra gira em torno de *A*, escrevemos

$$v'_B = (1{,}2\text{ m})\omega' \qquad (4)$$

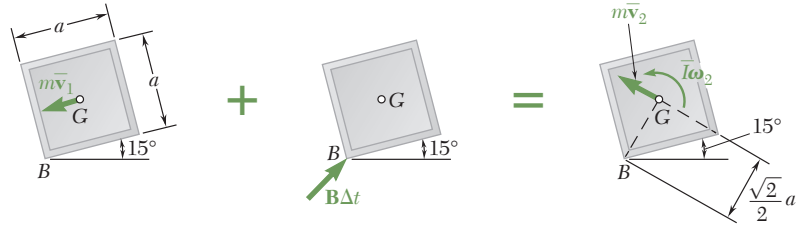
Resolvendo as Eqs. de (2) a (4) simultaneamente, obtemos

$$\omega' = 3{,}21\text{ rad/s} \qquad \omega' = 3{,}21\text{ rad/s}\ ↰ \ ◀$$

$$v'_s = -0{,}143\text{ m/s} \qquad v'_s = -0{,}143\text{ m/s} \leftarrow \ ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 17.11

Um pacote quadrado de lado a e massa m move-se para baixo sobre uma esteira transportadora A com uma velocidade constante $\bar{\mathbf{v}}_1$. No final da correia transportadora, o canto do pacote bate em um suporte rígido em B. Admitindo que o impacto em B seja perfeitamente plástico, deduza uma expressão para a menor intensidade da velocidade $\bar{\mathbf{v}}_1$ de modo que o pacote gire em torno de B e atinja a esteira transportadora C.

SOLUÇÃO

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Como o impacto entre o pacote e o suporte é perfeitamente plástico, o pacote gira em torno de B durante o impacto. Aplicamos o princípio de impulso e quantidade de movimento ao pacote e notamos que a única força impulsiva externa ao pacote é a reação impulsiva em B.

Sist. de Quant. de Mov.$_1$ + Sist. de Imp. Ext.$_{1\to2}$ =
= Sist. de Quant. de Mov.$_2$

+↺ sobre o momento B: $\quad (m\bar{v}_1)(\frac{1}{2}a) + 0 = (m\bar{v}_2)(\frac{1}{2}\sqrt{2}a) + \bar{I}\omega_2 \qquad (1)$

Uma vez que o pacote gira em torno de B, temos $\bar{v}_2 = (GB)\omega_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$. Substituímos essa expressão, juntamente com $\bar{I} = \frac{1}{6}ma^2$ na Eq. (1):

$$(m\bar{v}_1)(\tfrac{1}{2}a) = m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a) + \tfrac{1}{6}ma^2\omega_2 \qquad \bar{v}_1 = \tfrac{4}{3}a\omega_2 \qquad (2)$$

$GB = \frac{1}{2}\sqrt{2}a = 0{,}707a$
$h_2 = GB$ sen $(45° + 15°) =$
$= 0{,}612a$

Princípio de conservação de energia. Aplicamos o princípio de conservação de energia entre a posição 2 e a posição 3.

Posição 2. $V_2 = Wh_2$. Relembrando que $\bar{v}_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2$, escrevemos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_2^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}m(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}a\omega_2)^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{6}ma^2)\omega_2^2 = \tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2$$

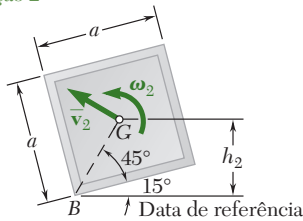
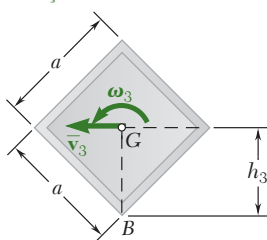
Posição 3. Uma vez que o pacote precisa atingir a esteira transportadora C, ele terá que passar pela posição 3 onde G estará diretamente acima de B. Além disso, como desejamos determinar a menor velocidade para que o pacote atinja essa posição, escolhemos $\bar{v}_3 = 0$ e $\omega_3 = 0$. Portanto, $T_3 = 0$ e $V_3 = Wh_3$.

$h_3 = GB = 0{,}707a$

Conservação da energia

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{3}ma^2\omega_2^2 + Wh_2 = 0 + Wh_3$$
$$\omega_2^2 = \frac{3W}{ma^2}(h_3 - h_2) = \frac{3g}{a^2}(h_3 - h_2)$$

Substituindo os valores calculados de h_2 e h_3 na Eq. (3), obtemos

$$\omega_2^2 = \frac{3g}{a^2}(0{,}707a - 0{,}612a) = \frac{3g}{a^2}(0{,}095a) \qquad \omega_2 = \sqrt{0{,}285g/a}$$
$$\bar{v}_1 = \tfrac{4}{3}a\omega_2 = \tfrac{4}{3}a\sqrt{0{,}285g/a} \qquad \bar{v}_1 = 0{,}712\sqrt{g/a}$$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção foi dedicada ao *movimento impulsivo* e ao *impacto excêntrico de corpos rígidos.*

1. O movimento impulsivo ocorre quando um corpo rígido é submetido a uma força **F** muito intensa durante um intervalo de tempo Δt bastante curto; o impulso resultante $\mathbf{F}\,\Delta t$ é finito e diferente de zero. Tais forças são conhecidas como *forças impulsivas* e são encontradas sempre que há um impacto entre dois corpos rígidos. As forças cujo impulso é nulo são conhecidas como *forças não impulsivas.* Como você observou no Cap. 13, as seguintes forças podem ser consideradas como não impulsivas: o *peso* de um corpo, a força exercida por uma *mola* e qualquer outra força que *sabidamente* seja pequena em comparação com as forças impulsivas. Reações incógnitas, porém, *não podem ser consideradas* como não impulsivas.

2. Impacto excêntrico de corpos rígidos. Você já sabe que, quando dois corpos colidem, os componentes de velocidade dos *pontos de contato A e B* ao longo da linha de impacto, antes e depois do impacto, satisfazem a seguinte equação:

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \tag{17.19}$$

onde o primeiro membro é a *velocidade relativa depois do impacto* e o segundo membro é o produto do coeficiente de restituição e da *velocidade relativa antes do impacto.*

Essa equação expressa a mesma relação entre os componentes de velocidade dos pontos de contato antes e depois do impacto que você usou para partículas no Cap. 13.

3. Para resolver um problema envolvendo impacto, você deve usar o *método de impulso e quantidade de movimento* e seguir os seguintes passos.

a. Estabeleça uma equação baseada em diagrama de corpo livre para o corpo expressando que o sistema formado pelas quantidades de movimento imediatamente antes do impacto e pelos impulsos das forças externas é equivalente ao sistema de quantidades de movimento imediatamente após o impacto.

b. A equação baseada em diagrama de corpo livre relacionará as velocidades antes e depois do impacto com as forças e reações impulsivas. Em certos casos, você será capaz de determinar as velocidades e reações impulsivas incógnitas resolvendo as equações obtidas pela soma de componentes e momentos [Problema Resolvido 17.9].

c. No caso de um impacto em que $e > 0$, o número de incógnitas será maior que o número de equações que você pode escrever pela soma de componentes e momentos, e você deve suplementar as equações obtidas da equação baseada em diagrama de corpo livre com a Eq. (17.19), que relaciona as velocidades relativas dos pontos de contato antes e depois do impacto [Problema Resolvido 17.10].

d. Durante um impacto, você deve usar o método de impulso e quantidade de movimento. Todavia, *antes e depois do impacto,* se necessário, você pode usar alguns dos outros métodos de solução que você aprendeu, tais como o método de trabalho e energia [Problema Resolvido 17.11].

PROBLEMAS

17.96 Uma bala de 40 g é disparada com uma velocidade horizontal de 550 m/s contra a extremidade inferior de uma barra delgada de 7,5 kg e comprimento $L = 800$ mm. Sabendo que $h = 300$ mm e que a barra está inicialmente em estado de repouso, determine (*a*) a velocidade angular da barra imediatamente após a bala se alojar nela, (*b*) a reação impulsiva em C, considerando que a bala se aloja em 0,001 s.

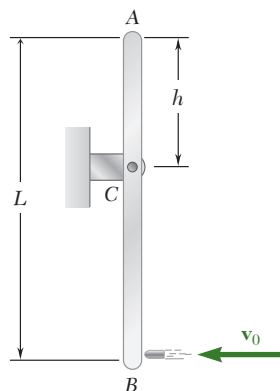



Figura P17.96

17.97 No Problema 17.96, determine (*a*) a distância h requerida para que a reação impulsiva em C seja nula, (*b*) a velocidade angular correspondente da barra imediatamente após a bala ter se alojado.

17.98 Uma bala de 45 g é disparada com velocidade de 400 m/s a $\theta = 30°$ dentro de um painel quadrado de 9 kg de lado $b = 200$ mm. Sabendo-se que $h = 150$ mm e que o painel está inicialmente em repouso, determine (*a*) a velocidade do centro do painel imediatamente depois da bala ter se alojado, (*b*) a reação impulsiva em A, considerando que a bala torna-se alojada em 2 ms.

17.99 Uma bala de 45 g é disparada com velocidade de 400 m/s a $\theta = 5°$ dentro de um painel quadrado de 9 kg de lado $b = 200$ mm. Sabendo que $h = 150$ mm e que o painel está inicialmente em repouso, determine (*a*) a distância necessária h se a componente da reação impulsiva em A é igual a zero, (*b*) a velocidade correspondente do centro do painel imediatamente após a bala ter-se alojado.

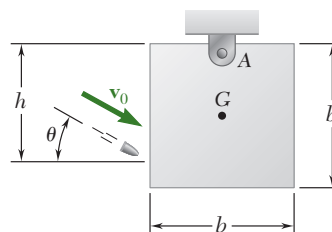



Figura P17.98 e P17.99

17.100 Um painel de madeira de 8 kg é suspenso por um pino suporte em A e está inicialmente em repouso. Uma esfera de metal de 2 kg é liberada do repouso em B e cai dentro de uma concha semiesférica C presa ao painel em um ponto localizado em sua borda de topo. Considerando que o impacto é perfeitamente elástico, determine a velocidade do centro de massa G do painel imediatamente após do impacto.

17.101 Um painel de madeira de 8 kg é suspenso por um pino suporte em A e está inicialmente em repouso. Uma esfera de metal de 2 kg é liberada do repouso em B' e cai dentro de uma concha semiesférica C' presa ao painel no mesmo nível do centro de massa G. Considerando que o impacto é perfeitamente elástico, determine a velocidade do centro de massa G do painel imediatamente após do impacto.

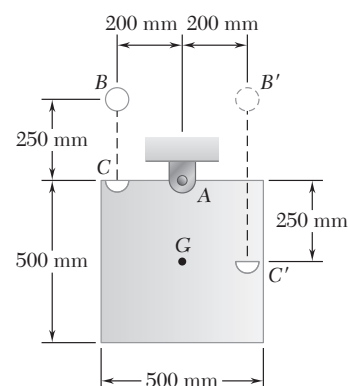



Figura P17.100 e P17.101

17.102 A engrenagem mostrada na figura tem raio $R = 150$ mm e raio de giração $\bar{k} = 125$ mm. A engrenagem está rolando sem deslizamento com velocidade $\bar{\mathbf{v}}_1$ de intensidade 3 m/s quando ela bate em um degrau de altura $h = 75$ mm. Uma vez que a borda do degrau engata no dente da engrenagem, nenhum deslizamento ocorre entre a engrenagem e o degrau. Considerando um impacto perfeitamente plástico, determine a velocidade angular da engrenagem imediatamente após o impacto.

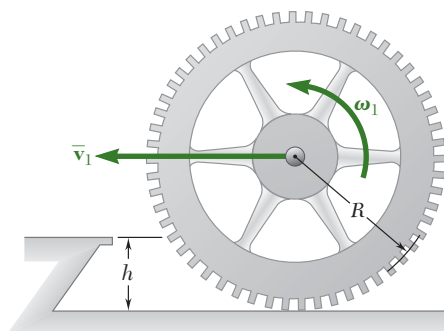



Figura P17.102

17.103 Uma barra delgada uniforme AB de massa m está em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito quando o gancho C engata em um pequeno pino em A. Sabendo que o gancho é puxado para cima com uma velocidade constante $\mathbf{v}_0$, determine o impulso exercido sobre a barra (a) em A, (b) em B. Considere que a velocidade do gancho fica inalterada e que o impacto é perfeitamente plástico.

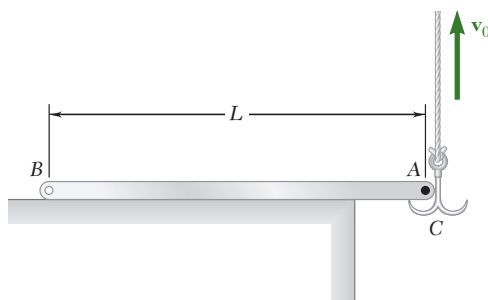



Figura *P17.103*

17.104 Uma barra delgada uniforme de comprimento L e massa m é apoiada por uma mesa horizontal sem atrito. Inicialmente, a barra está girando em torno de seu centro de massa G com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$. Subitamente, o trinco D é movimentado para a direita, batendo na extremidade A da barra. Admitindo que o impacto entre A e D seja perfeitamente plástico, determine a velocidade angular da barra e a velocidade de seu centro de massa imediatamente após o impacto.

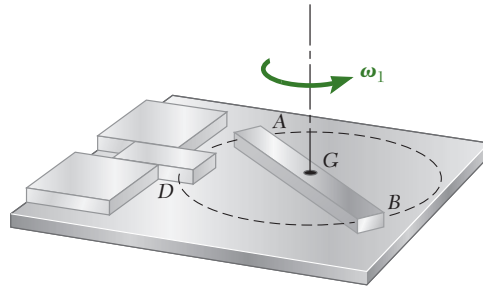



Figura P17.104

17.105 Resolva o Problema 17.104, admitindo que o impacto entre A e D seja perfeitamente elástico.

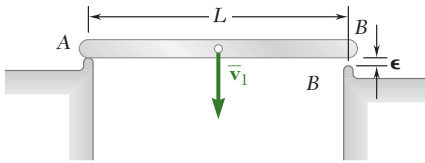



Figura P17.106

17.106 Uma barra delgada uniforme de comprimento L cai contra suportes rígidos em A e B. Como o suporte B está ligeiramente abaixo do suporte A, a barra bate no suporte A com uma velocidade $\bar{\mathbf{v}}_1$ antes de bater em B. Admitindo um impacto perfeitamente elástico, tanto em A como em B, determine a velocidade angular da barra e a velocidade de seu centro de massa imediatamente após a barra ao (*a*) bater no suporte A, (*b*) bater no suporte B, (*c*) bater mais uma vez no suporte A.

17.107 Uma barra delgada uniforme AB está em estado de repouso sobre uma mesa horizontal sem atrito quando a extremidade A da barra é golpeada por um martelo que fornece um impulso perpendicular à barra. No movimento subsequente, determine a distância b que a barra percorrerá cada vez que ela completar uma revolução inteira.

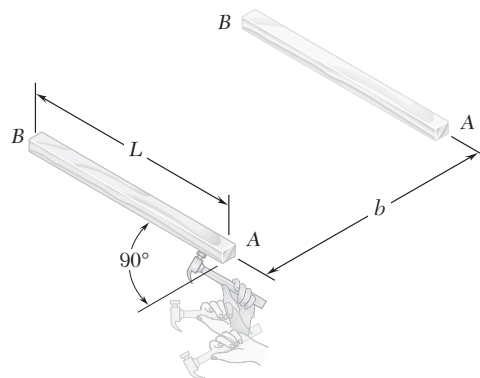



Figura P17.107

17.108 Uma esfera uniforme de raio r rola para baixo sobre o plano inclinado mostrado na figura sem deslizar. Ela atinge uma superfície horizontal e, após deslizar por um momento, começa a rolar novamente. Considerando que a esfera não quica ao atingir a superfície horizontal, determine sua velocidade angular e a velocidade de seu centro de massa após recomeçar a rolar.

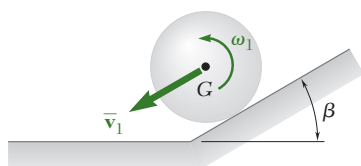



Figura P17.108

17.109 A barra delgada AB, de comprimento L, forma um ângulo β com o eixo vertical quando bate na superfície sem atrito mostrada na figura com uma velocidade vertical $\overline{\mathbf{v}}_1$ e sem velocidade angular. Admitindo que o impacto seja perfeitamente elástico, deduza uma expressão para a velocidade angular da barra imediatamente após o impacto.

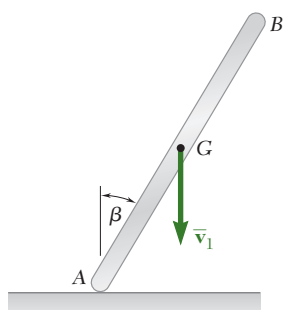



Figura *P17.109*

17.110 Resolva o Problema 17.109, considerando que o impacto entre a barra AB e a superfície sem atrito é perfeitamente elástico.

17.111 Um caixote retangular uniformemente carregado é liberado do repouso na posição mostrada na figura. Considerando que o chão é suficiente áspero para evitar o deslizamento e que o impacto de B é perfeitamente elástico, determine o menor valor da razão a/b para que o canto A permaneça em contato com o chão.

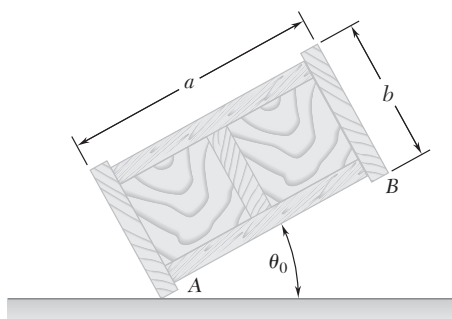



Figura *P17.111*

17.112 e 17.113 Uma barra delgada AB de comprimento L está em livre com uma velocidade $\mathbf{v}_0$ quando a corda AC se torna subitamente esticada. Considerando que o impacto é perfeitamente plástico, determine a velocidade angular da barra e a velocidade de seu centro de massa imediatamente depois da corda ficar esticada.

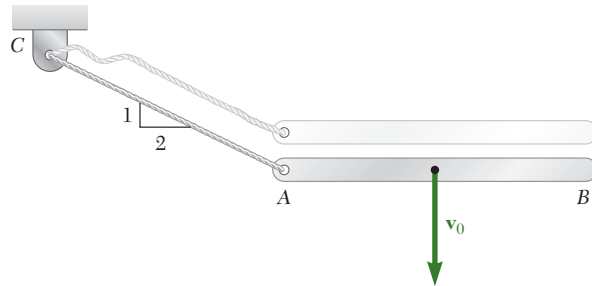



Figura P17.112

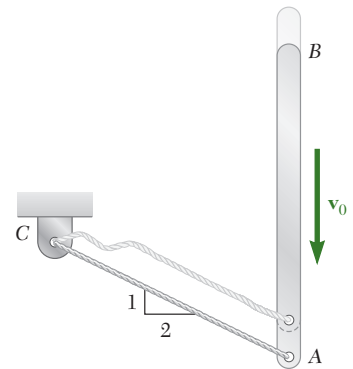



Figura P17.113

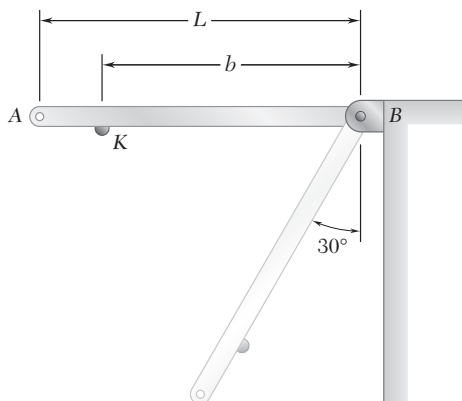



Figura P17.114

17.114 Um barra delgada de comprimento L e massa m é liberada do repouso na posição mostrada na figura. Observa-se que, após a barra bater na superfície vertical, ela ricocheteia e forma um ângulo de 30° com a vertical. (*a*) Determine o coeficiente de restituição entre a saliência k e a superfície. (*b*) Mostre que o mesmo rebote pode ser esperado para qualquer posição da saliência k.

17.115 Um bloco retangular uniforme mostrado na figura está se movendo ao longo de uma superfície com velocidade $\overline{\mathbf{v}}_1$ quando bate em uma pequena obstrução em B. Considerando que o impacto entre o canto A e obstrução B é perfeitamente plástico, determine a intensidade da velocidade $\overline{\mathbf{v}}_1$ para que o máximo ângulo θ que o bloco irá girar seja 30°.

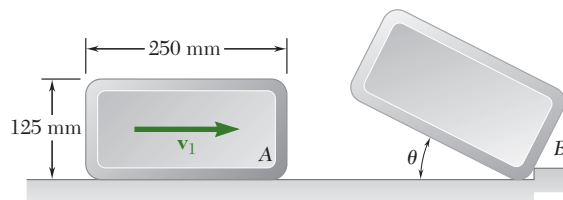



Figura P17.115

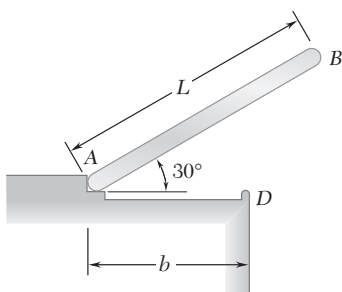



Figura P17.116

17.116 Um barra delgada de comprimento L e massa m é liberada do repouso na posição mostrada na figura e atinge a borda D. Considerando que o impacto em D é perfeitamente plástico, determine, para $b = 0{,}6L$, (*a*) a velocidade angular da barra imediatamente após o impacto, (*b*) o máximo ângulo que a barra irá girar após o impacto.

17.117 Uma bala de 30 g é disparada com uma velocidade horizontal de 350 m/s contra uma viga de madeira AB de 8 kg. A viga está suspensa por um cursor de peso desprezível que pode deslizar ao longo de uma barra horizontal. Desprezando o atrito entre o cursor e a barra, de-

termine o ângulo máximo de rotação da viga durante seu movimento subsequente.

Figura P17.117

17.118 Para a viga do Problema 17.117, determine a velocidade da bala de 30 g para que o ângulo máximo de rotação da viga seja de 90°.

17.119 Um caixote quadrado uniformemente carregado é liberado do repouso com seu canto D diretamente acima de A; ele gira em torno de A até que seu canto B bata no chão, quando então passa a girar em torno de B. O chão é suficientemente áspero para impedir o deslizamento, e o impacto em B é perfeitamente plástico. Representando por $\boldsymbol{\omega}_0$ a velocidade angular do caixote imediatamente após B bater no chão, determine (a) a velocidade angular do caixote imediatamente antes de B bater no chão, (b) a fração da energia cinética do caixote perdida durante o impacto, (c) o ângulo θ em que o caixote irá girar após B bater no chão.

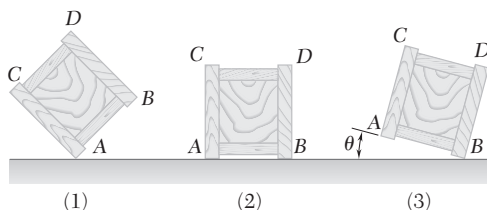



Figura *P17.119*

17.120 Uma barra delgada uniforme AB de comprimento L = 800 mm é posicionada com seu centro equidistante de dois apoios localizados a uma distância b = 200 mm entre si. A extremidade B da barra é erguida a uma distância h_0 = 100 mm e liberada; a barra passa então a balançar sobre os apoios como mostrado na figura. Admitindo que o impacto em cada apoio seja perfeitamente plástico e que não haja deslizamento entre a barra e os apoios, determine (a) a altura h_1 alcançada pela extremidade A após o primeiro impacto, (b) a altura h_2 alcançada pela extremidade B após o segundo impacto.

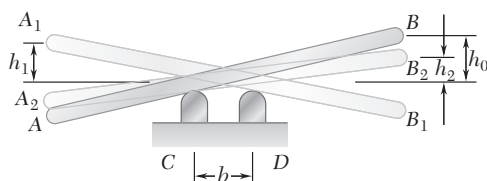



Figura P17.120

17.121 Uma pequena placa B é presa a uma corda que é enrolada em volta de um disco uniforme de 4 kg e raio R = 200 mm. Um cursor A de 1,5 kg é liberado do repouso e cai de uma distância h = 300 mm antes de atingir a placa B. Considerando que o impacto é perfeitamente plástico e desprezando o peso da placa, determine imediatamente após o impacto (a) a velocidade do cursor, (b) a velocidade angular do disco.

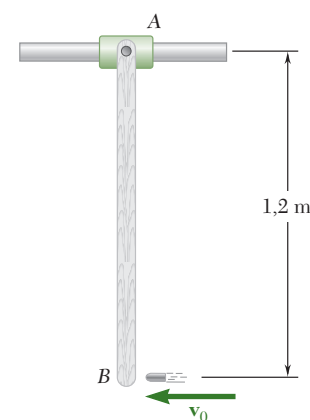
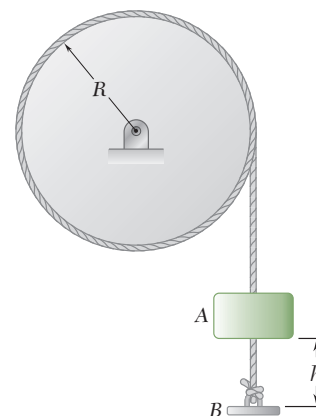



Figura P17.121

17.122 Resolva o Problema 17.121, considerando que o coeficiente de restituição entre A e B é 0,8.

17.123 Uma barra delgada *AB* é liberada do estado de repouso na posição mostrada na figura. Ela oscila para baixo até uma posição vertical e bate em uma segunda barra idêntica *CD*, que está em repouso sobre uma superfície sem atrito. Admitindo que o coeficiente de restituição entre as barras seja de 0,5, determine a velocidade da baixa *CD* imediatamente após o impacto.

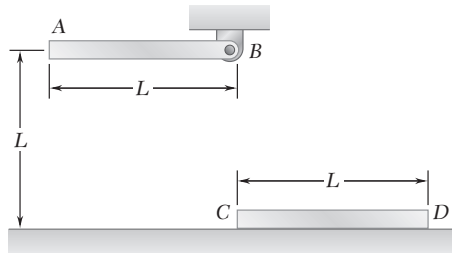



Figura P17.123

17.124 Resolva o Problema 17.123, admitindo que o impacto entre as barras seja perfeitamente elástico.

17.125 A prancha *CDE* tem massa de 15 kg e repousa sobre um pequeno pivô em *D*. A ginasta *A* de 55 kg está parada sobre a prancha em *C* quando o ginasta *B* de 70 kg pula de uma altura de 2,5 m e bate na prancha em *E*. Considerando um impacto perfeitamente plástico e que a ginasta *A* esteja de pé e absolutamente ereta, determine a altura a que a ginasta *A* subirá.

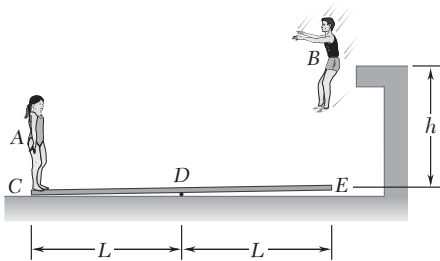



Figura P17.125

17.126 Resolva o Problema 17.125, considerando que os ginastas troquem de lugar, com a ginasta *A* pulando sobre a prancha e o ginasta *B* parado em *C*.

17.127 **e 17.128** O elemento *ABC* tem uma massa de 2,4 kg e está preso a um suporte com pino em *B*. Uma esfera *D* de 800 g bate na extremidade *C* do elemento *ABC* com uma velocidade vertical $\mathbf{v}_1$ de 3 m/s. Sabendo que $L = 750$ mm e que o coeficiente de restituição entre a esfera e o elemento *ABC* é 0,5, determine, imediatamente após o impacto, (*a*) a velocidade angular do elemento *ABC*, (*b*) a velocidade da esfera.

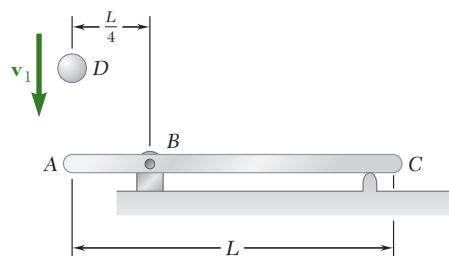



Figura *P17.127*

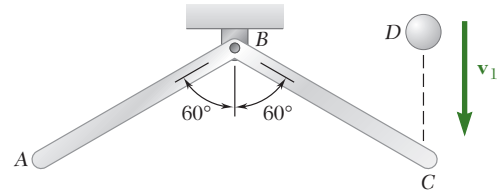



Figura P17.128

17.129 Uma barra delgada *CDE* de comprimento L e massa m é presa por um pino suporte em seu ponto médio *D*. Uma segunda e idêntica barra *AB* está girando em torno de um pino suporte em *A* com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ quando sua extremidade *B* bate na barra *CDE*. Representando por e o coeficiente de restituição entre as barras, determine a velocidade angular de cada barra imediatamente após o impacto.

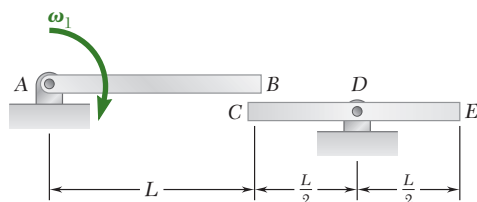



Figura P17.129

17.130 A barra delgada *AB* de 2,5 kg é liberada do estado de repouso na posição mostrada na figura e balança até uma posição vertical onde ela bate na barra delgada *CD*, de 1,5 kg. Sabendo que o coeficiente de restituição entre a saliência *K* presa à barra *AB* e a barra *CD* é 0,8, determine o ângulo máximo θ_m em que a barra *CD* irá girar após o impacto.

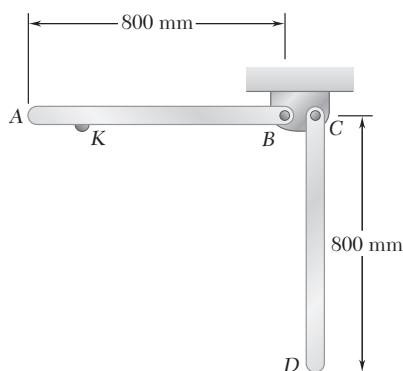



Figura P17.130

17.131 A esfera *A* de massa m e raio r rola sem deslizar com uma velocidade $\overline{\mathbf{v}}_1$ sobre uma superfície horizontal quando bate de frente com uma esfera idêntica *B* que está em estado de repouso. Representando por μ_k o coeficiente de atrito cinético entre as esferas e a superfície, desprezando o atrito entre as esferas e admitindo um impacto perfeitamente elástico, determine (*a*) as velocidades linear e angular de cada esfera imediatamente após o impacto, (*b*) a velocidade de cada esfera depois que elas começam a rolar uniformemente.

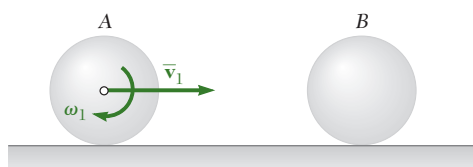



Figura P17.131

17.132 Uma pequena bola de borracha de raio r é atirada contra um piso rugoso com uma velocidade $\overline{\mathbf{v}}_A$ de intensidade v_0 e uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_A$ de intensidade ω_0. Observa-se que a bola salta de A para B, depois de B para A, depois de A para B etc. Admitindo um impacto perfeitamente elástico, determine a intensidade requerida ω_0 da velocidade angular em termos de $\overline{v}_0$ e r.

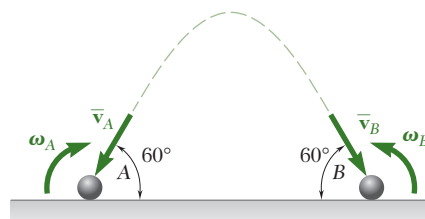



Figura P17.132

17.133 Em um jogo de sinuca, a bola A está rolando sem deslizar com uma velocidade $\overline{\mathbf{v}}_0$ quando bate obliquamente na bola B, que está em estado de repouso. Representando por r o raio de cada bola e por μ_k o coeficiente de atrito cinético, e considerando um impacto perfeitamente elástico, determine (a) as velocidades linear e angular de cada bola imediatamente após o impacto, (b) a velocidade da bola B após começar a rolar uniformemente.

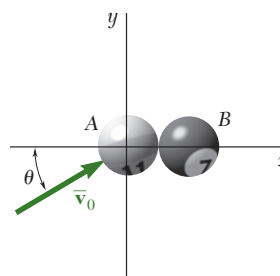



Figura P17.133

***17.134** Cada uma das barras AB e BC tem comprimento L = 400 mm e massa 1 kg. Determine a velocidade angular de cada barra imediatamente depois que o impulso $\mathbf{Q}\Delta t$ = (1,5 N · s)$\mathbf{i}$ é aplicado em C.

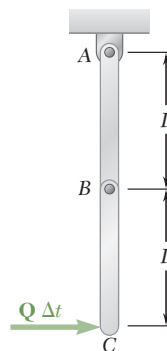



Figura P17.134

REVISÃO E RESUMO

Neste capítulo, consideramos novamente o método de trabalho e energia e o método de impulso e quantidade de movimento. Na primeira parte, estudamos o método de trabalho e energia e suas aplicações à análise do movimento de corpos rígidos e sistemas de corpos rígidos.

Princípio de trabalho e energia para um corpo rígido

Na Seção 17.2, expressamos primeiramente o princípio de trabalho e energia para um corpo rígido na forma

$$T_1 + U_{1\to 2} = T_2 \tag{17.1}$$

onde T_1 e T_2 representam os valores inicial e final da energia cinética do corpo rígido e representa o trabalho das *forças externas* que agem sobre o corpo rígido $U_{1\to 2}$.

Trabalho de uma força ou de um binário

Na Seção 17.3, recordamos a expressão encontrada no Cap. 13 para o trabalho de uma força **F** aplicada a um ponto A, a saber

$$U_{1\to 2} = \int_{s_1}^{s_2} (F \cos \alpha)\, ds \tag{17.3'}$$

onde F era a intensidade da força, α o ângulo entre a força e a direção do movimento de A e s a variável de integração que mede a distância percorrida por A ao longo de sua trajetória. Deduzimos também a expressão para o *trabalho de um binário de momento* **M** aplicado a um corpo rígido durante uma rotação em θ do corpo rígido:

$$U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\, d\theta \tag{17.5}$$

Energia cinética no movimento plano

Em seguida, deduzimos uma expressão para a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano (Seção 17.4). Escrevemos

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2 \tag{17.9}$$

onde $\bar{v}$ é a velocidade do centro de massa G do corpo, ω é a velocidade angular do corpo e $\bar{I}$ é o seu momento de inércia em relação a um eixo que passa por G, perpendicularmente ao plano de referência (Fig. 17.13) [Problema Resolvido 17.3]. Observamos que a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano pode ser separada em duas partes: (1) a energia cinética $\frac{1}{2}m\bar{v}^2$, associada ao movimento do centro de massa G do corpo e (2) a energia cinética $\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$, associada à rotação do corpo em torno de G.

Figura 17.13

Para um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo que passa por O com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, obtivemos

Energia cinética na rotação

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega^2 \tag{17.10}$$

onde I_O era o momento de inércia do corpo em relação ao eixo fixo. Observamos que o resultado obtido não se limita à rotação de placas planas ou de corpos simétricos em relação ao plano de referência, mas que é válido independentemente do formato do corpo ou da localização do eixo de rotação.

Sistemas de corpos rígidos

A Eq. (17.1) pode ser aplicada ao movimento de sistemas de corpos rígidos [Seção 17.5] desde que todas as forças envolvidas que agem sobre os vários corpos – tanto internas como externas ao sistema – estejam incluídas no cálculo de $U_{1\to2}$. Entretanto, no caso de sistemas constituídos de elementos conectados por pinos, ou blocos e polias conectados por cabos inextensíveis, ou transmissões por engrenagens, os pontos de aplicação das forças internas percorrem distâncias iguais e o trabalho dessas forças se cancela [Problemas Resolvidos 17.1 e 17.2].

Conservação de energia

Quando um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, move-se sob a ação de forças conservativas, o princípio de trabalho o energia pode ser expresso sob a forma

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{17.12}$$

que é conhecida como *princípio de conservação de energia* [Seção 17.6]. Esse princípio pode ser usado para resolver problemas envolvendo forças conservativas, tais como a força da gravidade ou a força exercida por uma mola [Problemas Resolvidos 17.4 e 17.5]. Todavia, quando for necessário determinar uma reação, o princípio de conservação de energia deve ser suplementado pela aplicação do princípio de d'Alembert [Problema Resolvido 17.4].

Potência

Na Seção 17.7, estendemos o conceito de potência a um corpo rotativo sujeito a um binário, escrevendo

$$\text{Potência} = \frac{dU}{dt} = \frac{M\,d\theta}{dt} = M\omega \tag{17.13}$$

onde M é a intensidade do binário e ω é a velocidade angular do corpo.

A parte intermediária do capítulo foi dedicada ao método de impulso e quantidade de movimento e sua aplicação à resolução de vários tipos de problemas envolvendo o movimento plano de placas rígidas e corpos rígidos simétricos em relação ao plano de referência.

Princípio de impulso e quantidade de movimento para um corpo rígido

Primeiro, recordamos o *princípio de impulso e quantidade de movimento* como foi deduzido na Seção 14.9 para um sistema de partículas e o aplicamos ao *movimento de um corpo rígido* [Seção 17.8]. Escrevemos

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\to2} = \\ = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \tag{17.14}$$

Em seguida, mostramos que, para uma placa rígida ou um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência, o sistema de quantidades de movimento das partículas constituintes do corpo é equivalente a um vetor $m\bar{\mathbf{v}}$ ligado ao centro de massa G do corpo e a um binário $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 17.14). O vetor $m\bar{\mathbf{v}}$ é associado à translação do corpo com G e representa a *quantidade de movimento linear* do corpo, enquanto o binário $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ corresponde à rotação do corpo em torno de G e representa a *quantidade de movimento angular* do corpo em relação a um eixo passando por G.

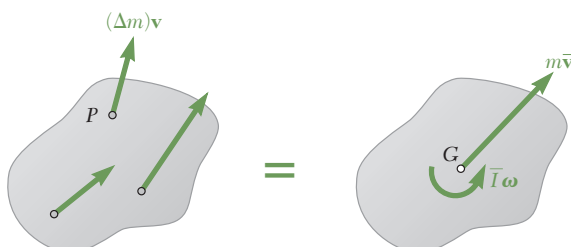



Figura 17.14

A Eq. (17.14) pode ser expressa graficamente como mostra a Fig. 17.15, desenhando-se três diagramas que representam, respectivamente, o sistema de quantidades de movimentos iniciais do corpo, os impulsos das forças externas que agem sobre o corpo e o sistema de quantidades de movimentos finais do corpo.

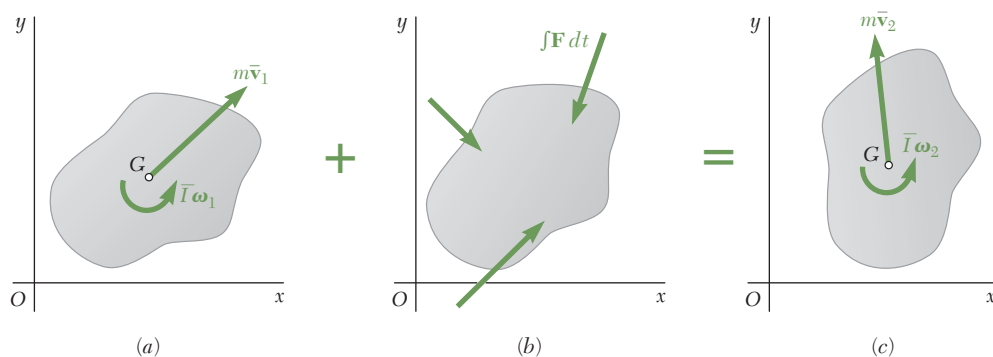



Figura 17.15

Somando-se e igualando, respectivamente, os *componentes em x,* os *componentes em y* e os *momentos em relação a um dado ponto qualquer* dos vetores mostrados naquela figura, obtemos três equações de movimento que podem ser resolvidas para as incógnitas desejadas [Problemas Resolvidos 17.6 e 17.7].

Em problemas que tratam de diversos corpos rígidos conectados [Seção 17.9], cada corpo pode ser considerado separadamente [Problema Resolvido 17.6] ou, se mais de três incógnitas estiverem envolvidas, o princípio de impulso e quantidade de movimento pode ser aplicado

a todo o sistema, considerando apenas os impulsos das forças externas [Problema Resolvido 17.8].

Conservação da quantidade de movimento angular

Quando as linhas de ação de todas as forças externas que agem sobre um sistema de corpos rígidos passam por um dado ponto O, a quantidade de movimento angular do sistema em relação a O conserva-se [Seção 17.10]. Sugeriu-se que os problemas envolvendo a conservação da quantidade de movimento angular fossem resolvidos pelo método geral descrito anteriormente [Problema Resolvido 17.8]

Movimento impulsivo

A última parte do capítulo foi dedicada ao *movimento impulsivo* e ao *impacto excêntrico* de corpos rígidos. Na Seção 17.11, relembramos que o método de impulso e quantidade de movimento é o único método praticável para a resolução de problemas que envolvem o movimento impulsivo e que o cálculo de impulsos em tais problemas é particularmente simples [Problema Resolvido 17.9].

Impacto excêntrico

Na Seção 17.12, recordamos que o impacto excêntrico de dois corpos rígidos é definido como um impacto em que os centros de massa dos corpos em colisão *não* estão localizados na linha de impacto. Em tal situação, mostrou-se que ainda é válida uma relação similar àquela deduzida no Cap. 13 para o impacto central de duas partículas envolvendo o coeficiente de restituição e, mas que *as velocidades dos pontos A e B onde há contato durante o impacto devem ser usadas.* Temos

$$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e[(v_A)_n - (v_B)_n] \qquad (17.19)$$

onde $(v_A)_n$ e $(v_B)_n$ são os componentes ao longo da linha de impacto das velocidades de A e B antes do impacto e $(v'_A)_n$ e $(v'_B)_n$ são seus componentes depois do impacto (Fig. 17.16). A Eq. (17.19) é aplicável não apenas quando os corpos em colisão movem-se livremente após o impacto, mas também quando os corpos estão parcialmente restringidos em seu movimento. Ela deve ser usada em conjunto com uma ou várias outras equações obtidas pela aplicação do princípio de impulso e quantidade de movimento [Problema Resolvido 17.10]. Também consideramos problemas em que o método de impulso e quantidade de movimento e o método de trabalho e energia podem ser combinados [Problema Resolvido 17.11].

(*a*) Antes do impacto

(*b*) Depois do impacto

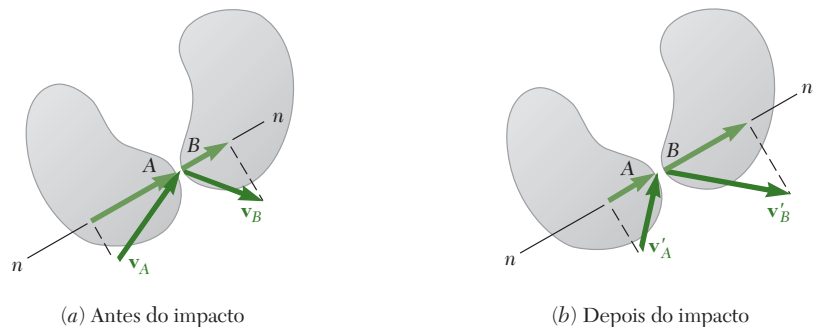



Figura 17.16

PROBLEMAS DE REVISÃO

17.135 O movimento de uma barra delgada AB de 250 mm é guiada por pinos em A e B que deslizam livremente em uma ranhura feita em uma placa vertical como mostrada na figura. Sabendo que a barra tem uma massa de 2 kg e é liberada do repouso quando $\theta = 0$, determine as reações em A e B quando $\theta = 90°$.

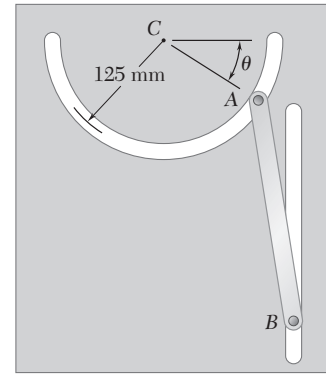



Figura P17.135

17.136 Um disco uniforme de espessura constante, inicialmente em estado de repouso, é posto em contato com a esteira mostrada na figura, que se move a uma velocidade constante $v = 25$ m/s. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o disco e a esteira é de 0,15, determine (a) o número de revoluções executadas pelo disco antes dele atingir uma velocidade angular constante, (b) o tempo requerido para o disco atingir aquela velocidade angular constante.

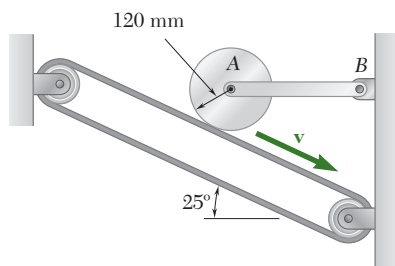



Figura P17.136

17.137 Resolva o Problema 17.136, considerando que a direção do movimento da esteira é revertido.

17.138 Uma barra delgada e uniforme é colocada no canto B e é feito um leve movimento no sentido horário. Considerando que o canto é agudo e torna-se levemente incorporado na extremidade da barra, tal que o coeficiente estático em B é muito grande, determine (a) o ângulo β por meio do qual a barra irá girar até que esta perde o contato com o canto, (b) a velocidade correspondente da extremidade A.

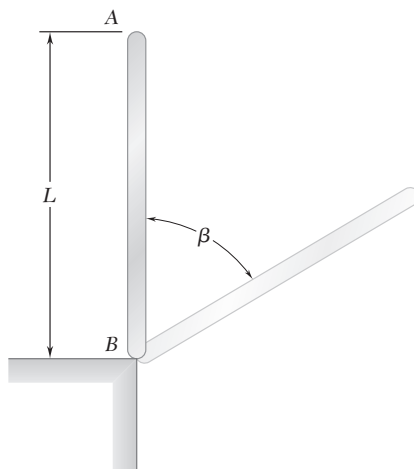



Figura P17.138

17.139 Uma bala B de 35 g é disparada com velocidade de 400 m/s no lado de um painel quadrado de 3 kg sustentado por um pino em A como mostrado na figura. Sabendo que o painel está inicialmente em repouso, determine as componentes da reação em A após o painel ter girado 90°.

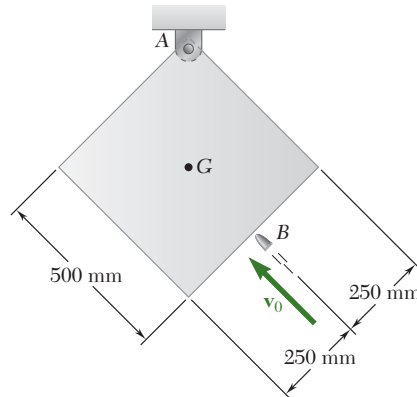



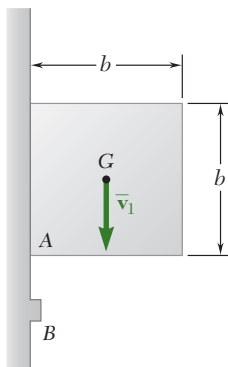
Figura P17.139

17.140 Um bloco quadrado de massa m está caindo com velocidade $\overline{\mathbf{v}}_1$ quando bate em um pequeno anteparo em B. Considerando que o impacto entre o canto A e o anteparo B é perfeitamente plástico, determine imediatamente após o impacto (a) a velocidade angular do bloco, (b) a velocidade de seu centro de massa G.

Figura P17.140

17.141 Resolva o Problema 17.140, considerando que o impacto entre o canto A e o anteparo B é perfeitamente elástico.

17.142 Uma barra AB de 3 kg está presa por um pino em D a uma placa quadrada de 4 kg, que pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Sabendo que a velocidade angular da placa é de 120 rpm quando a barra está na vertical, determine (a) a velocidade angular da placa depois da barra ter balançado até uma posição horizontal e chegar ao repouso contra o pino C, (b) a energia perdida durante o impacto plástico em C.

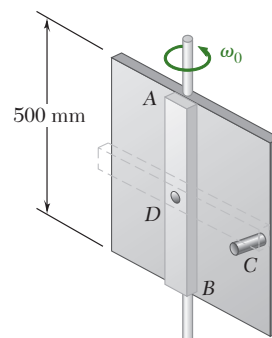



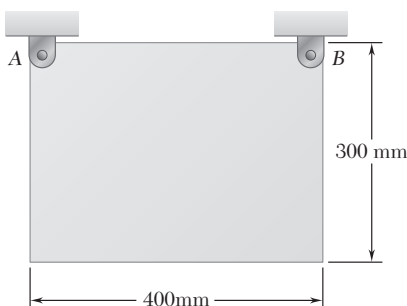
Figura P17.142

17.143 Uma placa retangular de 300 × 400 mm é suspensa por pinos em A e B. O pino em B é removido e a placa balança livremente em torno do pino A. Determine (a) a velocidade angular da placa após ela ter girado 90°, (b) a máxima velocidade angular atingida pela placa enquanto balança livremente.

Figura P17.143

17.144 Os discos A e B são feitos do mesmo material e são da mesma espessura; eles podem girar livremente sobre o eixo vertical. O disco B está em repouso quando é solto sobre o disco A, que está girando com uma velocidade de 500 rpm. Sabendo que o disco A tem uma massa de 10 kg, determine (*a*) a velocidade angular final dos discos, (*b*) a variação na energia cinética do sistema.

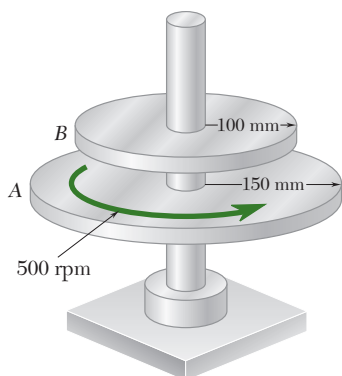



Figura *P17.144*

17.145 A que altura h acima do seu centro de massa G uma bola de bilhar de raio r deve ser golpeada horizontalmente por um taco para começar a rolar sem deslizar?

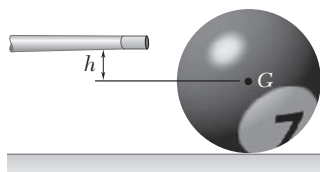



Figura P17.145

17.146 Uma grande esfera de 1,5 kg com raio r = 100 mm é solta dentro de uma cesta leve na extremidade de uma barra fina e uniforme de massa 1 kg e comprimento L = 250 mm como mostrado na figura. Imediatamente antes do impacto, a velocidade angular da barra é 3 rad/s no sentido anti-horário e a velocidade da esfera é 0,5 m/s para baixo. Considerando que a esfera se fixa na cesta, determine após o impacto, (*a*) a velocidade angular da barra e da esfera, (*b*) os componentes da reação em A.

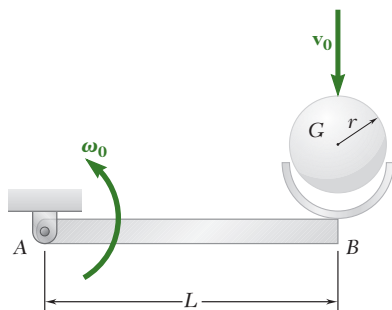



Figura P17.146

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

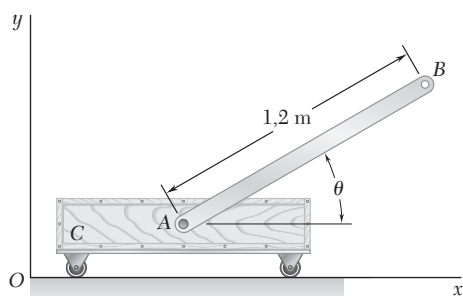



Figura P17.C1

17.C1 A barra AB tem massa de 3 kg e está presa um carrinho C de 5 kg em A. Sabendo que o sistema é liberado do estado de repouso quando $\theta = 30°$ e desprezando o atrito, use um programa de computador para calcular a velocidade do carrinho e a velocidade da extremidade B da barra para valores de θ variando de $+30°$ a $-90°$. Determine o valor de θ, em que a velocidade do carrinho para a esquerda é máxima, e o valor correspondente dessa velocidade.

17.C2 A barra delgada uniforme AB de comprimento $L = 800$ mm e massa 5 kg repousa sobre um rolete em D e está presa a um cursor de massa desprezível que pode deslizar livremente sobre a barra vertical EF. Sabendo que $a = 200$ mm e que a barra é liberada do estado de repouso quando $\theta = 0$, use um programa de computador para calcular e traçar um gráfico da velocidade angular da barra e da velocidade da extremidade A para valores de θ variando de 0 a 50°. Determine a velocidade angular máxima da barra e o valor correspondente de θ.

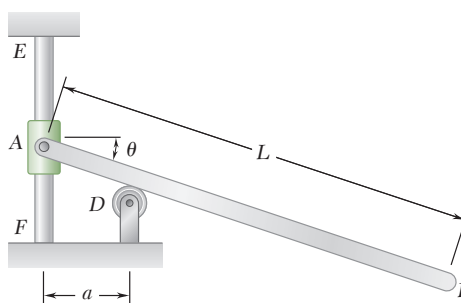



Figura P17.C2

17.C3 Uma esfera uniforme de 250 mm de raio rola sobre uma série de barras horizontais paralelas igualmente espaçadas a uma distância d. À medida que ela gira sem deslizar em torno uma dada barra, a esfera bate na próxima barra e começa a girar em torno dela sem deslizar até bater na barra seguinte e assim por diante. Admitindo um impacto perfeitamente plástico e sabendo que a esfera tem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0$ de 1,5 rad/s quando seu centro de massa G está diretamente acima da barra A, use um programa de computador para calcular, para valores de espaçamento d variando de 25 a 150 m, (a) a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ da esfera quando G passar diretamente acima da barra B, (b) o número de barras sobre as quais a esfera rolará após deixar barra A.

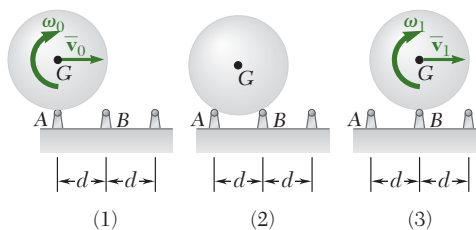



Figura P17.C3

17.C4 O cursor C tem massa de 2,5 kg e pode deslizar sem atrito sobre a barra AB. Uma mola de constante 750 N/m e comprimento indeformado $r_0 = 500$ mm é presa ao cursor e ao cilindro B como mostrado na figura. Sabe-se que o momento de inércia de massa total da barra, do cubo e da mola é de 0,3 kg · m^2 em relação a B. Inicialmente, o cursor é mantido a uma distância de 500 mm do eixo de rotação por um pequeno pino preso à barra. O pino é removido subitamente, quando o conjunto está girando em um plano horizontal com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0$ de 10 rad/s. Representando por r a distância entre o cursor e o eixo de rotação, use um programa de computador para calcular e traçar o gráfico da velocidade angular do conjunto e da velocidade do cursor em relação à barra para valores de r variando de 500 a 700 mm. Determine o valor máximo de r no movimento subsequente.

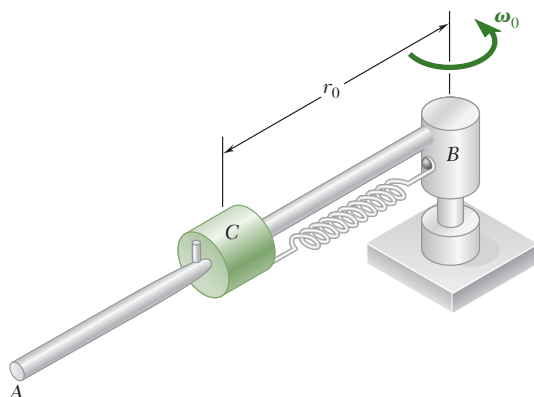



Figura P17.C4

17.C5 Cada uma das duas barras delgadas idênticas mostradas tem um comprimento $L = 750$ mm. Sabendo que o sistema é liberado do estado de repouso quando as barras estão em posição horizontal, use um programa de computador para calcular e traçar um gráfico da velocidade angular da barra AB e a velocidade do ponto D para valores de θ variando de 0 a 90°.

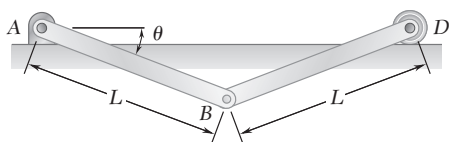



Figura P17.C5

Embora os princípios gerais que você aprendeu nos capítulos anteriores possam ser usados novamente para resolver problemas que envolvem o movimento tridimensional de corpos rígidos, essa resolução requer uma nova abordagem e é bem mais complexa que a de problemas bidimensionais. Um exemplo é a determinação das forças que atuam no braço robótico do ônibus espacial.

CAPÍTULO 18

Cinética de corpos rígidos tridimensionais

18 Cinética de corpos rígidos tridimensionais

*18.1 Introdução

Nos Caps. 16 e 17, tratamos do movimento plano de corpos rígidos e de sistemas de corpos rígidos. No Cap. 16 e na segunda metade do Cap. 17 (método de quantidade de movimento), nosso estudo ficou ainda mais restrito ao movimento de placas planas e corpos simétricos em relação a um plano de referência. Todavia, muitos dos resultados fundamentais obtidos nesses dois capítulos permanecem válidos no caso do movimento de um corpo rígido tridimensional.

Por exemplo, as duas equações fundamentais

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

nas quais se baseou a análise do movimento plano de um corpo rígido, permanecem válidas no caso mais geral do movimento de um corpo rígido. Conforme indicado na Seção 16.2, essas equações expressam que o sistema de forças externas é equipolente ao sistema que consiste do vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e ao binário de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.1). Entretanto, a relação $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$, que nos possibilitou determinar a quantidade de movimento angular de uma placa rígida e desempenhou um papel importante na solução de problemas envolvendo o movimento plano de placas e corpos simétricos em relação a um plano de referência, deixa de valer no caso de corpos assimétricos ou de movimento tridimensional. Assim sendo, na primeira parte do capítulo, na Seção 18.2, será desenvolvido um método mais geral para o cálculo da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo rígido tridimensional.

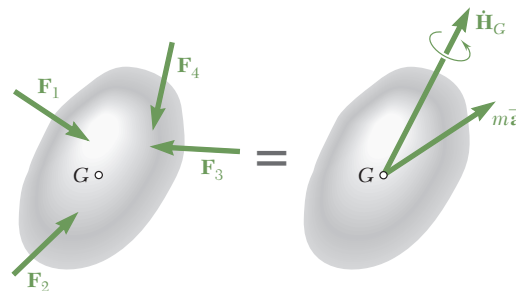



Figura 18.1

Analogamente, embora o aspecto principal do método de impulso e quantidade de movimento discutido na Seção 17.7, ou seja, a redução das quantidades de movimento das partículas de um corpo rígido a um vetor de quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$ ligado ao centro de massa G do corpo e a um binário de quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$, permaneça válido, a relação $\mathbf{H}_G = \bar{I}\boldsymbol{\omega}$ deve ser descartada e substituída pela relação mais geral desenvolvida na Seção 18.2, antes que esse método possa ser aplicado ao movimento tridimensional de um corpo rígido (Seção 18.3).

Notemos também que o princípio de trabalho e energia (Seção 17.2) e o princípio de conservação da energia (Seção 17.6) ainda se aplicam ao caso do movimento de um corpo rígido tridimensional. Entretanto, a expressão obtida na Seção 17.4 para a energia cinética de um corpo rígido em movimento plano será substituída por uma nova expressão desenvolvida na Seção 18.4 para um corpo rígido em movimento tridimensional.

Na segunda parte do capítulo, você aprenderá primeiro a determinar a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo rígido tridimensional usando um referencial rotativo em relação ao quais os momentos e produtos de inércia mantêm-se constantes (Seção 18.5). As Eqs. (18.1) e (18.2) serão, então, expressas como equações baseadas em diagrama de corpo livre, podendo ser usadas para resolver diversos problemas que envolvem o movimento tridimensional de corpos rígidos (Seções de 18.6 a 18.8).

A última parte do capítulo (Seções de 18.9 a 18.11) é dedicada ao estudo do movimento do giroscópio ou, de modo mais geral, de um corpo com simetria axial e com um ponto fixo localizado sobre seu eixo de simetria. Na Seção 18.10, será considerado o caso particular da precessão em regime permanente de um giroscópio, e, na Seção 18.11, será analisado o movimento de um corpo com simetria axial livre de forças, exceto por seu próprio peso.

*18.2 Quantidade de movimento angular de um corpo rígido tridimensional

Nesta seção, você verá como a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo em torno de seu centro de massa G pode ser determinada a partir da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo no caso de movimento tridimensional.

De acordo com a Eq. (14.24), a quantidade de movimento angular do corpo em relação a G pode ser expressa como

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}'_i \, \Delta m_i) \tag{18.3}$$

onde $\mathbf{r}'_i$ e $\mathbf{v}'_i$ representam, respectivamente, o vetor posição e a velocidade da partícula P_i, de massa Δm_i, em relação ao referencial centroidal $Gxyz$ (Fig. 18.2).

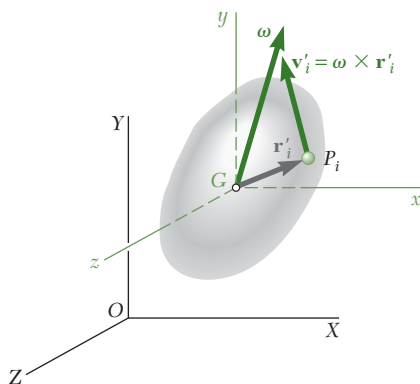



Figura 18.2

Mas $\mathbf{v}'_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i$ onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular do corpo no instante considerado. Substituindo na Eq. (18.3), temos

$$\mathbf{H}_G = \sum_{i=1}^{n} [\mathbf{r}'_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)\, \Delta m_i]$$

Relembrando a regra para a determinação dos componentes retangulares de um produto vetorial (Seção 3.5), obtemos as seguintes expressões para o componente x da quantidade de movimento angular:

$$\begin{aligned} H_x &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_z - z_i(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i)_y]\, \Delta m_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} [y_i(\omega_x y_i - \omega_y x_i) - z_i(\omega_z x_i - \omega_x z_i)]\, \Delta m_i = \\ &= \omega_x \sum_i (y_i^2 + z_i^2)\, \Delta m_i - \omega_y \sum_i x_i y_i\, \Delta m_i - \omega_z \sum_i z_i x_i\, \Delta m_i \end{aligned}$$

Substituindo as somas por integrais nesta expressão e nas duas expressões similares que são obtidas para H_y e H_z, temos

$$\begin{aligned} H_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int xy\, dm - \omega_z \int zx\, dm \\ H_y &= -\omega_x \int xy\, dm + \omega_y \int (z^2 + x^2)\, dm - \omega_z \int yz\, dm \\ H_z &= -\omega_x \int zx\, dm - \omega_y \int yz\, dm + \omega_z \int (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \tag{18.4}$$

Notemos que as integrais que contêm quadrados representam os *momentos centroidais de inércia de massa* do corpo em relação aos eixos x, y e z, respectivamente (Seção 9.11); temos

$$\bar{I}_x = \int (y^2 + z^2)\, dm \qquad \bar{I}_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \\ \bar{I}_z = \int (x^2 + y^2)\, dm \tag{18.5}$$

Analogamente, as integrais que contêm produtos de coordenadas representam os *produtos centroidais de inércia de massa* do corpo (Seção 9.16); temos

$$\bar{I}_{xy} = \int xy\, dm \qquad \bar{I}_{yz} = \int yz\, dm \qquad \bar{I}_{zx} = \int zx\, dm \tag{18.6}$$

Substituindo (18.5) e (18.6) em (18.4), obtemos os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo em relação ao seu centro de massa:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\, \omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\, \omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

As relações (18.7) mostram que a operação que transforma o vetor $\boldsymbol{\omega}$ no vetor $\mathbf{H}_G$ (Fig. 18.3) é caracterizada pela matriz de momentos e produtos de inércia.

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_x & -\bar{I}_{xy} & -\bar{I}_{xz} \\ -\bar{I}_{yx} & \bar{I}_y & -\bar{I}_{yz} \\ -\bar{I}_{zx} & -\bar{I}_{zy} & \bar{I}_z \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

Figura 18.3

A matriz (18.8) define o *tensor de inércia* do corpo em seu centro de massa G.* Uma nova matriz de momentos e produtos de inércia seria obtida se um sistema de eixos diferente fosse usado. No entanto, a transformação caracterizada por essa nova matriz ainda seria a mesma. Claramente, a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ correspondente a uma dada velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ é independente da escolha dos eixos de coordenadas. Conforme mostrado nas Seções 9.17 e 9.18, sempre é possível selecionar um sistema de eixos $Gx'y'z'$ denominados *eixos principais de inércia,* em relação aos quais todos os produtos de inércia de um dado corpo são nulos. Nessa situação, a matriz (18.8) assume a forma diagonal.

$$\begin{pmatrix} \bar{I}_{x'} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{I}_{y'} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{I}_{z'} \end{pmatrix} \tag{18.9}$$

onde $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ representam os *momentos centroidais principais de inércia* do corpo, e as relações (18.7) se reduzem a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Observamos que, se os três momentos centroidais principais de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$ forem iguais, os componentes $H_{x'}$, $H_{y'}$, $H_{z'}$ da quantidade de movimento angular em relação a G serão proporcionais aos componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$, $\omega_{z'}$ da velocidade angular, e os vetores $\mathbf{H}_G$ e $\boldsymbol{\omega}$ serão colineares. Em geral, porém, os momentos de inércia principais serão diferentes e os vetores $\mathbf{H}_G$ e $\boldsymbol{\omega}$ *terão direções diferentes,* exceto quando dois dos três componentes de $\boldsymbol{\omega}$ forem nulos, isto é, quando $\boldsymbol{\omega}$ estiver orientado ao longo de um dos eixos de coordenadas. Logo, *a quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_G$ *de um corpo rígido e sua velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ *têm a mesma direção se, e somente se,* $\boldsymbol{\omega}$ *estiver orientado ao longo de um eixo principal de inércia*.**

---

* Fazendo $\bar{I}_x = I_{11}$, $\bar{I}_y = I_{22}$, $\bar{I}_z = I_{33}$ e $-\bar{I}_{xy} = I_{12}$, $-\bar{I}_{xz} = I_{13}$ etc., podemos escrever o tensor de inércia (18.8) na forma padrão

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}$$

Representando por H_1, H_2 e H_3 os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ e por ω_1, ω_2 e ω_3 os componentes da velocidade angular ω, podemos escrever as relações (18.7) sob a forma

$$H_i = \sum_j I_{ij}\omega_j$$

onde i e j assumem os valores 1, 2, 3. As grandezas I_{ij} são denominadas *componentes* do tensor de inércia. Como $I_{ij} = I_{ji}$, o tensor de inércia é um *tensor simétrico de segunda ordem*.

** No caso particular, em que $\bar{I}_{x'} = \bar{I}_{y'} = \bar{I}_{z'}$, qualquer linha que passe por G pode ser considerada como um eixo principal de inércia, e os vetores $\mathbf{H}_G$ e $\boldsymbol{\omega}$ são sempre colineares.

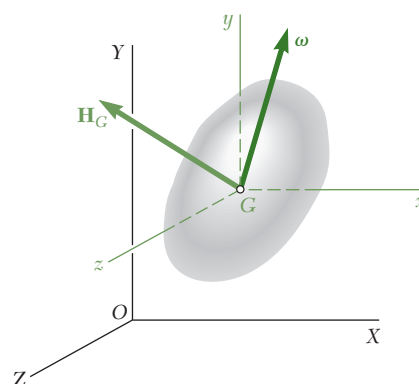
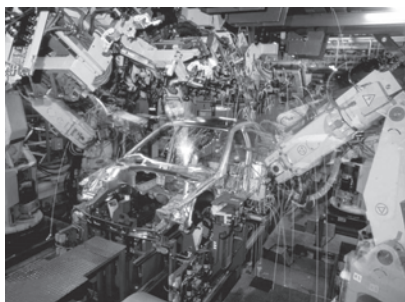



Foto 18.1 O projeto de um robô soldador para uma linha de montagem de automóveis requer um estudo tridimensional tanto de cinemática quanto de cinética.

Como essa condição é satisfeita no caso do movimento plano de um corpo rígido simétrico em relação ao plano de referência, fomos capazes, nas Seções 16.3 e 17.8, de representar a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um dado corpo pelo vetor $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$. Entretanto, devemos compreender que esse resultado não pode ser estendido ao caso do movimento plano de um corpo assimétrico ou ao caso do movimento tridimensional de um corpo rígido. Exceto quando o vetor $\boldsymbol{\omega}$ estiver orientado ao longo de um eixo principal de inércia, a quantidade de movimento angular e a velocidade angular de um corpo rígido terão direções diferentes, e a relação (18.7) ou (18.10) deverá ser usada para determinar $\mathbf{H}_G$ a partir de $\boldsymbol{\omega}$.

Redução das quantidades de movimento das partículas de um corpo rígido a um vetor de quantidade de movimento e a um binário em G. Vimos na Seção 17.8 que o sistema formado pelas quantidades de movimento das várias partículas de um corpo rígido pode ser reduzido a um vetor $\mathbf{L}$ ligado ao centro de massa G do corpo, representando a quantidade de movimento linear do corpo, e a um binário $\mathbf{H}_G$, representando a quantidade de movimento angular do corpo em relação a G (Fig. 18.4). Estamos, agora, em condições de determinar o vetor $\mathbf{L}$ e o binário $\mathbf{H}_G$ no caso mais geral de movimento tridimensional de um corpo rígido. Como no caso do movimento bidimensional considerado na Seção 17.8, a quantidade de movimento linear $\mathbf{L}$ do corpo é igual ao produto $m\overline{\mathbf{v}}$ de sua massa m pela velocidade $\overline{\mathbf{v}}$ de seu centro de massa G. A quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$, porém, não pode mais ser obtida multiplicando-se a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo pelo escalar $\bar{I}$ simplesmente; ela deve agora ser obtida a partir dos componentes de $\boldsymbol{\omega}$ e dos momentos e produtos centroidais de inércia do corpo, usando-se a Eq. (18.7) ou (18.10).

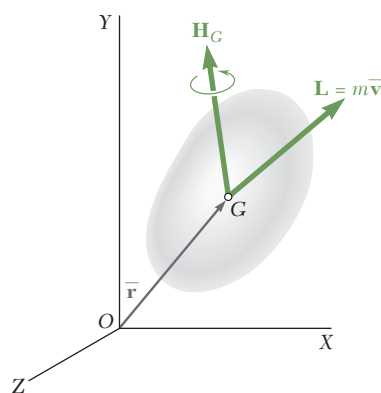



Figura 18.4

Devemos notar também que, uma vez determinadas a quantidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ e a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo rígido, sua quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ em relação a um ponto dado qualquer O pode ser obtida pela adição dos momentos em relação a O do vetor $m\overline{\mathbf{v}}$ e do binário $\mathbf{H}_G$. Escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \overline{\mathbf{r}} \times m\overline{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

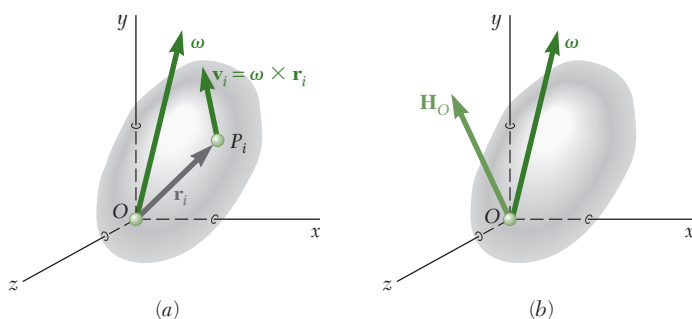



Figura 18.5

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido restrito a girar em torno de um ponto fixo. No caso particular de um corpo rígido restrito a girar no espaço tridimensional em torno de um ponto fixo O (Fig. 18.5*a*), às vezes é conveniente determinar a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação ao ponto fixo O. Embora $\mathbf{H}_O$ possa ser obtido calculando-se primeiramente $\mathbf{H}_G$ do modo descrito anteriormente e usando em seguida a Eq. (18.11), com frequência é vantajoso determinar $\mathbf{H}_O$ diretamente a partir da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo e de seus momentos e produtos de inércia em relação a um referencial $Oxyz$ centrado no ponto fixo O. Retomando a Eq. (14.7), escrevemos

$$\mathbf{H}_O = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \,\Delta m_i) \tag{18.12}$$

onde $\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ representam, respectivamente, o vetor posição e a velocidade da partícula P_i em relação ao referencial fixo $Oxyz$. Substituindo $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ e depois operações semelhantes às usadas na primeira parte desta seção, deduzimos que os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ (Fig. 18.5*b*) são dados pelas relações

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\,\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\,\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\,\omega_z \end{aligned} \tag{18.13}$$

onde os momentos de inércia I_x, I_y, I_z e os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} são calculados em relação ao referencial $Oxyz$ centrado no ponto fixo O.

*18.3 Aplicação do princípio de impulso e quantidade de movimento ao movimento tridimensional de um corpo rígido

Antes que possamos aplicar a equação fundamental (18.2) à resolução de problemas envolvendo o movimento tridimensional de um corpo rígido, devemos aprender a calcular a derivada do vetor $\mathbf{H}_G$. Isso será feito na Seção 18.5. Entretanto, os resultados obtidos na seção anterior podem ser usados de imediato para resolver problemas pelo método de impulso e quantidade de movimento.

Relembrando que o sistema formado pelas quantidades de movimento das partículas de um corpo rígido se reduz a um vetor de quan-

Foto 18.2 Como resultado da força impulsiva aplicada pela bola de boliche, um pino adquire tanto quantidade de movimento linear como quantidade de movimento angular.

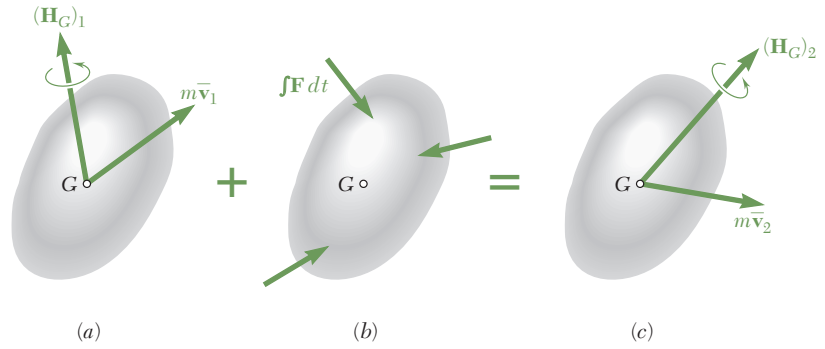



Figura 18.6

tidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ ligado ao centro de massa G do corpo e a um binário de quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$, representamos graficamente a relação

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\rightarrow 2} = \\ = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \tag{17.4}$$

por meio dos três esboços mostrados na Fig. 18.6. Para resolver um determinado problema, podemos usar esses esboços para escrever equações apropriadas de componentes e de momento, tendo em mente que os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ relacionam-se com os componentes da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ pelas Eqs. (18.7) da seção anterior.

Ao resolver problemas que tratam do movimento de um corpo que gira em torno de um ponto fixo O, será conveniente eliminar o impulso da reação em O escrevendo-se uma equação que envolve os momentos das quantidades de movimento e dos impulsos em relação a O. Relembremos que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação ao ponto fixo O pode ser obtida seja diretamente, a partir das Eqs. (18.13), seja pelo cálculo preliminar da quantidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ e da sua quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$, usando-se em seguida a Eq. (18.11).

*18.4 Energia cinética de um corpo rígido tridimensional

Considere um corpo rígido de massa m em movimento tridimensional. Recordemos da Seção 14.6 que, sendo a velocidade absoluta $\mathbf{v}_i$ de cada partícula P_i do corpo expressa como a soma da velocidade $\overline{\mathbf{v}}$ do centro de massa G do corpo e da velocidade $\mathbf{v}'_i$ da partícula relativamente a um referencial $Gxyz$ ligado a G e de orientação fixa (Fig. 18.7), a energia cinética do sistema de partículas constituintes do corpo rígido pode ser escrita sob a forma

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 \tag{18.14}$$

onde o último termo representa a energia cinética T' do corpo relativa ao referencial centroidal $Gxyz$. Como $v'_i = |\mathbf{v}'_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|$, escrevemos

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i'^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}'_i|^2\, \Delta m_i$$

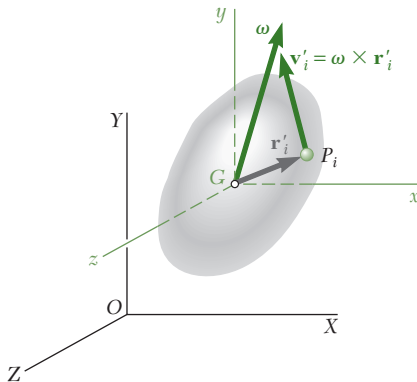



Figura 18.7

Expressando o quadrado em termos de componentes retangulares do produto vetorial e substituindo as somas por integrais, temos

$$T' = \tfrac{1}{2}\int[(\omega_x y - \omega_y x)^2 + (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2]dm =$$
$$= \tfrac{1}{2}[\omega_x^2\int(y^2 + z^2)dm + \omega_y^2\int(z^2 + x^2)dm + \omega_z^2\int(x^2 + y^2)dm - 2\omega_x\omega_y\int xy\,dm - 2\omega_y\omega_z\int yz\,dm - 2\omega_z\omega_x\int zx\,dm]$$

ou, considerando as relações (18.5) e (18.6)

$$T' = \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \qquad (18.15)$$

Substituindo em (18.14) a expressão (18.15) que acabamos de obter para a energia cinética do corpo relativa aos eixos centroidais, escrevemos

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_x\omega_x^2 + \bar{I}_y\omega_y^2 + \bar{I}_z\omega_z^2 - 2\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y - 2\bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z - 2\bar{I}_{zx}\omega_z\omega_x) \qquad (18.16)$$

Se os eixos de coordenadas são escolhidos de modo a coincidirem no instante considerado com os eixos principais x', y', z' do corpo, a relação obtida reduz-se a

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.17)$$

onde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidade do centro de massa
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidade angular
m = massa do corpo rígido
$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ = momentos centroidais principais de inércia

Os resultados que obtivemos possibilitam-nos aplicar ao movimento tridimensional de um corpo rígido os princípios de trabalho e energia (Seção 17.2) e conservação da energia (Seção 17.6).

Energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo. No caso particular de um corpo rígido girando no espaço tridimensional em torno de um ponto fixo O, a energia cinética do corpo pode ser expressa em termos de seus momentos e produtos de inércia em relação a eixos ligados a O (Fig. 18.8). Retomando a definição de energia cinética de sistema de partículas e substituindo $v_i = |\mathbf{v}_i| = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|$, escrevemos

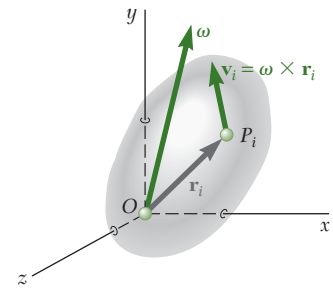
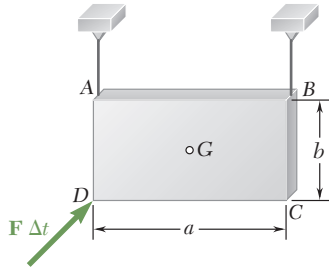
$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i|^2\,\Delta m_i \qquad (18.18)$$

Figura 18.8

Operações semelhantes àquelas usadas na dedução da Eq. (18.15) produzem

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 - 2I_{xy}\omega_x\omega_y - 2I_{yz}\omega_y\omega_z - 2I_{zx}\omega_z\omega_x) \qquad (18.19)$$

ou, caso os eixos principais x', y', z' do corpo na origem O sejam escolhidos como eixos de coordenadas

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.20)$$

PROBLEMA RESOLVIDO 18.1

Uma placa retangular de massa m suspensa por dois fios em A e B é atingida em D em uma direção perpendicular à placa. Representando por $\mathbf{F}\,\Delta t$ o impulso aplicado em D, determine, imediatamente após o impacto, (a) a velocidade do centro de massa G, (b) a velocidade angular da placa.

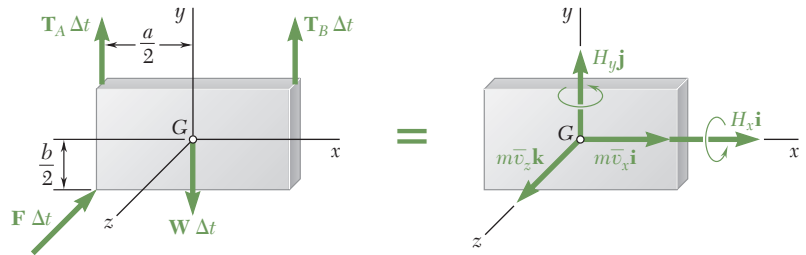
SOLUÇÃO

Admitindo que os fios permanecem sob tração e que os componentes $\bar{v}_y$ de $\bar{\mathbf{v}}$ e ω_z de $\boldsymbol{\omega}$ são nulos após o impacto, temos

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}$$

e como os eixos x, y e z são eixos principais de inércia,

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{12}mb^2\omega_x\mathbf{i} + \tfrac{1}{12}ma^2\omega_y\mathbf{j} \tag{1}$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Uma vez que as quantidades de movimento iniciais são nulas, o sistema dos impulsos deve ser equivalente ao sistema das quantidades de movimento finais:

a. Velocidade do centro de massa. Igualando os componentes dos impulsos e quantidades de movimento nas direções x e z

Componentes em x: $\quad 0 = m\bar{v}_x \qquad \bar{v}_x = 0$

Componentes em z: $\quad -F\,\Delta t = m\bar{v}_z \qquad \bar{v}_z = -F\,\Delta t/m$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{v}_x\mathbf{i} + \bar{v}_z\mathbf{k} \qquad \bar{\mathbf{v}} = -(F\,\Delta t/m)\mathbf{k} \quad ◀$$

b. Velocidade angular. Igualando os momentos dos impulsos e quantidades de movimento em relação aos eixos x e y:

Em relação ao eixo x: $\quad \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t = H_x$

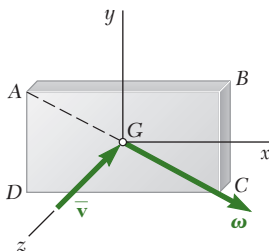
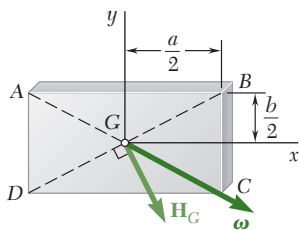
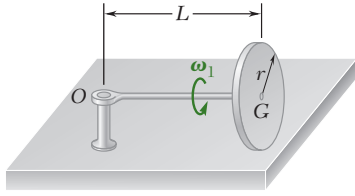
Em relação ao eixo z: $\quad -\tfrac{1}{2}aF\,\Delta t = H_y$

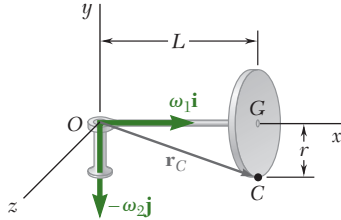
$$\mathbf{H}_G = H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}bF\,\Delta t\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}aF\,\Delta t\mathbf{j} \tag{2}$$

Comparando as Eqs. (1) e (2), concluímos que

$$\omega_x = 6F\,\Delta t/mb \qquad \omega_y = -6F\,\Delta t/ma$$
$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} \qquad \boldsymbol{\omega} = (6F\,\Delta t/mab)(a\mathbf{i} - b\mathbf{j}) \quad ◀$$

Observe que $\boldsymbol{\omega}$ é orientado ao longo da diagonal AC.

Observação: Igualando os componentes em y dos impulsos e quantidades de movimento e seus momentos em relação ao eixo z, obtemos duas equações adicionais que fornecem $T_A = T_B = \tfrac{1}{2}W$. Verificamos assim que os fios permanecem sob tração e que nossa hipótese estava correta.

PROBLEMA RESOLVIDO 18.2

Um disco homogêneo de raio r e massa m está montado sobre um eixo OG de comprimento L e massa desprezível. O eixo é pivotado no ponto fixo O e o disco é compelido a rolar sobre um piso horizontal. Sabendo que o disco gira no sentido anti-horário a uma taxa ω_1 em torno do eixo OG, determine (a) a velocidade angular do disco, (b) sua quantidade de movimento angular em relação a O, (c) sua energia cinética, (d) o vetor e binário em G equivalente às quantidades de movimento das partículas do disco.

SOLUÇÃO

a. Velocidade angular. À medida que o disco gira em torno do eixo OG, ele também gira juntamente com seu eixo em torno do eixo y a uma taxa ω_2 no sentido horário. Portanto, a velocidade angular total do disco é

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} - \omega_2 \mathbf{j} \qquad (1)$$

Para determinar ω_2, escrevemos que a velocidade do ponto C é nula:

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_C = 0$$
$$(\omega_1 \mathbf{i} - \omega_2 \mathbf{j}) \times (L\mathbf{i} - r\mathbf{j}) = 0$$
$$(L\omega_2 - r\omega_1)\mathbf{k} = 0 \qquad \omega_2 = r\omega_1/L$$

Substituindo o valor de ω_2 em (1): $\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{i} - (r\omega_1/L)\mathbf{j}$ ◀

b. Quantidade de movimento angular em relação a O. Admitindo que o eixo seja parte do disco, podemos considerar que o disco tem um ponto fixo em O. Como os eixos x, y e z são eixos principais de inércia para o disco,

$$H_x = I_x\omega_x = (\tfrac{1}{2}mr^2)\omega_1$$
$$H_y = I_y\omega_y = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)(-r\omega_1/L)$$
$$H_z = I_z\omega_z = (mL^2 + \tfrac{1}{4}mr^2)0 = 0$$
$$\mathbf{H}_O = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} - m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(r\omega_1/L)\mathbf{j} \quad ◀$$

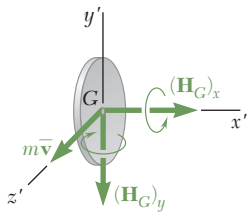
c. Energia cinética. Usando os valores obtidos para os momentos de inércia e os componentes de $\boldsymbol{\omega}$, temos

$$T = \tfrac{1}{2}(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2) = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}mr^2\omega_1^2 + m(L^2 + \tfrac{1}{4}r^2)(-r\omega_1/L)^2]$$
$$T = \tfrac{1}{8}mr^2\left(6 + \frac{r^2}{L^2}\right)\omega_1^2 \quad ◀$$

d. Vetor e binário de quantidade de movimento em G. O vetor de quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$ e o binário de quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ são

$$m\bar{\mathbf{v}} = mr\omega_1\mathbf{k} \quad ◀$$

e

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_{x'}\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_{y'}\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_{z'}\omega_z\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\mathbf{i} + \tfrac{1}{4}mr^2(-r\omega_1/L)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você aprendeu a *calcular a quantidade de movimento angular de um corpo rígido tridimensional* e a aplicar o princípio de impulso e quantidade de movimento ao movimento tridimensional de um corpo rígido. Aprendeu também a calcular a *energia cinética de um corpo rígido tridimensional.* É importante que você tenha em mente que, exceto em situações muito especiais, a quantidade de movimento angular de um corpo rígido tridimensional *não pode* ser expressa pelo produto $\bar{I}\boldsymbol{\omega}$ e que, portanto, *não terá a mesma direção da velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ (Fig. 18.3).

1. Para calcular a quantidade de movimento H_G de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa G, você precisa primeiro determinar a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo em relação a um sistema de eixos *centrado em G e de orientação fixa.* Como nesta seção você será solicitado a determinar a quantidade de movimento angular do corpo *em um dado instante apenas,* selecione o sistema de eixos mais conveniente para seus cálculos.

a. Se os eixos principais de inércia do corpo em G são conhecidos, use-os como eixos de coordenadas x', y' e z', pois os respectivos produtos de inércia do corpo serão iguais a zero. Decomponha $\boldsymbol{\omega}$ em componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ ao longo desses eixos e calcule os momentos principais de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$ e $\bar{I}_{z'}$. Os respectivos componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ são

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

b. Se os eixos principais de inércia do corpo em G são desconhecidos, você deve usar as Eqs. (18.7) para determinar os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$. Essas equações requerem o cálculo preliminar dos *produtos de inércia* do corpo, bem como dos seus momentos de inércia em relação aos eixos selecionados.

c. A intensidade e os cossenos diretores de H_G são obtidos a partir de fórmulas similares àquelas usadas em Estática [Seção 2.12]. Temos

$$H_G = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}$$

$$\cos\theta_x = \frac{H_x}{H_G} \qquad \cos\theta_y = \frac{H_y}{H_G} \qquad \cos\theta_z = \frac{H_z}{H_G}$$

d. Uma vez determinado H_G, você pode obter a quantidade de movimento angular do corpo *em relação a um dado ponto qualquer O,* observando, na Fig. 18.4 que

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \tag{18.11}$$

onde $\bar{\mathbf{r}}$ é o vetor posição de G relativo a O e $m\bar{\mathbf{v}}$ é a quantidade de movimento linear do corpo.

2. Para calcular a quantidade de movimento angular H_O de um corpo rígido com um ponto fixo O, siga o procedimento descrito no primeiro parágrafo, exceto que você deva agora usar eixos centrados no ponto fixo O.

a. Se os eixos principais de inércia do corpo em O são conhecidos, decomponha $\boldsymbol{\omega}$ em componentes ao longo desses eixos [Problema Resolvido 18.2]. Os componentes respectivos da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ são obtidos a partir de equações semelhantes às Eqs. (18.10).

b. Se os eixos principais de inércia do corpo em O são desconhecidos, você deve calcular tanto os produtos como os momentos de inércia do corpo em relação aos eixos que você selecionou e usar as Eqs. (18.13) para determinar os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$.

3. Para aplicar o princípio de impulso e quantidade de movimento à solução de um problema envolvendo o movimento tridimensional de um corpo rígido, você usará a mesma equação vetorial que usou para o movimento plano no Cap. 17,

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\rightarrow 2} = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \qquad (17.4)$$

onde cada um dos sistemas inicial e final de quantidades de movimento são representados por um *vetor de quantidade de movimento linear* $m\overline{\mathbf{v}}$ e um *binário de quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_G$. Agora, porém, esses sistemas de vetor e binário devem ser representados em três dimensões, conforme mostra a Fig. 18.6, e $\mathbf{H}_G$ devem ser determinado como explicado no parágrafo 1.

a. Em problemas que envolvem a aplicação de um impulso conhecido a um corpo rígido, construa uma equação baseada no diagrama de corpo livre correspondente à Eq. (17.4). Igualando os componentes dos vetores envolvidos, você determinará a quantidade de movimento linear final $m\overline{\mathbf{v}}$ do corpo e, portanto, a velocidade corresponde $\overline{\mathbf{v}}$ de seu centro de massa. Igualando momentos em relação a G, você determinará a quantidade de movimento angular final $\mathbf{H}_G$ do corpo. Substituirá então os valores obtidos para os componentes de $\mathbf{H}_G$ nas Eqs. (18.10) ou (18.7) e resolverá essas equações para os respectivos valores dos componentes da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo [Problema Resolvido 18.1].

b. Em problemas envolvendo impulsos desconhecidos, construa a equação baseada em diagrama de corpo livre correspondente à Eq. (17.4) e escreva equações que não envolvam tais impulsos. Essas equações podem ser obtidas igualando momentos em relação ao ponto ou linha de impacto.

4. Para calcular a energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo O, decomponha a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em componentes ao longo dos eixos de sua escolha e calcule os momentos e produtos de inércia do corpo em relação a esses eixos. Como no caso do cálculo da quantidade de movimento angular, utilize os eixos principais de inércia x', y' e z', se puder determiná-los facilmente. Nesse caso, os produtos de inércia serão nulos [Problema Resolvido 18.2] e a expressão para a energia cinética se reduzirá a

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{x'}^2) \qquad (18.20)$$

Se precisar usar outros eixos que não os eixos principais de inércia, a energia cinética do corpo deverá ser expressa do modo mostrado na Eq. (18.19).

5. Para calcular a energia cinética de um corpo rígido em movimento geral, considere o movimento como a soma de uma *translação junto com o centro de massa G e uma rotação em torno de G.* A energia cinética associada à translação é $\frac{1}{2}m\overline{v}^2$. Se for possível usar eixos principais de inércia, a energia cinética associada à rotação em torno de G poderá ser expressa sob a forma mostrada na Eq. (18.20). A energia cinética total do corpo rígido será então

$$T = \tfrac{1}{2}m\overline{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\overline{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \overline{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \overline{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.17)$$

Se você tiver que usar outros eixos que não os eixos principais de inércia para determinar a energia cinética associada à rotação em torno de G, a energia cinética total do corpo deverá ser expressa como mostrado na Eq. (18.16).

PROBLEMAS

18.1 Duas barras uniformes AB e CE, cada qual com 1,5 kg de massa e comprimento 600 mm, estão soldadas uma a outra em seus pontos médios. Sabendo que esse conjunto tem velocidade angular de intensidade constante $\omega = 12$ rad/s, determine a intensidade e a direção da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_D$ do conjunto em relação a D.

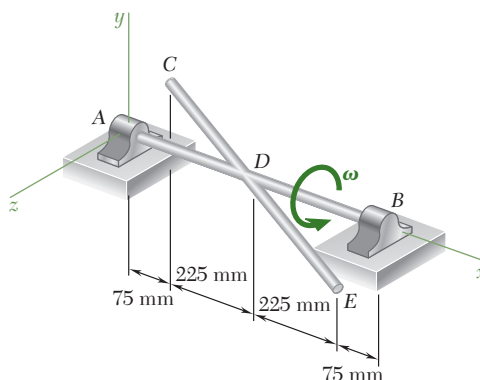



Figura P18.1

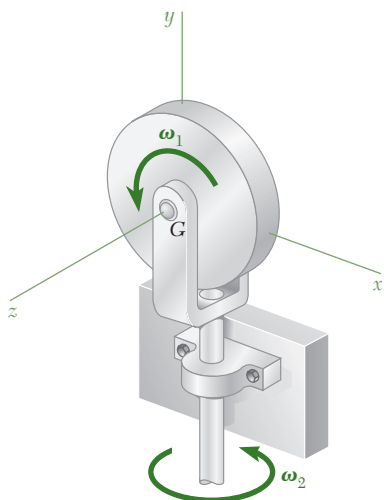



Figura P18.2

18.2 Um disco fino e homogêneo de massa m o raio r gira a uma taxa constante ω_1 em torno de um eixo apoiado em uma união em U presa a uma barra vertical que gira com taxa constante ω_2. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco em relação ao seu centro de massa G.

18.3 Uma placa fina, quadrada e homogênea de massa m e lado a é soldada a um eixo vertical AB, formando com ele um ângulo de 45°. Sabendo que o eixo gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine a quantidade de movimento angular da placa em relação ao ponto A.

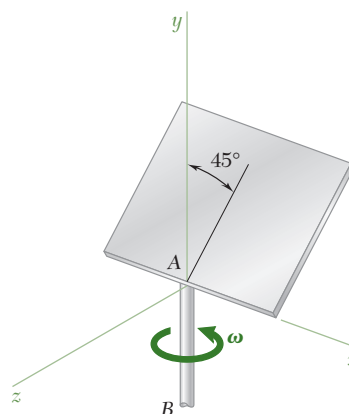



Figura P18.4

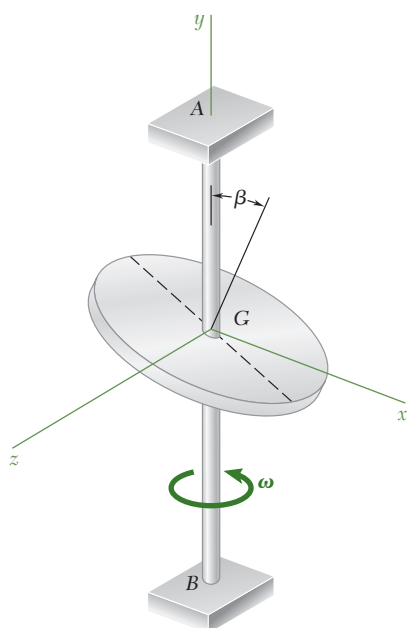



Figura P18.3

18.4 Um disco homogêneo de massa m o raio r é montado em um eixo vertical AB. A normal ao disco em G forma ângulo $\beta = 25°$ com o eixo. Sabendo que o eixo tem uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine o ângulo θ formado com o eixo AB e a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco em relação ao seu centro de massa G.

18.5 Um disco homogêneo de massa $m = 5$ kg gira à taxa constante $\omega_2 = 15$ rad/s em relação ao braço *ABC*, que por sua vez gira à taxa constante $\omega_1 = 5$ rad/s em relação ao eixo y. Determine a quantidade de movimento angular do disco em relação a seu centro *C*.

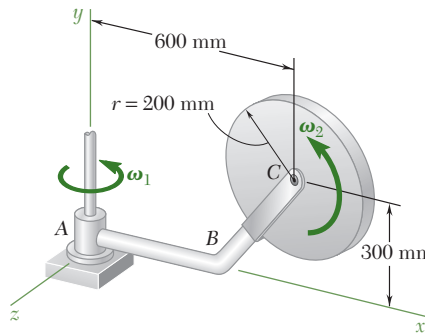



Figura P18.5

18.6 Um disco homogêneo de massa $m = 3$ kg gira à taxa constante $\omega_1 = 16$ rad/s em relação ao braço *ABC*, que está soldado a um eixo *DCE* que gira à taxa constante $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ do disco em relação a seu centro *A*.

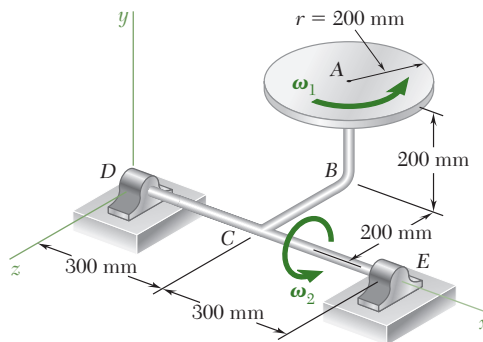



Figura P18.6

18.7 Um paralelepípedo retangular sólido de massa m tem uma base quadrada de lado a e um comprimento de $2a$. Sabendo que ele gira à taxa constante ω em torno de sua diagonal AC' e que essa rotação é vista de *A* como anti-horária, determine (*a*) a intensidade da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do paralelepípedo em relação ao seu centro de massa *G*, (*b*) o ângulo que $\mathbf{H}_G$ forma com a diagonal AC'.

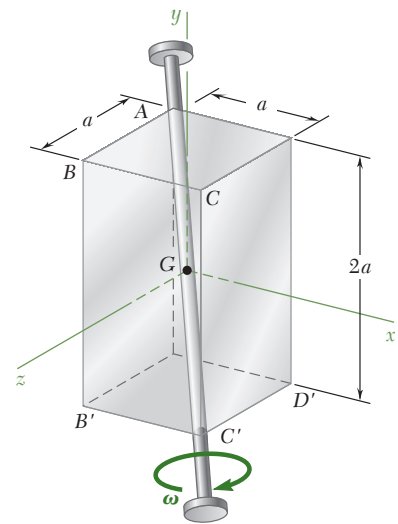



Figura P18.7

18.8 Resolva o Problema 18.7 considerando que o paralelepípedo retangular sólido tenha sido substituído por um oco constituído de seis chapas metálicas finas soldadas entre si.

18.9 Determine a quantidade de movimento angular do disco do Problema 18.5 em relação ao ponto *A*.

18.10 Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_D$ do disco do Problema 18.6 em relação ao ponto *D*.

18.11 O projétil de 30 kg mostrado na figura tem um raio de giração de 60 mm em relação ao seu eixo de simetria Gx e um raio de giração de 250 mm em relação ao eixo transversal Gy. Sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ pode ser decomposta em dois componentes: um componente, na direção de Gx, que mede a *taxa de rotação própria* do projétil, enquanto o outro componente, na direção de GD, que mede a *taxa de precessão*. Sabendo que $\theta = 5°$ e que a quantidade de movimento angular do projétil em relação ao seu centro de massa G é $\mathbf{H}_G = (320 \text{ g} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (9 \text{ g} \cdot \text{m}^2/\text{s})\mathbf{j}$, determine ($a$) a taxa de rotação própria, (b) a taxa de precessão.

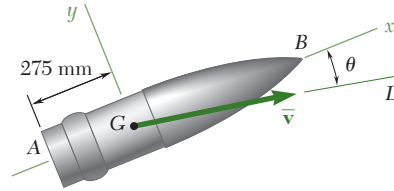
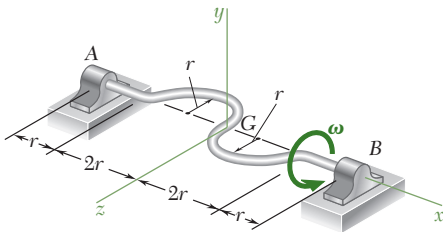



Figura P18.11

18.12 Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ do projétil do Problema 18.11 em relação ao centro A de sua base, sabendo que seu centro de massa G tem uma velocidade $\overline{\mathbf{v}}$ de 650 m/s. Forneça sua resposta em termos de componentes paralelos, respectivamente, aos eixos x e y mostrados na figura e a um terceiro eixo z apontado para você.

18.13 (a) Mostre que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_B$ de um corpo rígido em relação ao ponto B pode ser obtida adicionando-se a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ daquele corpo em relação ao ponto A ao produto vetorial do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$ traçado de B a A pela quantidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ do corpo:

$$\mathbf{H}_B = \mathbf{H}_A + \mathbf{r}_{A/B} \times m\overline{\mathbf{v}}$$

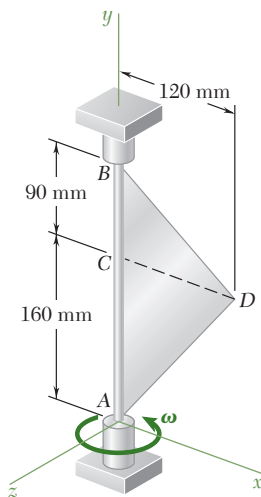
(b) Mostre ainda que, quando um corpo rígido gira em torno de um eixo fixo, sua quantidade de movimento angular será a mesma em relação a dois pontos quaisquer A e B localizados sobre o eixo fixo ($\mathbf{H}_A = \mathbf{H}_B$) se, e somente se, o centro de massa G do corpo estiver localizado sobre o eixo fixo.

18.14 Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do disco do Problema Resolvido 18.2 a partir de expressões obtidas para a sua quantidade de movimento linear $m\overline{\mathbf{v}}$ e sua quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$, usando as Eqs. (18.11). Verifique que o resultado é o mesmo que aquele obtido por cálculo direto.

Figura P18.15

18.15 Uma barra de seção transversal uniforme é usada para formar o eixo mostrado na figura. Sendo m a massa total do eixo e sabendo que o eixo gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine (a) a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do eixo em relação ao seu centro de massa G, (b) o ângulo formado entre $\mathbf{H}_G$ e o eixo AB.

Figura P18.16 e *P18.17*

18.16 A placa triangular mostrada na figura tem uma massa de 7,5 kg e está soldada a um eixo vertical AB. Sabendo que a placa gira à taxa constante $\omega = 12$ rad/s, determine a quantidade de movimento angular em relação ao (a) ponto C, (b) ponto A. (*Dica:* Para resolver o item b encontre $\overline{\mathbf{v}}$ e use a propriedade indicada na parte a do Problema 18.13.)

18.17 A placa triangular mostrada na figura tem uma massa de 7,5 kg e está soldada a um eixo vertical *AB*. Sabendo que a placa gira à taxa constante $\boldsymbol{\omega} = 12$ rad/s, determine a quantidade de movimento angular em relação ao (*a*) ponto *C*, (*b*) ponto *B*. (Ver dica do Problema 18.16.)

18.18 Determine a quantidade de movimento angular do eixo do Problema 18.15 em relação (*a*) ao ponto *A*, (*b*) ao ponto *B*.

18.19 Dois braços em formato L, cada qual com massa de 2 kg, são soldados aos terços médios do eixo *AB* de 600 mm. Sabendo que o eixo *AB* gira à taxa constante de $\boldsymbol{\omega} = 240$ rpm, determine (*a*) a quantidade de movimento angular do conjunto em relação ao ponto *A*, (*b*) o ângulo formado entre a quantidade de movimento angular e o eixo *AB*.

Figura P18.19

18.20 Para o conjunto do Problema 18.19, determine (*a*) a quantidade de movimento angular em relação a *B*, (*b*) o ângulo formado entre a quantidade de movimento angular e o eixo *BA*.

18.21 Uma das esculturas expostas em um *campus* universitário consiste em um cubo oco feito de seis chapas de alumínio de 2 × 2 m cada, soldadas entre si e reforçadas com tirantes internos de massa desprezível. O cubo está montado sobre uma base fixa *A* e pode girar livremente em torno de sua diagonal vertical *AB*. Ao passar por essa exposição a caminho de uma aula de mecânica, uma estudante de engenharia segura o canto *C* do cubo e o empurra durante 1,2 s em direção perpendicular ao plano *ABC* com uma força média de 60 N. Tendo observado que o cubo leva 5 s para o cubo completar uma volta completa, ela utiliza a sua calculadora e começa a calcular a massa do cubo. Qual é o resultado de seu cálculo? (*Dica:* a distância perpendicular da diagonal que liga dois vértices de um cubo a qualquer um de seus seis outros vértices pode se obtida multiplicando-se o lado do cubo por $\sqrt{2/3}$.)

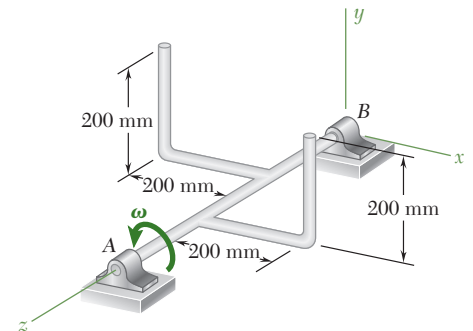
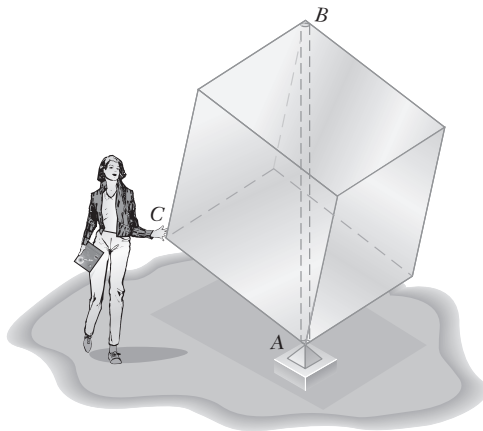



Figura P18.21

18.22 Se o cubo de alumínio do Problema 18.21 fosse substituído por um cubo do mesmo tamanho, feito de seis placas de madeira compensada de massa de 10 kg cada um, quanto tempo levaria para fazer uma volta completa se a estudante empurrasse o canto *C* do mesmo modo que empurrou o canto do cubo de alumínio?

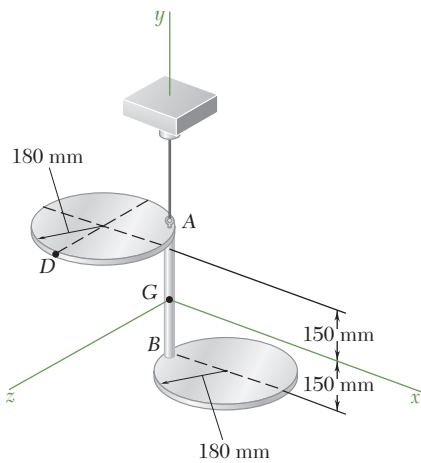



Figura P18.23 e P18.24

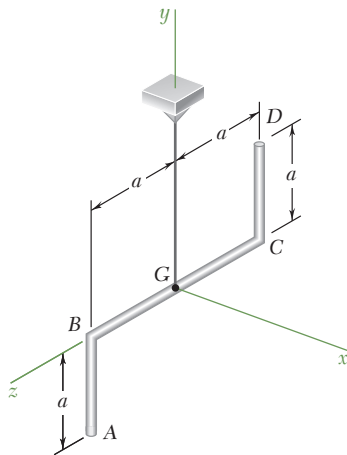



Figura P18.25

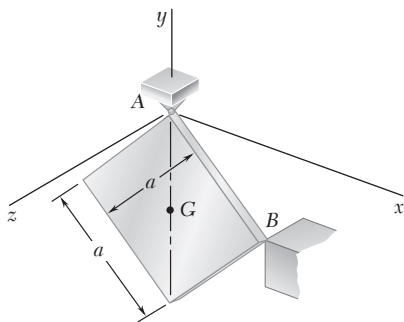



Figura P18.29

18.23 Duas placas circulares, cada uma com massa 4 kg, são rigidamente conectadas pela barra *AB* de massa desprezível e suspensas pelo ponto *A* como mostra a figura. Sabendo que um impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = -(2{,}4\ \mathrm{N\cdot s})\mathbf{k}$ é aplicado à estrutura no ponto *D*, determine (*a*) a velocidade do centro de massa *G* da estrutura, (*b*) a velocidade angular da estrutura.

18.24 Duas placas circulares, cada uma com massa 4 kg, são rigidamente conectadas pela barra *AB* de massa desprezível e suspensas pelo ponto *A* como mostra a figura. Sabendo que um impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = (2{,}4\ \mathrm{N\cdot s})\mathbf{j}$ é aplicado à estrutura no ponto *D*, determine (*a*) a velocidade do centro de massa *G* da estrutura, (*b*) a velocidade angular da estrutura.

18.25 Uma barra uniforme de massa *m* é dobrada no formato mostrado na figura e suspensa por um fio preso ao seu centro de massa *G*. A barra dobrada é atingida em *A* segundo uma direção perpendicular ao plano que contém a barra (no sentido *x* positivo). Representando o impulso correspondente por $\mathbf{F}\,\Delta t$, determine, imediatamente após o impacto, (*a*) a velocidade do centro de massa *G*, (*b*) a velocidade angular da barra.

18.26 Resolva o Problema 18.25 considerando que a barra dobrada seja atingida em *B*.

18.27 Três barras esbeltas, cada uma com massa *m* e comprimento $2a$, são soldadas para formar a estrutura mostrada na figura. A estrutura é atingida em *A* em uma direção vertical descendente. Representando o impulso correspondente por $\mathbf{F}\Delta t$, determine, imediatamente após o impacto, (*a*) a velocidade do centro de massa *G*, (*b*) a velocidade angular da barra.

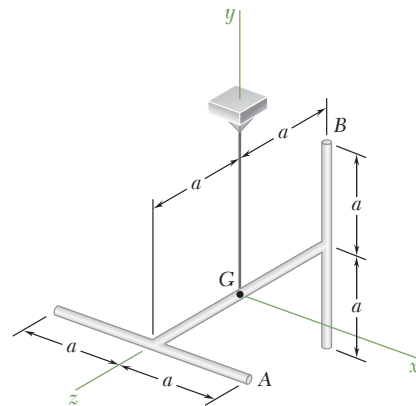



Figura P18.27

18.28 Resolva o Problema 18.27 considerando que a estrutura seja atingida em *B* no sentido *x* negativo.

18.29 Uma placa quadrada de lado *a* e massa *m*, suspensa por uma junta articulada no ponto *A*, está girando em torno do eixo *y* com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{j}$ quando uma obstrução é repentinamente introduzida no ponto *B* do plano *xy*. Admitindo que o impacto no ponto *B* seja perfeitamente plástico ($e = 0$), determine, imediatamente após o impacto, (*a*) a velocidade angular da placa, (*b*) a velocidade de seu centro de massa *G*.

18.30 Determine o impulso exercido sobre a placa do Problema 18.29 durante o impacto (*a*) pela obstrução no ponto *B*, (*b*) pelo apoio no ponto *A*.

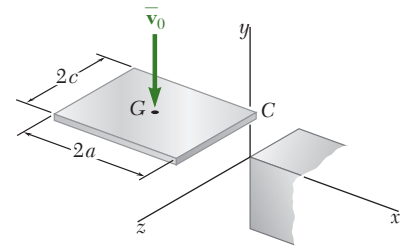
18.31 Uma placa retangular de massa m cai com velocidade $\overline{\mathbf{v}}_0$ e sem velocidade angular quando seu canto C bate em uma obstrução. Admitindo que o impacto seja perfeitamente plástico ($e = 0$), determine a velocidade angular da placa imediatamente após o impacto.

18.32 Para a placa do Problema 18.31, determine (a) a velocidade de seu centro de massa G imediatamente após o impacto, (b) o impulso exercido sobre a placa pela obstrução durante o impacto.

Figura P18.31

18.33 Uma sonda de 2.500 kg em órbita ao redor da Lua tem 2,4 m de altura e bases octogonais com lados de 1,2 m. Os eixos de coordenadas mostrados na figura são os eixos centroidais principais de inércia da sonda e seus raios de giração são $k_x = 0{,}98$ m, $k_y = 1{,}06$ m e $k_z = 1{,}02$ m. A sonda é equipada com um propulsor principal de 500 N de empuxo E e com quatro propulsores de 20 N de empuxo A, B, C e D que podem expelir propelente no sentido y positivo. A sonda tem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = (0{,}040 \text{ rad/s})\mathbf{i} + (0{,}060 \text{ rad/s})\mathbf{k}$ quando dois dos propulsores de 20 N são usados para reduzir a velocidade angular a zero. Determine (a) quais dos propulsores devem ser usados, (b) o tempo de operação de cada um desses propulsores, (c) por quanto tempo o propulsor principal E deve ser ativado para que a velocidade do centro de massa da sonda permaneça inalterada.

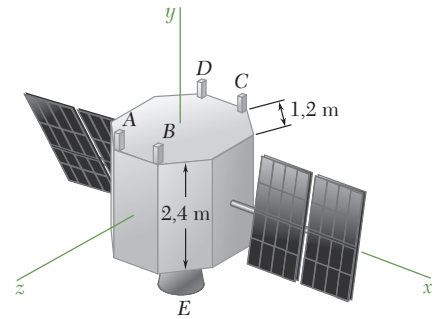



Figura P18.33

18.34 Resolva o Problema 18.33 considerando que a velocidade angular da sonda seja $\boldsymbol{\omega} = (0{,}060 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0{,}040 \text{ rad/s})\mathbf{k}$.

18.35 Os eixos de coordenadas mostrados na figura representam os eixos centroidais principais de inércia de uma sonda espacial de 1.500 kg cujos raios de giração são $k_x = 0{,}4$ m, $k_y = 0{,}45$ m e $k_z = 0{,}375$ m. A sonda não tem velocidade angular quando um meteorito de 150 g atinge um de seus painéis solares em A com uma velocidade $\mathbf{v}_0 = (720 \text{ m/s})\mathbf{i} - (900 \text{ m/s})\mathbf{j} + (960 \text{ m/s})\mathbf{k}$ em relação à sonda. Sabendo que o meteorito emerge do outro lado do painel sem mudança na direção de sua velocidade, mas com uma redução de 20% na sua intensidade, determine a velocidade angular final da sonda.

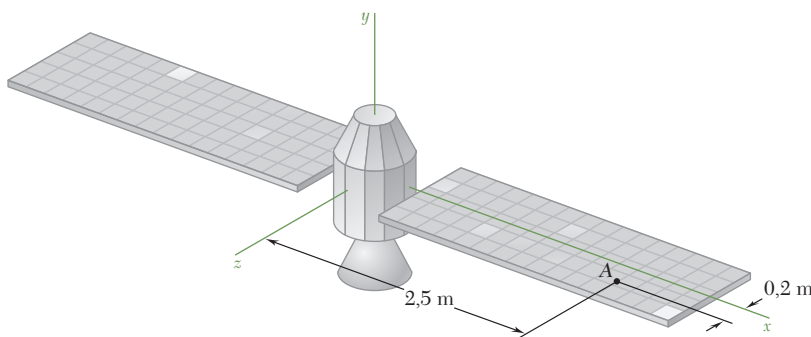
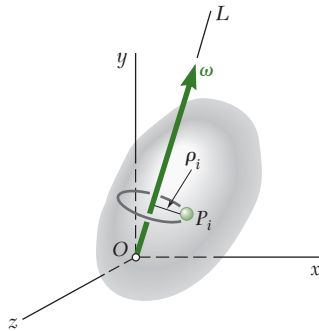



Figura *P18.35* e *P18.36*

18.36 Os eixos de coordenadas mostrados na figura representam os eixos centroidais principais de inércia de uma sonda espacial de 1.500 kg cujos raios de giração são $k_x = 0{,}4$ m, $k_y = 0{,}45$ m e $k_z = 0{,}375$ m. A sonda não tem velocidade angular quando um meteorito de 150 g atinge um de seus painéis solares em A e emerge do outro lado do painel sem mudança na direção de sua velocidade, mas com uma redução de 25% na sua intensidade. Sabendo que a velocidade angular final da sonda é $\boldsymbol{\omega} = (0{,}05 \text{ rad/s})\mathbf{i} - (0{,}12 \text{ rad/s})\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ e que o componente x da variação resultante da velocidade do centro de massa da sonda é -16 mm/s,

determine (*a*) *o* componente ω_2 da velocidade angular final da sonda, (*b*) a velocidade relativa $\mathbf{v}_0$ com que o meteorito atinge o painel.

18.37 Representando por $\boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{H}_O$ e T, respectivamente, a velocidade angular, a quantidade de movimento angular e a energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo O, (*a*) demonstre que $\mathbf{H}_O \cdot \boldsymbol{\omega} = 2T$ e (*b*) mostre que o ângulo θ entre ω e $\mathbf{H}_O$ será sempre agudo.

Figura P18.38

18.38 Mostre que a energia cinética de um corpo rígido com um ponto fixo O pode ser expressa por $T = \frac{1}{2}I_{OL}\boldsymbol{\omega}^2$, onde $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular instantânea do corpo e I_{OL} é seu momento de inércia em relação à linha de ação OL de $\boldsymbol{\omega}$. Deduza essa expressão (*a*) a partir das Eqs. (9.46) e (18.19), (*b*) considerando T como a soma das energias cinéticas de partículas P_i que descrevem círculos de raios ρ_i em torno da linha OL.

18.39 Determine a energia cinética do conjunto do Problema 18.1.

18.40 Determine a energia cinética do disco do Problema 18.2.

18.41 Determine a energia cinética da placa do Problema 18.3.

18.42 Determine a energia cinética do disco do Problema 18.4.

18.43 Determine a energia cinética da barra do Problema 18.15.

18.44 Determine a energia cinética da placa triangular do Problema 18.16.

18.45 Determine a energia cinética do corpo do Problema 18.19.

18.46 Determine a energia cinética transmitida para o cubo do Problema 18.21.

18.47 Determine a energia cinética do disco do Problema 18.5.

18.48 Determine a energia cinética do disco do Problema 18.6.

18.49 Determine a energia cinética do paralelepípedo sólido do Problema 18.7.

18.50 Determine a energia cinética do paralelepípedo oco do Problema 18.8.

18.51 Determine a energia cinética perdida quando a placa do Problema 18.29 bate na obstrução no ponto *B*.

18.52 Determine a energia cinética perdida quando o canto *C* da placa do Problema 18.31 bate na obstrução.

18.53 Determine a energia cinética da sonda espacial do Problema 18.35 em seu movimento em torno do seu centro de massa após sua colisão com o meteorito.

18.54 Determine a energia cinética da sonda espacial do Problema 18.36 em seu movimento em torno do seu centro de massa após sua colisão com o meteorito.

*18.5 Movimento de um corpo rígido tridimensional

Conforme indicado na Seção 18.2, as equações fundamentais

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

permanecem válidas no caso mais geral do movimento de um corpo rígido. Entretanto, antes que a Eq. (18.2) pudesse ser aplicada ao movimento tridimensional de um corpo rígido, foi necessário deduzir as Eqs. (18.7), que relacionam os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ e os componentes da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$. Ainda nos falta encontrar um meio eficaz e conveniente de calcular os componentes da derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular.

Como $\mathbf{H}_G$ representa a quantidade de movimento angular do corpo em seu movimento relativo aos eixos centroidais $GX'Y'Z'$ de orientação fixa (Fig. 18.9), e como $\dot{\mathbf{H}}_G$ representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_G$ em relação aos mesmos eixos, pareceria natural usar componentes de $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}_G$ ao longo dos eixos X', Y', Z' ao escrever as relações (18.7). Todavia, uma vez que o corpo gira, seus momentos e produtos de inércia variariam continuamente e seria necessário determinar seus valores em função do tempo. Logo, é mais conveniente usar eixos x, y, z ligados ao corpo, garantindo que seus momentos e produtos de inércia manterão os mesmos valores durante o movimento. Isso é permissível, pois como indicado anteriormente, a transformação de $\boldsymbol{\omega}$ em $\mathbf{H}_G$ independe do sistema de eixos de coordenadas selecionado. A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, porém, ainda deve ser *definida* em relação ao referencial $GX'Y'Z'$, de orientação fixa. O vetor $\boldsymbol{\omega}$ pode então ser *decomposto* em componentes ao longo dos eixos rotativos x, y, z. Aplicando as relações (18.7), obtemos os *componentes* do vetor $\mathbf{H}_G$ ao longo dos eixos rotativos. No entanto, o vetor $\mathbf{H}_G$ representa a quantidade de movimento em relação ao centro de massa G do corpo *em seu movimento relativo ao referencial* $GX'Y'Z'$.

Figura 18.9

Diferenciando em relação a t os componentes da quantidade de movimento angular em (18.7), definimos a taxa de variação do vetor $\mathbf{H}_G$ relativamente ao referencial rotativo $Gxyz$.

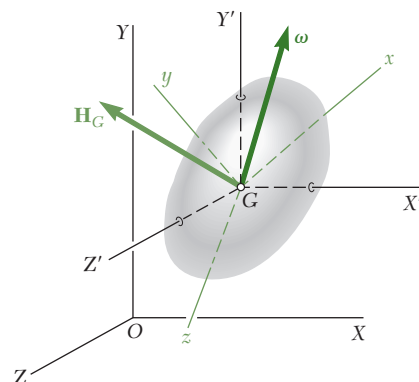
$$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} = \dot{H}_x\mathbf{i} + \dot{H}_y\mathbf{j} + \dot{H}_z\mathbf{k} \tag{18.21}$$

onde $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ são os vetores unitários ao longo dos eixos rotativos. Relembrando da Seção 15.10 que a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ do vetor $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial $GX'Y'Z'$ é determinada adicionando-se a $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ o produto vetorial $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G$, onde $\boldsymbol{\Omega}$ representa a velocidade angular do referencial rotativo, escrevemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathrm{H}_G \tag{18.22}$$

onde $\mathbf{H}_G$ = quantidade de movimento angular em relação ao referencial $GX'Y'Z'$ de orientação fixa

$(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ = taxa de variação de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial rotativo $Gxyz$ a ser calculado a partir das relações (18.7) e (18.21)

Ω = velocidade angular do referencial rotativo $Gxyz$

Substituindo por $\dot{\mathbf{H}}_G$ da Eq. (18.22) na Eq. (18.2), temos

$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \Omega \times \mathrm{H}_G \tag{18.22}$$

Se o referencial rotativo é ligado ao corpo, como havia sido admitido na discussão, sua velocidade angular Ω é identicamente igual à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo. Todavia, há muitas aplicações em que é vantajoso usar um referencial que não é de fato ligado ao corpo, mas que gira de um modo independente. Por exemplo, se o corpo considerado tem simetria axial, como no Problema Resolvido 18.5 ou na Seção 18.9, é possível selecionar um referencial em relação ao qual os momentos e produtos de inércia do corpo permanecem constantes, mas que gira menos que o próprio corpo.* Como resultado, é possível obter expressões mais simples para a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e para a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo do que as que seriam obtidas caso o referencial fosse de fato ligado ao corpo. É claro que em tais situações a velocidade angular Ω do referencial rotativo e a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo são diferentes.

*18.6 Equações de Euler do movimento. Extensão do princípio de d'Alembert ao movimento de um corpo rígido tridimensional

Se os eixos x, y e z forem escolhidos de modo a coincidir com os eixos principais de inércia do corpo, as relações simplificadas (18.10) podem ser usadas para determinar os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$. Omitindo as plicas dos subscritos, escrevemos

$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k} \tag{18.24}$$

onde $\bar{I}_x$, $\bar{I}_y$ e $\bar{I}_z$ representam os momentos centroidais principais de inércia do corpo. Substituindo $\mathbf{H}_G$ da Eq. (18.24) na Eq. (18.23) e definindo $\Omega = \boldsymbol{\omega}$, obtemos as três equações escalares

$$\begin{aligned} \Sigma M_x &= \bar{I}_x\dot{\omega}_x - (\bar{I}_y - \bar{I}_z)\omega_y\omega_z \\ \Sigma M_y &= \bar{I}_y\dot{\omega}_y - (\bar{I}_z - \bar{I}_x)\omega_z\omega_x \\ \Sigma M_z &= \bar{I}_z\dot{\omega}_z - (\bar{I}_x - \bar{I}_y)\omega_x\omega_y \end{aligned} \tag{18.25}$$

Essas equações, denominadas *equações de Euler do movimento* em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), podem ser usadas para analisar o movimento de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa. Entretanto, nas seções seguintes, a Eq. (18.23) será usada preferencialmente às Eqs. (18.25), pois a primeira é mais geral e a forma vetorial compacta em que ela está expressa é mais fácil de recordar.

Escrevendo a Eq. (18.1) em forma escalar, obtemos três equações adicionais

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \tag{18.26}$$

as quais, juntamente com as equações de Euler, formam um sistema de seis equações diferenciais. Sob condições iniciais apropriadas, essas equações diferenciais têm uma solução única. Logo, o movimento de um corpo rígido tridimensional é completamente definido pela resultante

* Mais especificamente, o referencial não terá rotação própria (*spin*) (ver a Seção 18.9).

das forças externas que agem sobre ele e pelo momento resultante dessas forças. Esse resultado será considerado como uma generalização de um resultado similar obtido na Seção 16.4 para o caso do movimento plano de uma placa rígida. Conclui-se que, em três ou duas dimensões, dois sistemas de forças que são equipolentes são também equivalentes; ou seja, eles exercem o mesmo efeito sobre um dado corpo rígido.

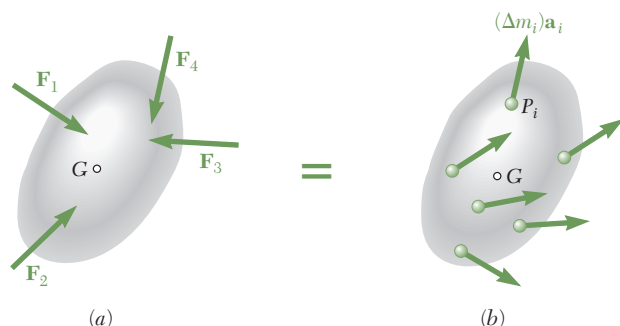



Figura 18.10

Considerando em particular o sistema de forças externas que age sobre um corpo rígido (Fig. 18.10*a*) e o sistema de forças efetivas associado às partículas constituintes do corpo rígido (Fig. 18.10*b*), podemos afirmar que os dois sistemas – que são equipolentes, conforme demonstrado na Seção 14.2 – são também equivalentes. Isso é a extensão do princípio de d'Alembert ao movimento tridimensional de um corpo rígido. Substituindo as forças efetivas na Fig. 18.10*b* por um sistema força-binário equivalente, verificamos que o sistema de forças externas que agem sobre um corpo rígido em movimento tridimensional é equivalente ao sistema que consiste do vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado ao centro de massa G do corpo e do binário de momento $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.11), onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ é obtido a partir das relações (18.7) e (18.22). Note que a equivalência dos sistemas de vetores mostrados nas Figs. 18.10 e 18.11 foi indicada por sinais de igualdade *em negrito*. Problemas envolvendo o movimento tridimensional de um corpo rígido podem ser resolvidos considerando-se a equação baseada no diagrama de corpo livre representada na Fig. 18.11 e escrevendo equações escalares apropriadas para relacionar os componentes ou os momentos das forças externas e efetivas (ver o Problema Resolvido 18.3).

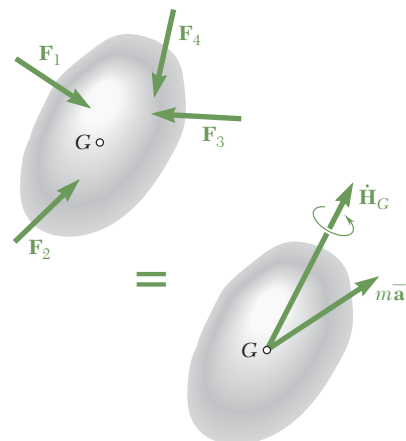



Figura 18.11

*18.7 Movimento de um corpo rígido em torno de um ponto fixo

Quando um corpo rígido é restrito a girar em torno de um ponto fixo O, é desejável escrever uma equação envolvendo as quantidades de movimento em relação a O das forças externas e efetivas, pois essa equação não conterá a reação incógnita em O. Embora tal equação possa ser obtida a partir da Fig. 18.11, pode ser mais conveniente escrevê-la considerando a taxa de variação da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação ao ponto fixo O (Fig. 18.12). Relembrando a Eq. (14.11), escrevemos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (18.27)$$

Figura 18.12

onde $\dot{\mathbf{H}}_O$ representa a taxa de variação do vetor $\mathbf{H}_O$ em relação ao referencial fixo $OXYZ$. Uma dedução semelhante àquela usada na Seção 18.5 per-

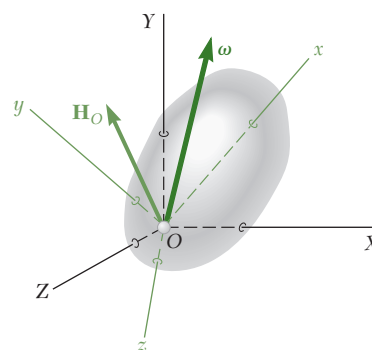



Foto 18.3 O radiotelescópio giratório é um exemplo de uma estrutura limitada a girar em torno de um ponto fixo.

mite-nos relacionar $\dot{\mathbf{H}}_O$ à taxa de variação $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ de $\mathbf{H}_O$ em relação ao referencial rotativo *Oxyz*. Uma substituição na Eq. (18.27) conduz à equação

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

onde $\Sigma\mathbf{M}_O$ = somatório dos momentos em relação a O das forças aplicadas ao corpo rígido
$\mathbf{H}_O$ = quantidade de movimento angular do corpo em relação ao referencial fixo *OXYZ*
$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = taxa de variação de $\mathbf{H}_O$ em relação ao referencial rotativo *Oxyz*, a ser calculado a partir das relações (18.13)
Ω = velocidade angular do referencial rotativo *Oxyz*

Se o referencial rotativo está ligado ao corpo, sua velocidade angular Ω é identicamente igual à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo. Todavia, conforme indicado no último parágrafo da Seção 18.5, existem muitas aplicações em que é vantajoso usar um referencial que não é de fato ligado ao corpo, mas que gira de um modo independente.

*18.8 Rotação de um corpo rígido em torno de um ponto fixo

Figura 18.13

A Eq. (18.28) deduzida na seção anterior será usada para analisar o movimento de um corpo rígido restringido a girar em torno de um eixo fixo *AB* (Fig. 18.13). Primeiramente, notemos que a velocidade angular do corpo em relação ao referencial fixo *OXYZ* é representada pelo vetor $\boldsymbol{\omega}$ orientado ao longo do eixo de rotação. Ligando o referencial rotativo *Oxyz* ao corpo, com o eixo z ao longo de *AB*, temos $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$. Substituindo $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega$ nas relações (18.13), obtemos os componentes ao longo dos eixos rotativos da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação a O:

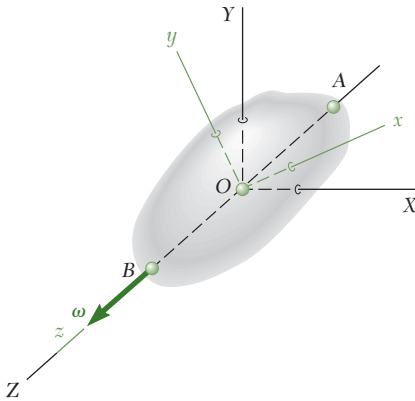
$$H_x = -I_{xz}\omega \qquad H_y = -I_{yz}\omega \qquad H_z = I_z\omega$$

Como o referencial *Oxyz* está ligado ao corpo, temos $\Omega = \boldsymbol{\omega}$, e a Eq. (18.28) fornece

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\dot{\omega} + \omega\mathbf{k} \times (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\omega = \\ &= (-I_{xz}\mathbf{i} - I_{yz}\mathbf{j} + I_z\mathbf{k})\alpha + (-I_{xz}\mathbf{j} + I_{yz}\mathbf{i})\omega^2\end{aligned}$$

O resultado obtido pode ser expresso pelas três equações escalares seguintes

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= -I_{xz}\alpha + I_{yz}\omega^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\alpha - I_{xz}\omega^2 \\ \Sigma M_z &= I_z\alpha\end{aligned} \tag{18.29}$$

Quando as forças aplicadas ao corpo são conhecidas, a aceleração angular α pode ser obtida da última das Eqs. (18.29). A velocidade angular

ω é, então, determinada por integração, e os valores obtidos para α e ω são substituídos nas duas primeiras equações de (18.29). Essas equações, mais as três equações de (18.26) que definem o movimento do centro de massa do corpo, podem então ser usadas para determinar as reações nos mancais A e B.

É possível selecionar outros eixos que não aqueles mostrados na Fig. 18.13 para analisar a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo. Em muitos casos, os eixos principais de inércia do corpo serão considerados mais vantajosos. Portanto, é sensato retornar à Eq. (18.28) e selecionar o sistema de eixos que melhor se adapte ao problema.

Se o corpo rotativo é simétrico em relação ao plano xy, os produtos de inércia I_{xz} e I_{yz} são nulos e as Eqs. (18.29) se reduzem a

$$\Sigma M_x = 0 \qquad \Sigma M_y = 0 \qquad \Sigma M_z = I_z\alpha \tag{18.30}$$

que está de acordo com os resultados obtidos no Cap. 16. Por outro lado, se os produtos de inércia I_{xz} e I_{yz} não forem iguais a zero, a soma dos momentos das forças externas em relação aos eixos x e y também serão diferentes de zero, mesmo quando o corpo girar a uma taxa constante ω. De fato, nesse último caso, as Eqs. (18.29) produzem

$$\Sigma M_x = I_{yz}\omega^2 \qquad \Sigma M_y = -I_{xz}\omega^2 \qquad \Sigma M_z = 0 \tag{18.31}$$

Essa última observação nos leva a discutir o *balanceamento de eixos rotativos.* Considere, por exemplo, o eixo de manivelas mostrado na Fig. 18.14*a* que, é simétrico em relação ao seu centro de massa G. Observemos primeiro que, quando o eixo de manivelas está em repouso, ele não exerce esforço lateral em seus apoios, pois seu centro de gravidade G está localizado diretamente acima de A. Diz-se então que o eixo está *estaticamente balanceado.* A reação em A, comumente referida como uma *reação estática*, é vertical e sua intensidade é igual ao peso W do eixo. Vamos então considerar que o eixo gire com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Ligando nosso referencial ao eixo, com sua origem em G, o eixo z ao longo de AB e o eixo y no plano de simetria do eixo (Fig. 18.14*b*), notamos que I_{xz} é zero e que I_{yz} é positivo. De acordo com as Eqs. (18.31), as forças externas incluem um binário de momento $I_{yz}\omega^2\mathbf{i}$. Como o binário é formado pela reação em B e pelo componente horizontal da reação em A, temos

$$\mathbf{A}_y = \frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \qquad \mathbf{B} = -\frac{I_{yz}\omega^2}{l}\mathbf{j} \tag{18.32}$$

Uma vez que as reações nos mancais são proporcionais a ω^2, o eixo terá uma tendência de ser arrancado de seus mancais em altas velocidades de rotação. Além disso, como as reações $\mathbf{A}_y$ e $\mathbf{B}$ nos mancais, denominadas *reações dinâmicas*, estão contidas no plano yz, elas giram com o eixo e fazem a estrutura de apoio vibrar. Esses efeitos indesejáveis serão evitados se, por redistribuição de massas em torno do eixo ou pela adição de massas corretivas, fizermos I_{yz} ser igual a zero. As reações dinâmicas $\mathbf{A}_y$ e $\mathbf{B}$ desaparecerão e as reações nos mancais se reduzirão à reação estática $\mathbf{A}_z$, cuja direção está fixada. O eixo estará, então, *balanceado tanto dinamicamente como estaticamente.*

Foto 18.4 As forças exercidas pelo eixo de manivelas de um automóvel sobre seus mancais são as reações estáticas e dinâmicas. O eixo de manivelas pode ser projetado para ficar balanceado dinamicamente, bem como estaticamente.

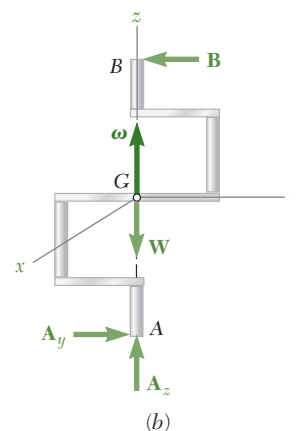
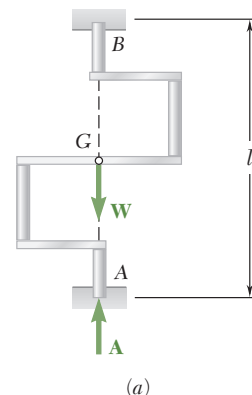
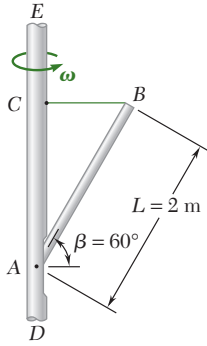



Figura 18.14

PROBLEMA RESOLVIDO 18.3

Uma barra delgada *AB* de comprimento $L = 2$ m e massa $m = 20$ kg está ligada por um pino em *A* a um eixo vertical *DE* que gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$ de 15 rad/s. A barra é mantida no lugar por meio de um fio horizontal *BC* preso ao eixo e à extremidade *B* da barra. Determine a tração no fio e a reação em *A*.

SOLUÇÃO

As forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a *G* e ao binário $\dot{\mathbf{H}}_G$. Como *G* descreve um círculo horizontal de raio $\bar{r} = \frac{1}{2}L \cos \beta$ a uma taxa constante ω, temos

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_n = -\bar{r}\omega^2\mathbf{I} = -(\tfrac{1}{2}L\cos\beta)\omega^2\mathbf{I} = -(112{,}5 \text{ m/s}^2)\mathbf{I}$$

$$m\bar{\mathbf{a}} = 20\,(112{,}5\ \mathbf{I}) = -(2.250 \text{ N})\mathbf{I}$$

Determinação de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Calculamos, primeiro, a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$. Usando os eixos centroidais principais de inércia *x*, *y*, *z*, escrevemos

$$\bar{I}_x = \tfrac{1}{12}mL^2 \qquad \bar{I}_y = 0 \qquad \bar{I}_z = \tfrac{1}{12}mL^2$$
$$\omega_x = -\omega\cos\beta \qquad \omega_y = \omega\,\text{sen}\,\beta \qquad \omega_z = 0$$
$$\mathbf{H}_G = \bar{I}_x\omega_x\mathbf{i} + \bar{I}_y\omega_y\mathbf{j} + \bar{I}_z\omega_z\mathbf{k}$$
$$\mathbf{H}_G = -\tfrac{1}{12}mL^2\omega\cos\beta\ \mathbf{i}$$

A taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ em relação a eixos de orientação fixa é obtida pela Eq. (18.22). Observando que a taxa de variação $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz}$ de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial rotativo *Gxyz* é nula e que a velocidade angular Ω do referencial é igual à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da barra, temos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G$$
$$\dot{\mathbf{H}}_G = 0 + (-\omega\cos\beta\ \mathbf{i} + \omega\,\text{sen}\,\beta\ \mathbf{j}) \times -(\tfrac{1}{12}mL^2\omega\cos\beta\ \mathbf{i})$$
$$\dot{\mathbf{H}}_G = \tfrac{1}{12}mL^2\omega^2\ \text{sen}\,\beta\cos\beta\ \mathbf{k} = (649{,}5\ \text{N}\cdot\text{m})\mathbf{k}$$

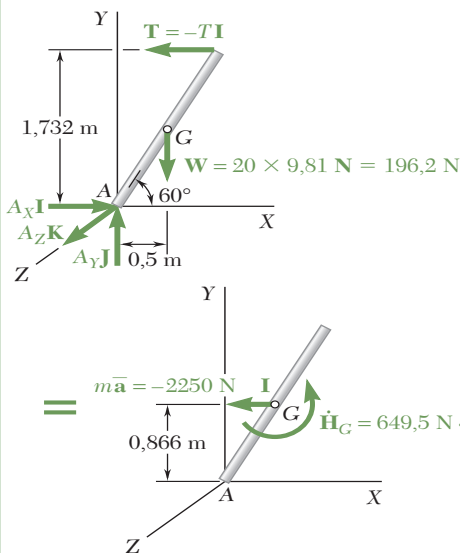
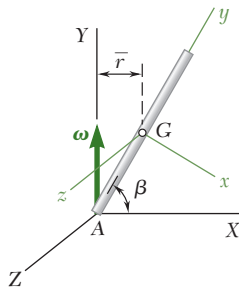
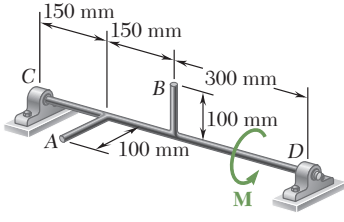
Equações de movimento. Expressando que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, escrevemos

$\Sigma\mathbf{M}_A = \Sigma(\mathbf{M}_A)_{\text{efet.}}$:

$$1{,}732\mathbf{J} \times (-T\mathbf{I}) + 0{,}5\mathbf{I} \times (-196{,}2\mathbf{J}) = 0{,}866\mathbf{J} \times (-2250\mathbf{I}) + 649{,}5\mathbf{K}$$
$$(1{,}732T - 98{,}1)\mathbf{K} = (1948{,}5 + 649{,}5)\mathbf{K} \qquad T = 1556{,}6\ \text{N} \blacktriangleleft$$

$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{efet.}}$: $\quad A_X\mathbf{I} + A_Y\mathbf{J} + A_Z\mathbf{K} - 1556{,}6\mathbf{I} - 196{,}2\mathbf{J} = -2250\mathbf{I}$

$$\mathbf{A} = -(693{,}4\ \text{N})\mathbf{I} + (196{,}2\ \text{N})\mathbf{J} \blacktriangleleft$$

Observação. O valor de *T* poderia ter sido obtido a partir de $\mathbf{H}_A$ e da Eq. (18.28). Entretanto, o método aqui utilizado também fornece a reação em *A*. Além disso, ele chama atenção para o papel da assimetria da barra na resolução do problema, mostrando claramente que tanto o vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ como o binário $\dot{\mathbf{H}}_G$ devem ser usados para representar as forças efetivas.

PROBLEMA RESOLVIDO 18.4

Duas barras A e B de 100 mm, cada qual com massa de 300 g, estão soldadas ao eixo CD, que é apoiado por mancais em C e D. Se um binário $\mathbf{M}$ de intensidade igual a 6 N · m é aplicado ao eixo, determine os componentes das reações dinâmicas em C e D no instante em que o eixo tiver atingido uma velocidade angular de 1.200 rpm. Despreze o momento de inércia do próprio eixo.

SOLUÇÃO

Quantidade de movimento angular em relação a O. Ligamos um referencial $Oxyz$ ao corpo e verificamos que os eixos escolhidos não são eixos principais de inércia para o corpo. Como o corpo gira em torno do eixo x, temos $\omega_x = \omega$ e $\omega_y = \omega_z = 0$. Substituindo nas Eqs. (18.13)

$$H_x = I_x\omega \qquad H_y = -I_{xy}\omega \qquad H_z = -I_{xz}\omega$$
$$\mathbf{H}_O = (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega$$

Momentos das forças externas em relação a O. Como o referencial gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, a Eq. (18.28) fornece

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M}_O &= (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O = \\ &= (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\alpha + \omega\mathbf{i} \times (I_x\mathbf{i} - I_{xy}\mathbf{j} - I_{xz}\mathbf{k})\omega \\ &= I_x\alpha\mathbf{i} - (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)\mathbf{j} - (I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)\mathbf{k} \qquad (1)\end{aligned}$$

Reação dinâmica em *D*. As forças externas consistem dos pesos do eixo e das barras, do binário $\mathbf{M}$, das reações estáticas em C e D e das reações dinâmicas em C e D. Uma vez que os pesos e as reações estáticas estão equilibradas, as forças externas se reduzem ao binário $\mathbf{M}$ e às reações dinâmicas $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$, conforme mostrado na figura. Tomando momentos em relação a O, temos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = L\mathbf{i} \times (D_y\mathbf{j} + D_z\mathbf{k}) + M\mathbf{i} = M\mathbf{i} - D_zL\mathbf{j} + D_yL\mathbf{k} \qquad (2)$$

Igualando os coeficientes do vetor unitário $\mathbf{i}$ em (1) e (2):

$$M = I_x\alpha \qquad M = 2(\tfrac{1}{3}mc^2)\alpha \qquad \alpha = 3M/2mc^2$$

Igualando os coeficientes de $\mathbf{k}$ e $\mathbf{j}$ em (1) e (2):

$$D_y = -(I_{xz}\alpha + I_{xy}\omega^2)/L \qquad D_z = (I_{xy}\alpha - I_{xz}\omega^2)/L \qquad (3)$$

Usando o teorema dos eixos paralelos e observando que o produto de inércia de cada barra é nulo em relação a eixos centroidais, temos

$$I_{xy} = \Sigma m\bar{x}\,\bar{y} = m(\tfrac{1}{2}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{4}mLc$$
$$I_{xz} = \Sigma m\bar{x}\,\bar{z} = m(\tfrac{1}{4}L)(\tfrac{1}{2}c) = \tfrac{1}{8}mLc$$

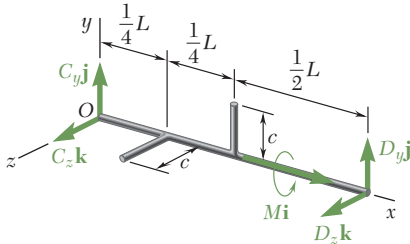
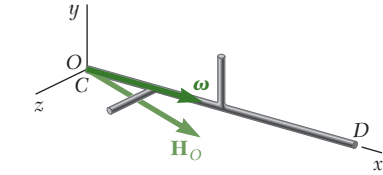
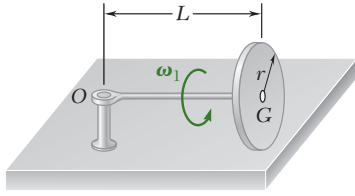
Substituindo em (3) os valores encontrados para I_{xy}, I_{xz} e α:

$$D_y = -\tfrac{3}{16}(M/c) - \tfrac{1}{4}mc\omega^2 \qquad D_z = \tfrac{3}{8}(M/c) - \tfrac{1}{8}mc\omega^2$$

Substituindo ω = 1.200 rpm = 125,7 rad/s, c = 0,100 m, M = 6 N · m e m = 0,300 kg, temos

$$D_y = -129{,}8\text{ N} \qquad D_z = -36{,}8\text{ N} \quad ◀$$

Reação dinâmica em C. Usando um referencial ligado a D, obtemos equações semelhantes às Eqs. (3), que produzem

$$C_y = -152{,}2\text{ N} \qquad C_z = -155{,}2\text{ N} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO 18.5

Um disco homogêneo de raio r e massa m está montado sobre um eixo OG de comprimento L e massa desprezível. O eixo é pivotado no ponto fixo O e o disco é compelido a rolar sobre um piso horizontal. Sabendo que o disco gira no sentido anti-horário à taxa constante ω_1 em torno do eixo, determine (a) a força (considerada vertical) exercida pelo piso sobre o disco, (b) a reação no pivô O.

SOLUÇÃO

As forças efetivas se reduzem ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e ao binário $\dot{\mathbf{H}}_G$. Relembrando a partir do Problema Resolvido 18.2 que o eixo gira em torno do eixo y à taxa $\omega_2 = r\omega_1/L$, escrevemos

$$m\bar{\mathbf{a}} = -mL\omega_2^2\mathbf{i} = -mL(r\omega_1/L)^2\mathbf{i} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} \qquad (1)$$

Determinação de $\dot{\mathbf{H}}_G$. Recordemos, do Problema Resolvido 18.2, que a quantidade de movimento do disco em relação a G é

$$\mathbf{H}_G = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right)$$

onde $\dot{\mathbf{H}}_G$ está decomposto em componentes ao longo dos eixos rotativos x', y', z', com x' ao longo de OG e y' vertical. A taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ de $\mathbf{H}_G$ em relação a eixos de orientação fixa é obtida da Eq. (18.22). Observando que a taxa de variação $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial rotativo é nula e que a velocidade angular $\mathbf{\Omega}$ daquele referencial é

$$\mathbf{\Omega} = -\omega_2\mathbf{j} = -\frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j}$$

temos

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{H}}_G &= (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G = \\ &= 0 - \frac{r\omega_1}{L}\mathbf{j} \times \tfrac{1}{2}mr^2\omega_1\left(\mathbf{i} - \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) = \\ &= \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (2)$$

Equações do movimento. Expressando que o sistema de força externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, escrevemos

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \Sigma(\mathbf{M}_O)_{\text{efet.}}: \qquad L\mathbf{i} \times (N\mathbf{j} - W\mathbf{j}) = \dot{\mathbf{H}}_G$$

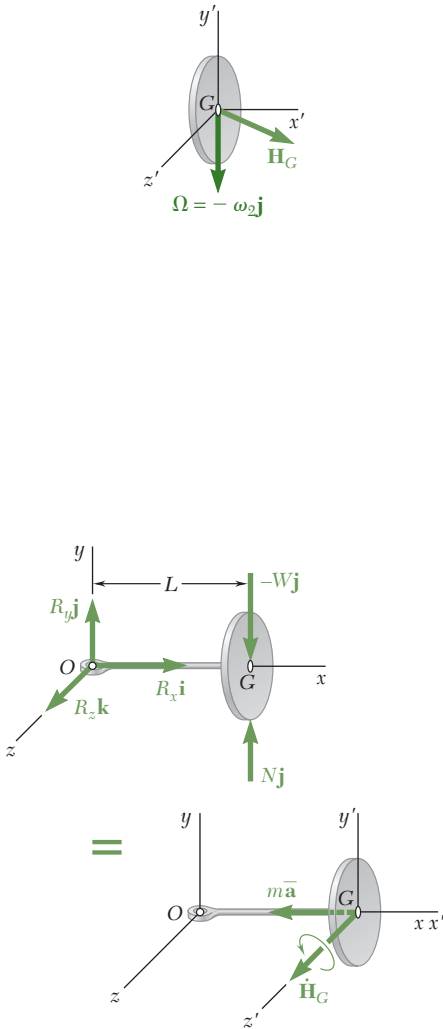
$$(N - W)L\mathbf{k} = \tfrac{1}{2}mr^2(r/L)\omega_1^2\mathbf{k}$$

$$N = W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2 \qquad \mathbf{N} = [W + \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2]\mathbf{j} \qquad (3)$$

$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{F}_{\text{efet.}}: \qquad \mathbf{R} + N\mathbf{j} - W\mathbf{j} = m\bar{\mathbf{a}}$$

Substituindo N de (3) e $m\bar{\mathbf{a}}$ de (1) na expressão anterior e resolvendo para $\mathbf{R}$, obtemos

$$\mathbf{R} = -(mr^2\omega_1^2/L)\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}mr(r/L)^2\omega_1^2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{R} = -\frac{mr^2\omega_1^2}{L}\left(\mathbf{i} + \frac{r}{2L}\mathbf{j}\right) \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, você deverá resolver problemas que envolvem o *movimento tridimensional de corpos rígidos.* O método a ser empregado é basicamente o mesmo que você usou no Cap. 16 em seu estudo do movimento plano de corpos rígidos. Você construirá uma equação baseada no diagrama de corpo livre mostrando que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas e igualará somas de componentes e somas de momentos nos dois membros dessa equação. Agora, porém, o sistema de forças efetivas será representado por um vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e um binário $\dot{\mathbf{H}}_G$, cuja determinação será explicada nos parágrafos a seguir.

Para resolver um problema que envolve o movimento bidimensional de um corpo rígido, você deve perfazer os seguintes passos:

1. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo em relação ao seu centro de massa G a partir de sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ relativa a um referencial $GX'Y'Z'$ de orientação fixa. Essa é uma operação que você aprendeu a efetuar na seção anterior. Todavia, como a configuração do corpo mudará com o tempo, será necessário agora que você use um sistema auxiliar de eixos $Gx'y'z'$ (Fig. 18.9) para calcular os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ e os momentos e produtos de inércia do corpo. Esses eixos podem ser rigidamente ligados ao corpo, caso em que sua velocidade angular é igual a $\boldsymbol{\omega}$ [Problemas Resolvidos 18.3 e 18.4], ou podem ter uma velocidade angular própria $\boldsymbol{\Omega}$ [Problema Resolvido 18.5].

Da lição anterior, lembre-se do seguinte:

a. Se os eixos principais de inércia do corpo em G são conhecidos, use-os como eixos de coordenadas x', y' e z', pois os respectivos produtos de inércia do corpo serão iguais a zero. (Note que, se o corpo tiver simetria axial, esses eixos não precisarão ser rigidamente ligados a ele.) Decomponha $\boldsymbol{\omega}$ em componentes $\omega_{x'}$, $\omega_{y'}$ e $\omega_{z'}$ ao longo desses eixos e calcule os momentos principais de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y}$, e $\bar{I}_{z'}$ Os respectivos componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ são

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

b. Se os eixos principais de inércia do corpo em G são desconhecidos, você deve usar as Eqs. (18.7) para determinar os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$. Essas equações requerem o cálculo preliminar dos *produtos de inércia* do corpo, bem como dos seus momentos de inércia em relação aos eixos selecionados.

(*continua*)

2. Calcule a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial $GX'Y'Z'$. Note que esse referencial tem uma *orientação fixa,* enquanto o referencial $Gx'y'z'$ que você usou para calcular os componentes do vetor $\boldsymbol{\omega}$ era um *referencial rotativo.* Remetemos você à nossa discussão, na Seção 15.10, sobre a taxa de variação de um vetor em relação a um referencial rotativo. Retomando a Eq. (15.31), você expressará a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ como segue:

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \tag{18.22}$$

O primeiro termo do segundo membro da Eq. (18.22) representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial rotativo $Gx'y'z'$. Esse termo se anulará se o vetor $\boldsymbol{\omega}$ – e, portanto, $\mathbf{H}_G$ – permanecer constante tanto em intensidade como em direção quando visto a partir daquele referencial. Por outro lado, se qualquer uma das derivadas temporais $\dot{\omega}_{x'}$, $\dot{\omega}_{y'}$ e $\dot{\omega}_{z'}$ for diferente de zero, $(\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gx'y'z'}$ também será diferente de zero, e seus componentes deverão ser determinados por diferenciação das Eqs. (18.10) em relação a t. Finalmente, lembre-se de que, se o referencial rotativo estiver ligado rigidamente ao corpo, sua velocidade angular será igual à do corpo e Ω poderá ser substituída por $\boldsymbol{\omega}$.

3. Desenhe a equação baseada no diagrama de corpo livre para o corpo rígido, mostrando que o sistema de forças externas exercidas sobre o corpo é equivalente ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado em G e ao vetor binário $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.11). Igualando componentes em qualquer direção e momentos em relação a qualquer ponto, você pode escrever até seis equações escalares de movimento independentes [Problemas Resolvidos 18.3 e 18.5].

4. Ao resolver problemas que envolvam o movimento de um corpo rígido em torno de um ponto fixo O, você pode achar conveniente usar a seguinte equação, deduzida na Seção 18.7, que elimina os componentes da reação em O,

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

onde o primeiro termo do segundo membro representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_O$ em relação ao referencial rotativo $Oxyz$ e onde Ω é a velocidade angular do referencial.

5. Ao determinar as reações dos mancais de um eixo rotativo, use a Eq. (18.28) e siga os seguintes passos:

a. Coloque o ponto fixo O em um dos dois mancais de apoio do eixo e ligue o referencial $Oxyz$ ao eixo rotativo, sendo este alinhado com um dos eixos de coordenadas. Por exemplo, admitindo que o eixo x tenha sido alinhado com o eixo rotativo, você terá $\Omega = \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$ [Problema Resolvido 18.4].

b. Como os eixos selecionados não serão, em geral, eixos principais de inércia em O, você precisará calcular, além dos momentos de inércia, os *produtos de inércia* do eixo rotativo em relação aqueles eixos de coordenadas e usar as Eqs. (18.13) para determinar $\mathbf{H}_O$. Admitindo novamente que o eixo x tenha sido alinhado com o eixo rotativo, as Eqs. (18.13) se reduzem a

$$H_x = I_x\omega \qquad H_y = -I_{yx}\omega \qquad H_z = -I_{zx}\omega \tag{18.13'}$$

mostrando que $\mathbf{H}_O$ *não estará orientado ao longo do eixo rotativo*.

c. Para obter $\dot{\mathbf{H}}_O$, substitua as expressões obtidas na Eq. (18.28) e faça $\Omega = \boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{i}$. Se a velocidade angular do eixo rotativo for constante, o primeiro termo do segundo membro da equação se anulará. Porém, se o eixo tiver uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{i}$, o primeiro termo não será nulo e deverá ser calculado por diferenciação das expressões em (18.13′) em relação ao tempo t. Resultarão disso equações similares às Eqs. (18.13′), com ω substituído por α.

d. Uma vez que o ponto O coincida com um dos mancais, as três equações escalares correspondentes à Eq. (18.28) poderão ser resolvidas para os componentes da reação dinâmica no outro mancal. Se o centro de massa G do eixo estiver localizado sobre a linha que liga os dois mancais, a força eficaz $m\bar{\mathbf{a}}$ será nula. Construindo a equação baseada em diagrama de corpo livre do eixo rotativo, você observará então que os componentes da reação dinâmica do primeiro mancal devem ser iguais e opostos àqueles que acabou de determinar. Se G não estiver localizado sobre a linha que liga os dois mancais, você poderá determinar a reação do primeiro mancal pondo o ponto fixo O no segundo mancal e repetindo o procedimento anterior [Problema Resolvido 18.4]; ou então poderá obter equações adicionais de movimento a partir da equação baseada no diagrama de corpo livre do eixo, assegurando-se, antes, de determinar e incluir a força eficaz $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicada em G.

e. Na maioria dos problemas, pede-se para determinar as "reações dinâmicas" nos mancais, ou seja, as *forças adicionais* exercidas pelos mancais sobre o eixo quando ele está girando. Ao determinar reações dinâmicas, ignore o efeito de carregamentos estáticos, tais como o peso do eixo.

PROBLEMAS

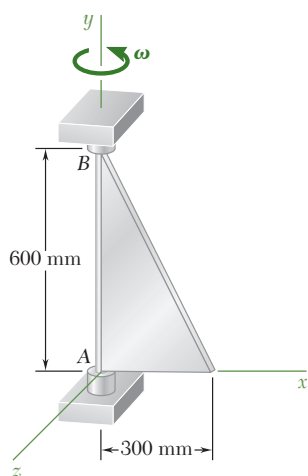



Figura P18.65

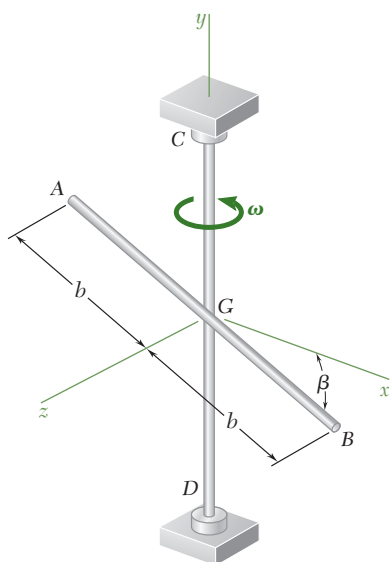



Figura P18.66

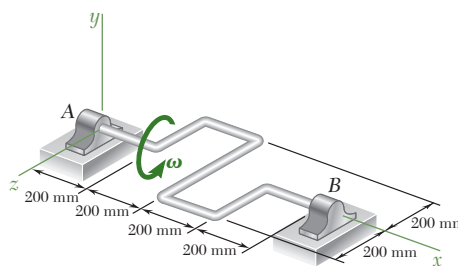



Figura P18.67

18.55 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_D$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_D$ do conjunto do Problema 18.1.

18.56 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco do Problema 18.2.

18.57 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_A$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ da placa do Problema 18.3, sabendo que sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ permanece constante.

18.58 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco do Problema 18.4.

18.59 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco do Problema 18.5.

18.60 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_A$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ do disco do Problema 18.6.

18.61 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_D$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_D$ do conjunto do Problema 18.1, admitindo que, no instante considerado, o conjunto tenha uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = (96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.62 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_D$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_D$ do conjunto do Problema 18.1, admitindo que, no instante considerado, o conjunto tenha uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = (12 \text{ rad/s})\mathbf{i}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = -(96 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$.

18.63 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_A$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ do conjunto da placa do Problema 18.3, admitindo que, no instante considerado, o conjunto tenha uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.64 Determine a taxa de variação $\dot{\mathbf{H}}_G$ da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do disco do Problema 18.4, admitindo que, no instante considerado, o conjunto tenha uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{j}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{j}$.

18.65 Uma placa triangular homogênea e fina de massa de 2,5 kg está soldada a um eixo vertical leve suportado por dois mancais em A e B. Sabendo que a placa gira com uma taxa constante ω de 8 rad/s, determine as reações dinâmicas nos pontos A e B.

18.66 Uma barra AB uniforme e delgada de massa m e um eixo vertical CD, cada com comprimento $2b$, são soldados juntos em seus pontos médios G. Sabendo que o eixo gira numa taxa constante ω, determine as reações dinâmicas de C e D.

18.67 Um eixo de 8 kg mostrado na figura tem uma seção transversal constante. Sabendo que o eixo gira com uma taxa constante $\omega = 12$ rad/s, determine as reações dinâmicas nos pontos A e B.

18.68 O conjunto mostrado na figura consiste de pedaços de chapa de alumínio de espessura uniforme e massa total de 1,25 kg soldados a um eixo leve apoiado em mancais A e B. Sabendo que o conjunto gira a uma taxa constante $\omega = 240$ rpm, determine as reações dinâmicas em A e B.

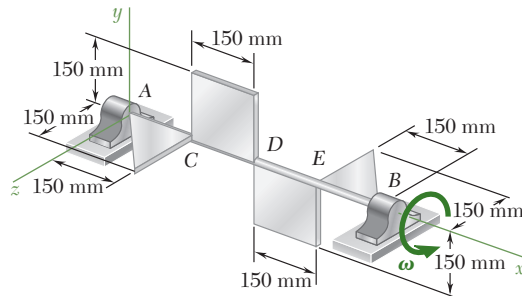



Figura P18.68

18.69 Quando a roda de 18 kg mostrada na figura é presa a uma máquina de balanceamento e posta para girar a uma taxa de 12,5 rev/s, verifica-se que as forças exercidas pela roda sobre a máquina são equivalentes a um sistema força-binário consistindo de uma força $\mathbf{F} = (160 \text{ N})\mathbf{j}$ aplicada em C e um binário $\mathbf{M}_C = (14{,}7 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$, sendo que os vetores unitários formam uma tríade que gira com a roda. (a) Determine a distância do eixo de rotação ao centro de massa da roda e os produtos de inércia I_{xy} e I_{zx}. (b) Usando apenas dois pesos corretivos a fim de balancear a roda estática e dinamicamente, quais deveriam ser esses pesos e em quais dos pontos A, B, D ou E eles deveriam ser colocados?

18.70 Depois de prender a roda de 18 kg mostrada na figura a uma máquina de balanceamento e colocá-la para girar a uma taxa de 15 rev/s, um mecânico verifica que, para balancear a roda tanto estática como dinamicamente, ele deve usar dois pesos corretivos, um peso de massa de 170 g em B e um peso de massa de 56 g em D. Usando um referencial dextrogiro que gira com a roda (com o eixo z perpendicular ao plano da figura), determine, antes de se prender os pesos corretivos, (a) a distância do eixo de rotação ao centro de massa da roda e os produtos de inércia I_{xy} e I_{zx}, (b) o sistema força-binário em C equivalente às forças exercidas pela roda sobre a máquina.

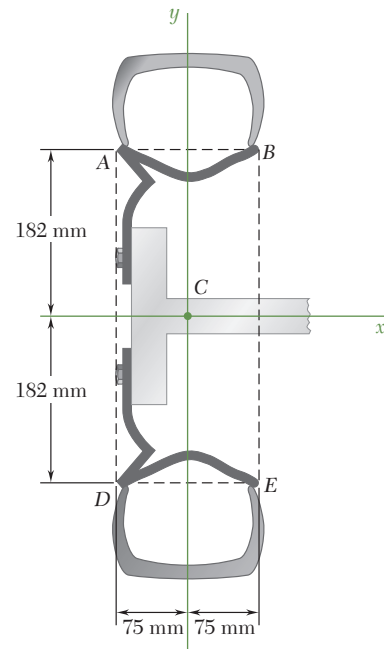



Figura *P18.69* e *P18.70*

18.71 Sabendo que o conjunto do Problema 18.65 está inicialmente em repouso ($\omega = 0$) quando um binário de momento $\mathbf{M}_0 = (0{,}75 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j}$ é aplicado ao eixo, determine (a) a aceleração angular resultante do conjunto, (b) as reações dinâmicas nos pontos A e B imediatamente após a aplicação do binário.

18.72 Sabendo que o conjunto do Problema 18.66 está inicialmente em repouso ($\omega = 0$) quando um binário de momento $\mathbf{M}_0 = M_0\mathbf{j}$ é aplicado ao eixo CD, determine (a) a aceleração angular resultante do conjunto, (b) as reações dinâmicas nos pontos C e D imediatamente após a aplicação do binário.

18.73 Um componente de chapa metálica mostrado na figura tem espessura homogênea e massa de 600 g. Ele está preso a um eixo leve suportado por mancais em A e B distantes em 150 mm. O componente está em repouso quando um binário $\mathbf{M}_0$ lhe é aplicado. Se a resultante da aceleração angular é $\boldsymbol{\alpha} = (12 \text{ rad/s}^2)\mathbf{k}$, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$, (*b*) as reações dinâmicas em A e B imediatamente após a aplicação do binário.

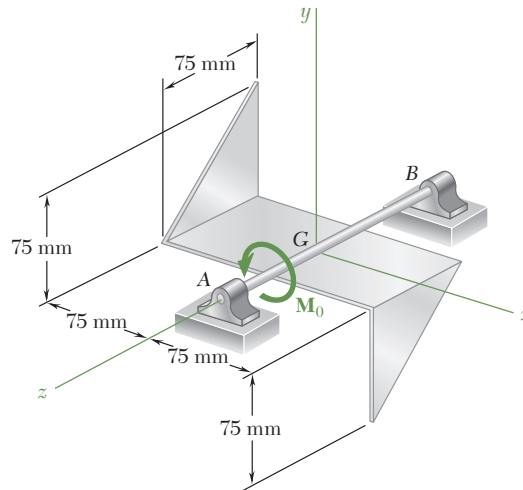



Figura P18.73

18.74 Para o componente de chapa metálica do Problema 18.73, determine (*a*) a velocidade angular do componente 0,6 s depois do binário $\mathbf{M}_0$ ter sido aplicado, (*b*) a intensidade das reações dinâmicas em A e B neste momento.

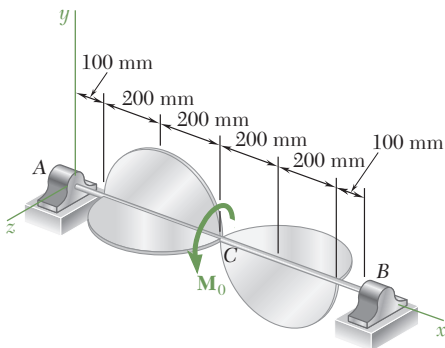
18.75 O eixo do Problema 18.67 está inicialmente em repouso ($\boldsymbol{\omega} = 0$), quando um binário de momento $\mathbf{M}_0$ é aplicado a ele. Sabendo que a resultante da aceleração angular é $\boldsymbol{\alpha} = (20 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$, (*b*) as reações dinâmicas em A e B imediatamente após o binário ser aplicado.

18.76 O conjunto do Problema 18.68 está inicialmente em repouso ($\boldsymbol{\omega} = 0$), quando um binário de momento $\mathbf{M}_0$ é aplicado ao eixo AB. Sabendo que a aceleração angular resultante do conjunto é $\boldsymbol{\alpha} = (150 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$, (*b*) as reações dinâmicas em A e B imediatamente após o binário ser aplicado.

Figura P18.77

18.77 O conjunto mostrado na figura tem massa de 6 kg e consiste em quatro placas finas semicirculares de alumínio com 400 mm de diâmetro, soldadas a um eixo leve AB de 1 m de comprimento. O conjunto está em repouso ($\boldsymbol{\omega} = 0$) no instante $t = 0$ quando um binário $\mathbf{M}_0$ é aplicado do modo mostrado, fazendo o conjunto girar uma volta completa em 2 s. Determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$, (*b*) as reações dinâmicas em A e B em $t = 0$.

18.78 Para o conjunto do Problema 18.77, determine as reações dinâmicas em A e B em $t = 2$ s.

18.79 O volante de um motor de automóvel, preso rigidamente ao eixo de manivelas, é equivalente a uma placa de aço de 400 mm de diâmetro e 15 mm de espessura. Determine a intensidade do binário exercido pelo volante sobre o eixo de manivelas horizontal à medida que o automóvel faz uma curva sem inclinação de 200 m de raio a uma velocidade de 90 km/h, com o volante girando a 2.700 rpm. Admita que o automóvel tenha (*a*) tração nas rodas traseiras com o motor montado longitudinalmente, (*b*) tração nas rodas dianteiras com o motor montado transversalmente. (Densidade do aço = 7.860 kg/m^3.)

18.80 Uma hélice de quatro lâminas de um avião tem massa de 160 kg e raio de giração de 800 mm. Sabendo que a hélice gira a 1.600 rpm quando o avião voa em uma trajetória circular vertical de 600 m de raio a 540 km/h, determine a intensidade do binário exercido pela hélice sobre seu eixo devido à rotação do avião.

Figura *P18.81*

18.81 A lâmina de uma serra portátil e o rotor de seu motor têm massa total de 1,25 kg e raio de giração combinado de 40 mm. Sabendo que a lâmina gira do modo mostrado na figura a uma taxa ω_1 = 1.500 rpm, determine a intensidade e direção do binário **M** que um operário deve exercer sobre a alça da serra para girá-la com uma velocidade angular constante $\omega_2 = -(2{,}4 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

18.82 As pás de um ventilador oscilante e o rotor de seu motor têm massa total de 250 g e um raio de giração combinado de 75 mm. Eles estão apoiados em mancais em *A* e *B*, distantes de 125 mm, e giram à taxa ω_1 = 1.800 rpm. Determine as reações dinâmicas em *A* e *B* quando a carcaça do motor tem velocidade angular $\omega_2 = -(0{,}6 \text{ rad/s})\mathbf{j}$.

Figura *P18.82*

18.83 Cada roda de um automóvel tem massa de 22 kg, diâmetro de 575 mm e raio de giração de 225 mm. O automóvel faz uma curva sem inclinação de raio de 150 m a uma velocidade de 95 km/h. Sabendo que a distância transversal entre as rodas é de 1,5 m, determine a força normal adicional exercida pelo solo sobre cada roda externa devido ao movimento do carro.

18.84 A estrutura essencial de certo tipo de indicador de guinada de uma aeronave é mostrada na figura. Cada mola tem uma constante de 500 N/m e o disco uniforme de 200 g e de 40 mm de raio gira à taxa de 10.000 rpm. As molas estão tensionadas e exercem forças verticais iguais sobre a união *AB* quando o avião voa em linha reta. Determine o ângulo em que a união *AB* irá girar quando o piloto executar uma guinada horizontal de 750 m de raio para a direita a uma velocidade de 800 km/h. Indique se o ponto A se moverá para cima ou para baixo.

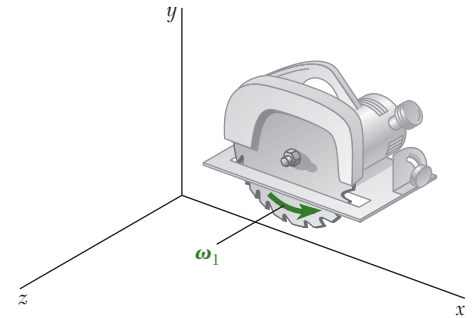
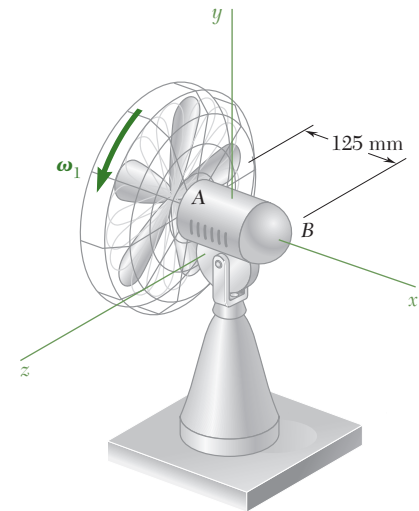
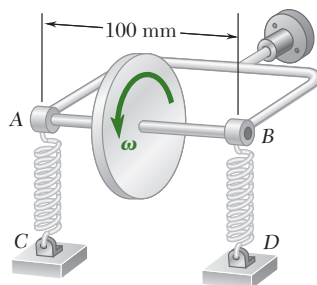



Figura P18.84

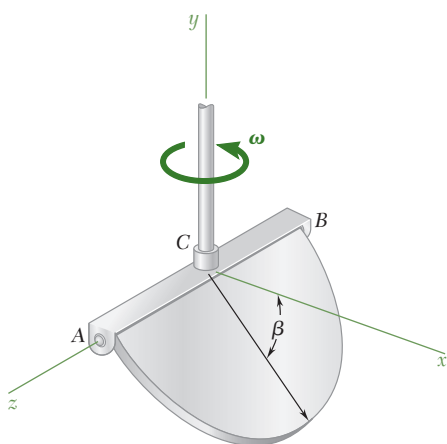



Figura P18.85 e P18.86

18.85 Uma placa semicircular de raio 120 mm está articulada em A e B por uma base em forma de U que gira com velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$ em relação a um eixo vertical. Determine (*a*) o ângulo β entre a forma e a horizontal x quando $\omega = 15$ rad/s, (*b*) o maior valor de ω para que a placa permaneça vertical ($\beta = 90°$)

18.86 Uma placa semicircular de raio 120 mm está articulada em A e B por uma base em forma de U a um eixo vertical que gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine o angulo o valor de ω para que a placa forme um ângulo $\beta = 50°$ com o eixo horizontal x.

18.87 Uma barra delgada é dobrada em forma de uma estrutura quadrada de lado 200 mm. O conjunto está articulado no ponto A por uma base que gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine (*a*) o ângulo β que a linha AB forma com o eixo horizontal x quando $\omega =$ 9,8 rad/s, (*b*) o maior valor de ω para a qual $\beta = 90°$.

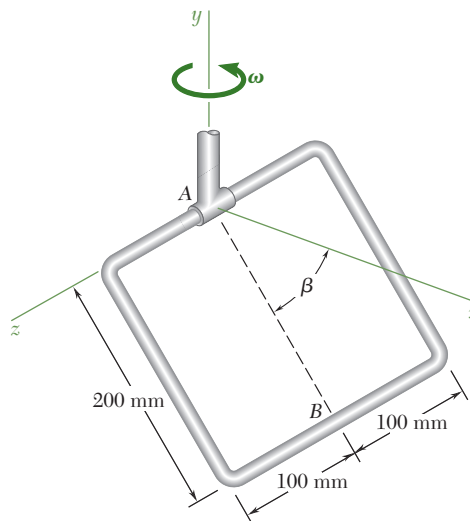



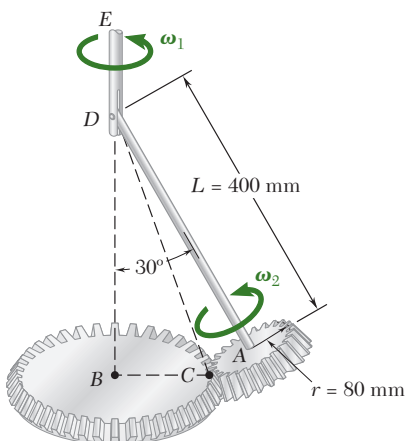
Figura P18.87 e P18.88

18.88 Uma barra delgada é dobrada em forma de uma estrutura quadrada de lado 200 mm. A estrutura está articulada no ponto A por uma base que gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine o valor de ω para que a linha AB forme um ângulo $\beta = 48°$ com o eixo horizontal x.

Figura P18.89

18.89 A engrenagem A de 950 g está limitada a rolar sobre a engrenagem fixa B, mas é livre para girar em torno do eixo AD. O eixo AD, de 400 mm de comprimento e peso desprezível, está ligado por um grampo em forma de U ao eixo vertical DE que gira do modo mostrado na figura com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$. Admitindo que a engrenagem A possa ser aproximada por um disco fino de raio de 80 mm, determine o maior valor admissível de ω_1 para que a engrenagem A não perca contato com a engrenagem B.

18.90 Determine a força $\mathbf{F}$ exercida pela engrenagem B sobre a engrenagem A do Problema 18.89 quando o eixo DE gira com a velocidade constante $\boldsymbol{\omega}_1 = 4$ rad/s. (*Dica:* a força $\mathbf{F}$ tem de ser perpendicular à linha traçada de D a C).

18.91 e 18.92 A barra delgada *AB* está presa por um grampo ao braço *BCD* que gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}$ em torno da linha de centro de sua porção vertical *CD*. Determine a intensidade da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

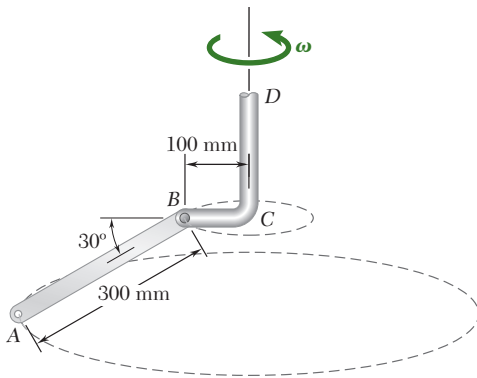
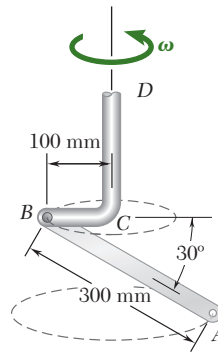



Figura P18.91 **Figura P18.92**

18.93 Dois discos, cada qual com massa de 5 kg e raio de 100 mm, giram do modo mostrado na figura à taxa ω_1 = 1.500 rpm em torno de uma barra *AB* de massa desprezível que, por sua vez, gira em torno do eixo vertical à taxa ω_2 = 45 rpm. (*a*) Determine as reações dinâmicas nos pontos *C* e *D*. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que o sentido de giro do disco *B* seja invertido.

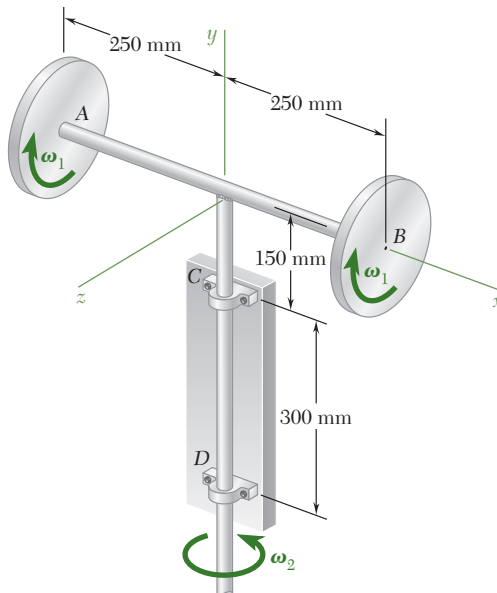



Figura P18.93 e P18.94

18.94 Dois discos, cada qual com massa de 5 kg e raio de 100 mm, giram do modo mostrado na figura à taxa ω_1 = 1.500 rpm em torno de uma barra *AB* de massa desprezível que, por sua vez, gira em torno do eixo vertical à taxa ω_2. Determine o máximo valor admissível de ω_2 para que as intensidades das reações dinâmicas nos pontos *C* e *D* não excedam 250 N cada uma.

18.95 O disco de 250 g mostrado na figura gira à taxa $\omega_1 = 750$ rpm, enquanto o eixo *AB* gira do modo mostrado na figura com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_2$ de 6 rad/s. Determine as reações dinâmicas em *A* e *B*.

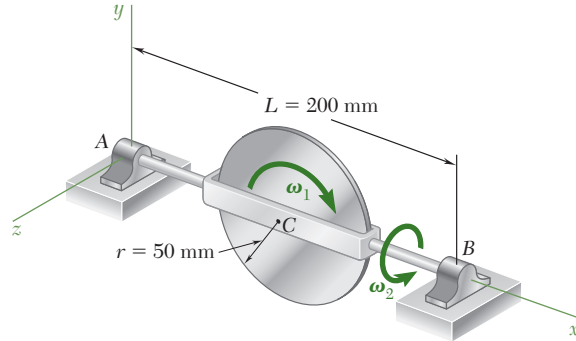



Figura P18.95 e P18.96

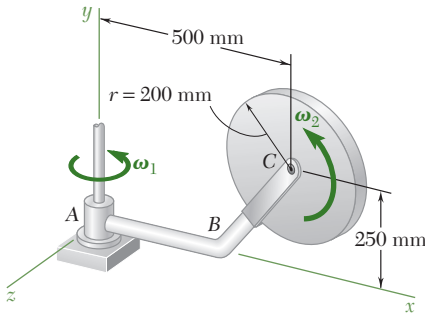
18.96 O disco de 250 g mostrado na figura gira à taxa $\omega_1 = 750$ rpm, enquanto o eixo *AB* gira do modo mostrado na figura com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_2$. Determine a intensidade máxima admissível de $\boldsymbol{\omega}_2$ para que as reações dinâmicas em *A* e *B* não excedam 1,25 N cada uma.

18.97 Um disco fino de massa $m = 5$ kg gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_2$ em relação ao braço *ABC*, que por sua vez gira com velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ em torno do eixo *y*. Sabendo que $\omega_1 = 5$ rad/s e $\omega_2 = 15$ rad/s e que ambas são constantes, determine o sistema força-binario que representa as reações dinâmicas no apoio *A*.

Figura *P18.97*

18.98 Um disco homogêneo de massa $m = 3$ kg gira à taxa constante $\omega_1 = 16$ rad/s em relação ao braço *ABC*, que está soldado ao eixo *DCE* que gira à taxa constante $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine as reações dinâmicas em *D* e *E*.

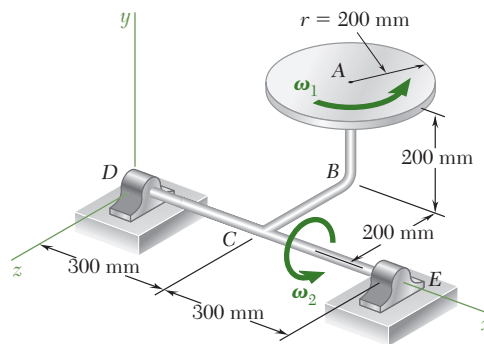



Figura *P18.98*

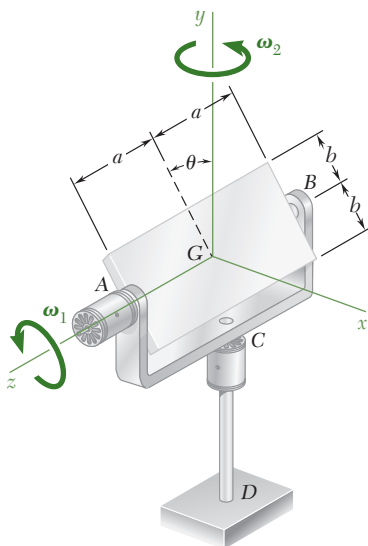



Figura P18.99

***18.99** Um outdoor de comprimento $2a = 2{,}4$ m e largura $2b = 1{,}6$ m é mantido em relação a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_1$ em torno de seu eixo horizontal por um pequeno motor elétrico preso em *A* à estrutura *ACB*. Essa mesma estrutura é mantida girando a uma taxa constante $\boldsymbol{\omega}_2$ em torno de um eixo vertical por um segundo motor preso em *C* à coluna *CD*, Sabendo que o painel e a estrutura percorrem uma volta completa em 6 s e 12 s, respectivamente, expresse, em função do ângulo θ, a reação dinâmica exercida sobre a coluna *CD* por seu apoio em *D*.

***18.100** Para o sistema do Problema 18.99, mostre que (*a*) a reação dinâmica em *D* é independente do comprimento $2a$ do painel e (*b*) a razão M_1/M_2 das intensidades dos binários exercidos pelos motores em *A* e *C*, respectivamente, é independente das dimensões e da massa do painel, e é igual a $\omega_2/2\omega_1$ em um dado instante qualquer.

Figura P18.101 e P18.102

18.101 Um disco homogêneo de 3 kg e raio de 60 mm gira do modo mostrado na figura à taxa constante ω_1 = 60 rad/s e é suportado pelo eixo dobrado *AB*, que está soldado ao eixo vertical *CBD*. O sistema está em repouso quando um binário $\mathbf{M}_0$ = (0,40 N · m)$\mathbf{j}$ é aplicado durante 2 s, sendo então removido. Determine as reações dinâmicas nos apoios em *C* e *D* após a remoção do binário.

18.102 Um disco homogêneo de 3 kg e raio de 60 mm gira do modo mostrado na figura à taxa constante ω_1 = 60 rad/s e é suportado pelo eixo dobrado *AB*, que está soldado ao eixo vertical *CBD*. O sistema está em repouso quando um binário $\mathbf{M}_0$ é aplicado durante 3 s, sendo então removido. Sabendo que a máxima velocidade angular atingida pelo eixo é 18 rad/s, determine (*a*) o binário $\mathbf{M}_0$, (*b*) as reações dinâmicas nos apoios em *C* e *D* após a remoção do binário.

18.103 Para o Problema 18.97, determine (*a*) o binário $M_1\mathbf{j}$ que poderia ser aplicado ao braço *ABC* para dar-lhe uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}_1 = -(7{,}5 \text{ rad/s}^2)\mathbf{j}$ quando ω_1 = 5 rad/s, sabendo que o disco gira a uma taxa constante ω_2 = 15 rad/s, (*b*) o sistema força-binário que representa a reação dinâmica em *A* no instante. Considere que *ABC* tem massa desprezível.

Figura *P18.105*

18.104 Admite-se que, no instante mostrado na figura, o eixo *DCE* do Problema 18.98 tenha uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_2$ = (8 rad/s)$\mathbf{i}$ e uma aceleração angular $\boldsymbol{\alpha}_2 = (6 \text{ rad/s}^2)\mathbf{i}$. Lembrando que o disco gira com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega}_1$ = (16 rad/s)$\mathbf{j}$, determine (*a*) o binário que deve ser aplicado ao eixo *DCE* para produzir a aceleração angular dada, (*b*) as correspondentes reações dinâmicas em *D* e *E*.

18.105 Um disco homogêneo de 2,5 kg e raio de 80 mm gira com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_1$ em relação ao braço *ABC*, que está soldado a um eixo *DCE* girando a uma taxa constante ω_2 = 12 rad/s como mostra a figura. O atrito nos mancais em *A* provoca um decréscimo de ω_1 numa taxa de 15 rad/s^2. Determine as reações dinâmicas correspondentes em *D* e *E* no momento que ω_1 tenha decrescido para 50 rad/s.

****18.106*** Uma barra delgada e homogênea *AB*, de massa *m* e comprimento *L*, é posta a girar com uma taxa constante ω_2 em torno do eixo horizontal *z*, enquanto a estrutura *CD* é posta a girar com uma taxa constante ω_1 em torno do eixo *y*. Expresse em função do ângulo θ (*a*) o binário $\mathbf{M}_1$ necessário para manter a rotação da estrutura, (*b*) o binário $\mathbf{M}_2$ necessário para manter a rotação da barra, (*c*) as reações dinâmicas nos suportes *C* e *D*.

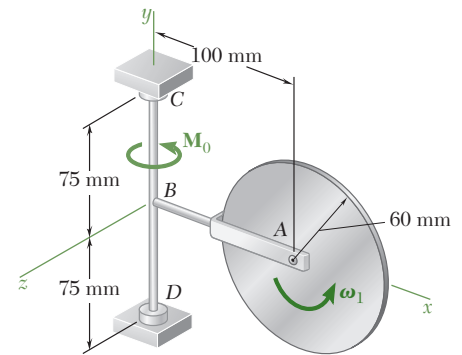
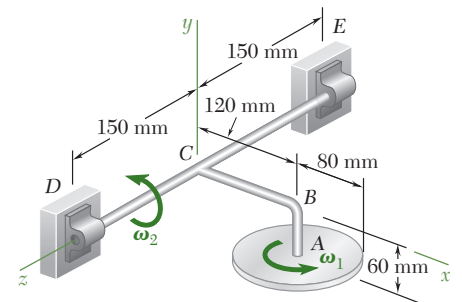
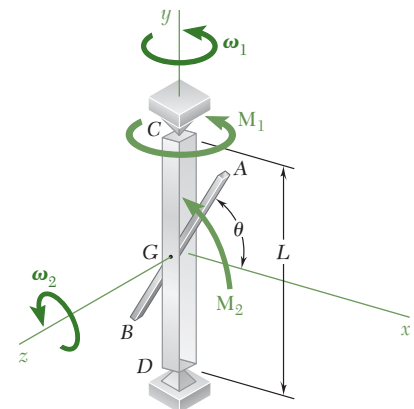



Figura *P18.106*

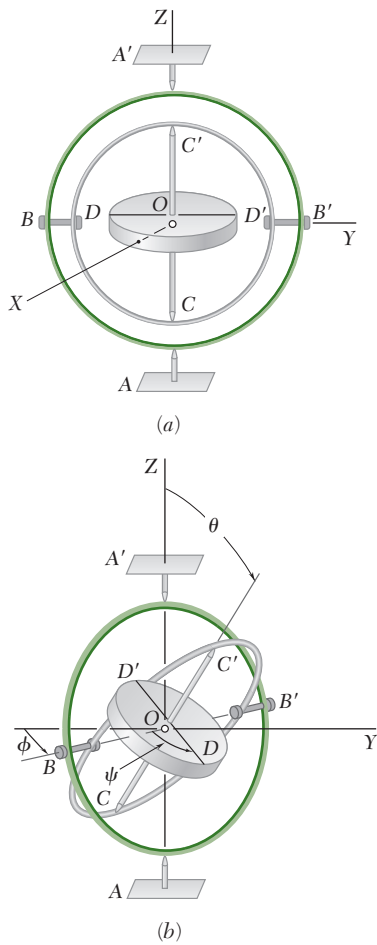



Figura 18.15

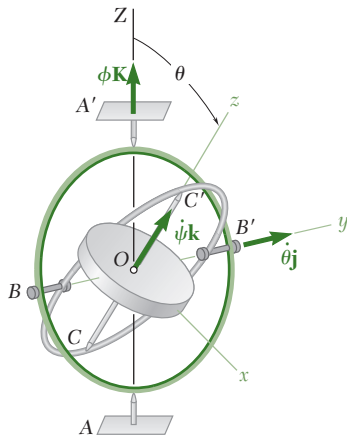



Figura 18.16

*18.9 Movimento de um giroscópio. Ângulos de Euler

Um *giroscópio* consiste essencialmente de um rotor que pode girar livremente em torno de seu eixo geométrico. Quando montado em uma suspensão Cardan (Fig. 18.15), o giroscópio pode assumir qualquer orientação, mas seu centro de massa precisa permanecer fixo no espaço. A fim de definir a posição de um giroscópio em um dado instante, selecionemos um referencial fixo *OXYZ*, com a origem *O* localizada no centro de massa do giroscópio e o eixo *Z* orientado ao longo da linha definida pelos mancais *A* e *A′* da argola externa. Vamos considerar uma posição de referência do giroscópio em que as duas argolas e um dado diâmetro *DD′* do rotor estejam localizados no plano fixo *YZ* (Fig. 18.15*a*). O giroscópio pode ser levado dessa posição de referência a qualquer posição arbitrária (Fig. 18.15*b*) por meio dos seguintes passos: (1) uma rotação da argola externa de um ângulo ϕ em torno do eixo *AA′*, (2) uma rotação da argola interna de θ em torno de *BB′* e (3) uma rotação do rotor de ψ em torno de *CC′*. Os ângulos ϕ, θ e ψ são denominados *ângulos de Euler;* eles caracterizam por completo a posição do giroscópio em um instante dado qualquer. Suas derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ definem, respectivamente, a taxa de *precessão,* a taxa de *nutação* e a taxa de *rotação própria* do giroscópio no instante considerado.

Para calcular os componentes da velocidade angular e da quantidade de movimento angular do giroscópio, usaremos um sistema de eixos rotativo *Oxyz ligado à argola interna,* com o eixo *y* ao longo de *BB′* e o eixo *z* ao longo de *CC′* (Fig. 18.16). Esses eixos são eixos principais de inércia para o giroscópio. Embora eles o sigam em sua precessão e nutação, não giram; por essa razão, eles são mais convenientes para o uso do que os eixos realmente ligados ao giroscópio. A velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do giroscópio em relação ao referencial fixo *OXYZ* será agora expressa como a soma das três velocidades angulares parciais correspondentes, respectivamente, à precessão, à nutação e à rotação própria do giroscópio. Representando por **i**, **j** e **k** os vetores unitários ao longo dos eixos rotativos e por **K** o vetor unitário ao longo do eixo fixo Z, temos

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\psi}\mathbf{k} \tag{18.33}$$

Como os componentes vetoriais obtidos para $\boldsymbol{\omega}$ em (18.33) não são ortogonais (Fig. 18.16), o vetor unitário **K** será decomposto em componentes ao longo dos eixos *x* e *z;* escrevemos

$$\mathbf{K} = -\text{sen}\ \theta\ \mathbf{i} + \cos\theta\ \mathbf{k} \tag{18.34}$$

e, substituindo **K** em (18.33),

$$\omega = -\dot{\phi}\ \text{sen}\ \theta\ \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi}\ \cos\theta)\mathbf{k} \tag{18.35}$$

Uma vez que os eixos de coordenadas são eixos principais de inércia, os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ podem ser ob-

tidos multiplicando-se os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ pelos momentos de inércia do rotor em relação aos eixos x, y e z, respectivamente. Representando por I o momento de inércia do rotor em relação a seu eixo de rotação própria, por I' seu momento de inércia em relação a um eixo transversal passando por O e desprezando a massa das argolas, escrevemos

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \tag{18.36}$$

Lembrando que os eixos rotativos estão ligados à argola interna e que, portanto, não giram, expressamos sua quantidade de movimento angular pela soma

$$\mathbf{\Omega} = \dot{\phi}\mathbf{K} + \dot{\theta}\mathbf{j} \tag{18.37}$$

ou, substituindo $\mathbf{K}$ da Eq. (18.34),

$$\mathbf{\Omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \, \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{k} \tag{18.38}$$

Substituindo $\mathbf{H}_O$ e Ω de (18.36) e (18.38) na equação

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.28}$$

obtemos as três equações diferenciais

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= -I'(\ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta + 2\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta) + I\dot{\theta} \, (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\
\Sigma M_y &= I'(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta) + I\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \, (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \\
\Sigma M_z &= I\frac{d}{dt} (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)
\end{aligned} \tag{18.39}$$

As equações (18.39) definem o movimento de um giroscópio sujeito a um dado sistema de forças quando a massa das argolas é desprezada. Elas também podem ser usadas para definir o movimento de um *corpo com simetria axial* (ou corpo de revolução) preso a um ponto sobre seu eixo de simetria e para definir o movimento de um corpo com simetria axial em relação ao seu centro de massa. Embora as argolas do giroscópio tenham nos ajudado a visualizar os ângulos de Euler, está claro que esses ângulos podem ser usados para definir a posição de qualquer corpo rígido em relação a eixos centrados em um ponto do corpo, não importando de que maneira o corpo esteja de fato apoiado.

Como as equações (18.39) são não lineares, em geral, não será possível expressar os ângulos de Euler ϕ, θ e ψ como funções analíticas do tempo t, podendo ser necessário empregar métodos numéricos. Todavia, como você verá nas próximas seções, existem diversos casos particulares de interesse que podem ser facilmente analisados.

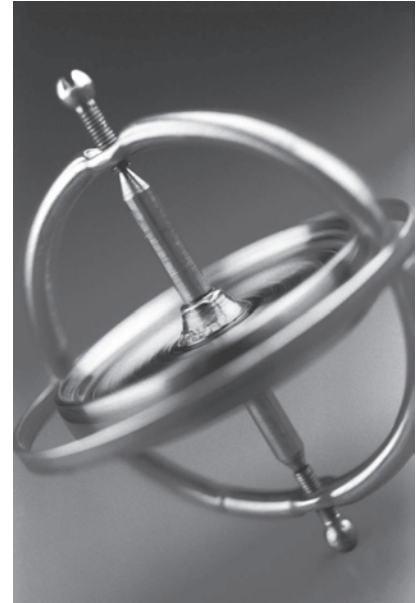



Foto 18.5 O giroscópio pode ser usado para medir a orientação e consegue manter a mesma direção absoluta no espaço.

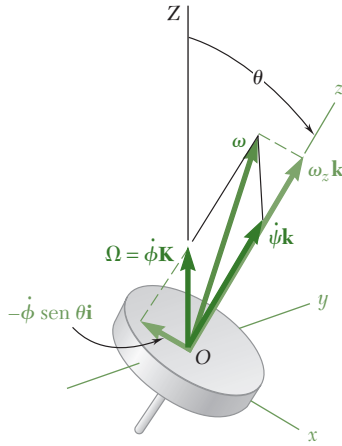



Figura 18.17

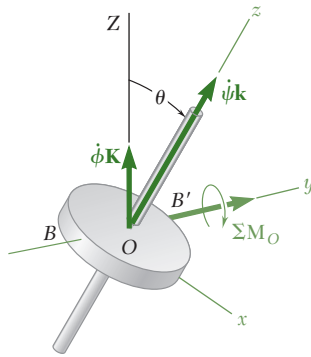



Figura 18.18

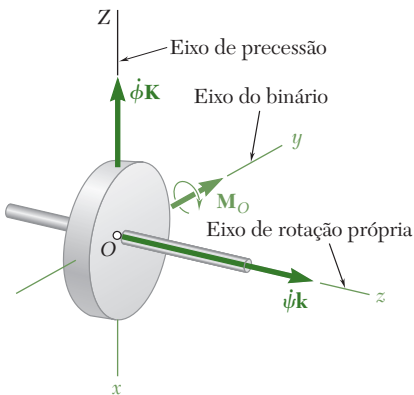



Figura 18.19

*18.10 Precessão em regime permanente de um giroscópio

Vamos investigar o caso particular do movimento de um giroscópio em que o ângulo θ, a taxa de precessão $\dot{\phi}$ e a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ permanecem constantes. Propomos-nos a determinar as forças que devem ser aplicadas ao giroscópio para manter esse movimento, conhecido como *precessão em regime permanente* de um giroscópio.

Em vez de aplicar as equações gerais (18.39), iremos determinar o somatório dos momentos das forças requeridas calculando a taxa de variação da quantidade de movimento angular do giroscópio no caso particular considerado. Notemos primeiramente que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do giroscópio, sua quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ do referencial rotativo (Fig. 18.17) se reduzem, respectivamente, a

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \tag{18.40}$$

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + I\omega_z \mathbf{k} \tag{18.41}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \, \mathbf{k} \tag{18.42}$$

onde $\omega_z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$ = componente retangular da velocidade angular total do giroscópio ao longo do eixo de rotação própria

Como θ, $\dot{\psi}$ e $\dot{\phi}$ são constantes, o vetor $\mathbf{H}_O$ é constante em intensidade e direção em relação ao referencial rotativo, e sua taxa de variação $(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ em relação a esse referencial é nula. Logo, a Eq. (18.28) se reduz a

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \tag{18.43}$$

que fornece, após substituições de (18.41) e (18.42),

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} \text{ sen } \theta \, \mathbf{j} \tag{18.44}$$

Uma vez que o centro de massa do giroscópio é fixo no espaço, temos, pela Eq. (18.1), $\Sigma\mathbf{F} = 0$; logo, as forças que devem ser aplicadas ao giroscópio para manter sua precessão em regime permanente se reduzem a um binário de momento igual ao membro da direita da Eq. (18.44). Notemos que *esse binário deve ser aplicado em relação a um eixo perpendicular ao eixo de precessão e ao eixo de rotação própria do giroscópio* (Fig. 18.18).

No caso particular em que o eixo de precessão e o eixo de rotação própria formam um ângulo reto, temos $\theta = 90°$, e a Eq. (18.44) se reduz a

$$\Sigma\mathbf{M}_O = I\dot{\psi}\dot{\phi}\,\mathbf{j} \tag{18.45}$$

Logo, se aplicarmos ao giroscópio um binário $\mathbf{M}_O$ em relação a um eixo perpendicular a seu eixo de rotação própria, o giroscópio terá precessão em torno de um eixo perpendicular tanto ao eixo de rotação própria como ao eixo do binário, em um sentido tal que os vetores que representam a rotação própria, o binário e a precessão, respectivamente, formam um trio dextrogiro (Fig. 18.19).

Por causa dos binários relativamente altos requeridos para mudar a orientação de seus eixos, os giroscópios são usados como estabilizadores em torpedos e navios. Balas e cápsulas rotativas permanecem tangentes às suas trajetórias devido à ação giroscópica. E é mais fácil manter uma bicicleta balanceada em altas velocidades devido ao efeito estabilizador de suas rodas giratórias. Todavia, a ação giroscópica nem sempre é bem-vinda e deve ser levada em conta no projeto de mancais que apoiam eixos rotativos sujeitos a precessão forçada. As reações exercidas por suas hélices sobre um avião que muda sua direção de voo também devem ser levadas em consideração e compensadas sempre que possível.

*18.11 Movimento de um corpo com simetria axial livre de forças

Figura 18.20

Nesta seção você analisará o movimento, em relação ao seu centro de massa, de um corpo com simetria axial livre de forças, exceto por seu peso próprio. Exemplos de tal tipo de movimento são fornecidos por projéteis, caso a resistência do ar seja desprezada, e por satélites artificiais e veículos espaciais após a extinção de seus foguetes lançadores.

Como o somatório dos momentos das forças externas sem relação ao centro de massa G do corpo é nulo, a Eq. (18.2) fornece $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$. Segue-se que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo em relação a G é constante. Logo, a direção de $\mathbf{H}_G$ é fixa no espaço e pode ser usada para definir o eixo Z, ou o eixo de precessão (Fig. 18.20). Escolhendo um sistema de eixos rotativo $Gxyz$ com o eixo z ao longo do eixo de simetria do corpo, o eixo x no plano definido pelos eixos Z e z, e o eixo y apontando para longe de você, temos

$$H_x = -H_G \operatorname{sen}\theta \qquad H_y = 0 \qquad H_z = H_G \cos\theta \tag{18.46}$$

onde θ representa o ângulo formado entre os eixos Z e z, e H_G representa a intensidade constante da quantidade de movimento angular do corpo em relação a G. Como os eixos x, y e z são eixos principais de inércia para o corpo considerado, podemos escrever

$$H_x = I'\omega_x \qquad H_y = I'\omega_y \qquad H = I\omega_z \tag{18.47}$$

onde I representa o momento de inércia do corpo em relação ao seu eixo de simetria e I' representa seu momento de inércia em relação a um eixo transversal passando por G. Segue-se das Eqs. (18.46) e (18.47) que

$$\omega_x = -\frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I'} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I} \tag{18.48}$$

Figura 18.21

A segunda das relações obtidas mostra que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ não tem componente ao longo do eixo y, isto é, ao longo de um eixo perpendicular ao plano Zz. Assim, o ângulo θ entre os eixos Z e z permanece constante e *o corpo está em precessão em regime permanente em torno do eixo Z.*

Dividindo a primeira e a terceira das relações (18.48) membro a membro e observando pela Fig. 18.21 que $-\omega_x/\omega_z = \operatorname{tg}\gamma$, obtemos a

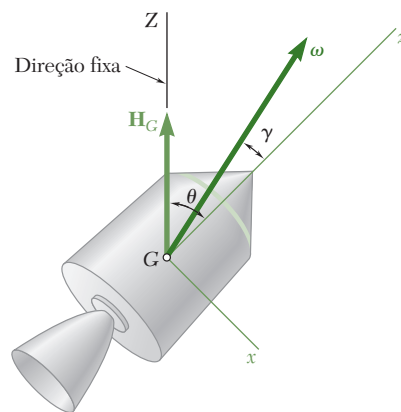



Figura 18.22

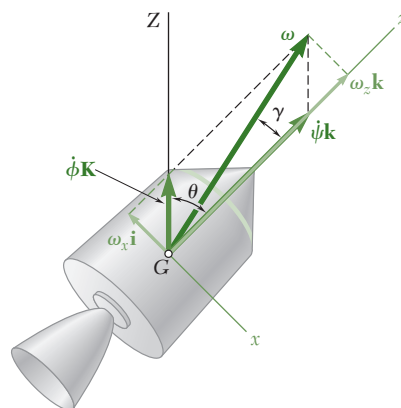
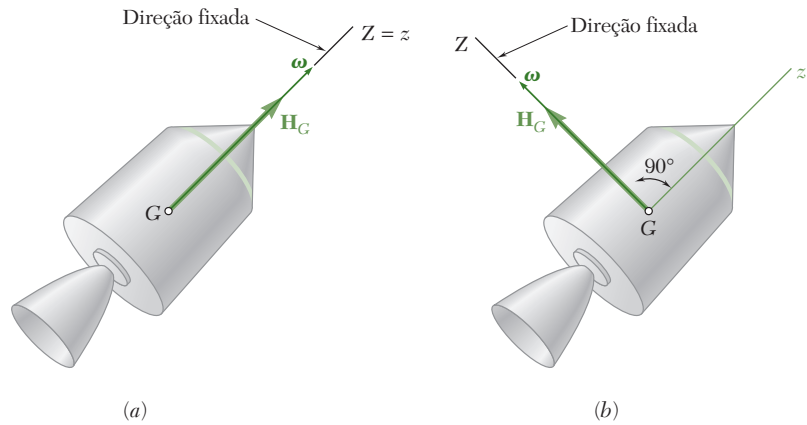
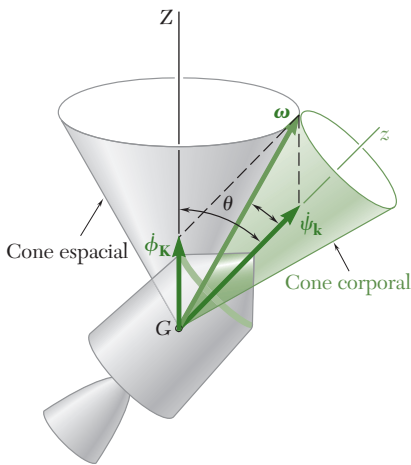
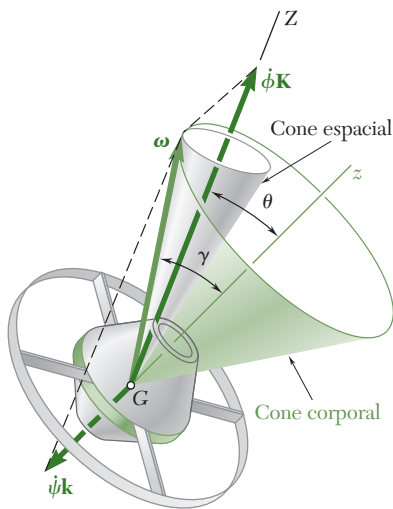
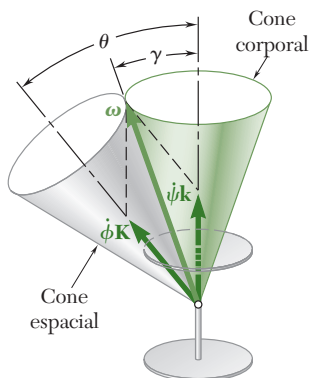
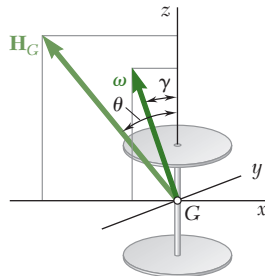
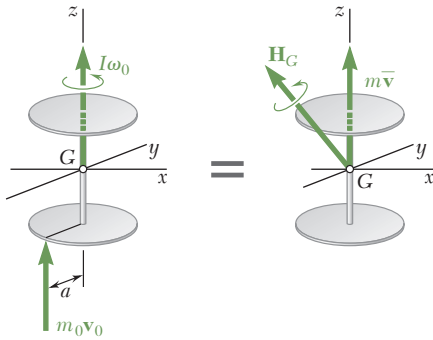
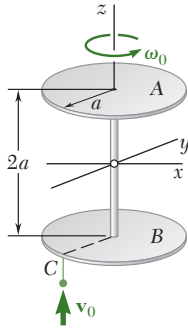



Figura 18.23

Figura 18.24

seguinte relação entre os ângulos γ e θ que os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}_G$, respectivamente, fazem com o eixo de simetria do corpo:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{I}{I'} \operatorname{tg} \theta \tag{18.49}$$

Há dois casos particulares de movimento de um corpo com simetria axial livre de forças que não envolvem precessão: (1) Se o corpo é posto para girar em torno de seu eixo de simetria, temos $\omega_x = 0$ e, pela Eq. (18.47), $H_x = 0$; os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}_G$ têm a mesma orientação e o corpo mantém-se girando em torno de seu eixo de simetria (Fig. 18.22*a*). (2) Se o corpo é posto para girar em torno de um eixo transversal, temos $\omega_z = 0$ e, pela Eq. (18.47), $H_z = 0$; novamente, os vetores $\boldsymbol{\omega}$ e $\mathbf{H}_G$ têm a mesma orientação e o corpo mantém-se girando em torno do eixo transversal dado (Fig. 18.22*b*).

Considerando agora o caso geral representado na Fig. 18.21, lembramos da Seção 15.12 que o movimento de um corpo em torno de um ponto fixo – ou em torno de seu centro de massa – pode ser representado pelo movimento de um cone corporal que rola sobre um cone espacial. No caso de precessão em regime permanente, os dois cones são circulares, pois os ângulos γ e $\theta - \gamma$ que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ faz, respectivamente, com o eixo de simetria do corpo e com o eixo de precessão são constantes. Dois casos devem ser destacados:

1. $I < I'$. Esse é o caso de um corpo alongado, tal como o veículo espacial da Fig. 18.23. Pela Eq. (18.49), temos $\gamma < \theta$; o vetor $\boldsymbol{\omega}$ fica dentro do ângulo *ZGz;* o cone espacial e o cone corporal são tangentes externamente; a rotação própria e a precessão são ambas observadas como anti-horárias a partir do eixo *z* positivo. A precessão é dita *direta.*
2. $I < I'$. Esse é o caso de um corpo achatado, tal como o satélite da Fig. 18.24. Pela Eq. (18.49), temos $\gamma > \theta$; como o vetor $\boldsymbol{\omega}$ deve ficar fora do ângulo *ZGz,* o vetor $\dot{\psi}\mathbf{k}$ tem sentido oposto ao do eixo *z;* o cone espacial está dentro do cone corporal; a precessão e a rotação própria têm sentidos opostos. A precessão é dita *retrógrada.*

PROBLEMA RESOLVIDO 18.6

Sabe-se que um satélite espacial de massa m é dinamicamente equivalente a dois discos finos de massas iguais. Os discos têm raio a = 800 mm e estão rigidamente conectados por uma barra leve de comprimento $2a$. Inicialmente, o satélite está girando livremente em torno de seu eixo de simetria a uma taxa ω_0 = 60 rpm. Um meteorito, de massa $m_0 = m/1.000$, que viajando a uma velocidade $\mathbf{v}_0$ de 2.000 m/s em relação ao satélite, colide com ele e fica alojado em C. Determine (*a*) a velocidade angular do satélite imediatamente após o impacto, (*b*) o eixo de precessão do movimento subsequente e (*c*) as taxas de precessão e de rotação própria do movimento subsequente.

SOLUÇÃO

Momentos de inércia. Observamos que os eixos mostrados são eixos principais de inércia para o satélite e escrevemos

$$I = I_z = \tfrac{1}{2}ma^2 \qquad I' = I_x = I_y = 2[\tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}m)a^2 + (\tfrac{1}{2}m)a^2] = \tfrac{5}{4}ma^2$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento. Consideramos o satélite e o meteorito como um sistema único. Como não há forças externas agindo sobre esse sistema, as quantidades de movimento antes e depois do impacto são equipolentes. Tomando momentos em relação a G, escrevemos

$$-a\mathbf{j} \times m_0v_0\mathbf{k} + I\omega_0\mathbf{k} = \mathbf{H}_G$$
$$\mathbf{H}_G = -m_0v_0a\mathbf{i} + I\omega_0\mathbf{k} \qquad (1)$$

Velocidade angular após o impacto. Substituindo os valores obtidos para os componentes de $\mathbf{H}_G$ e para os momentos de inércia em

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z$$

escrevemos

$$-m_0v_0a = I'\omega_x = \tfrac{5}{4}ma^2\omega_x \qquad 0 = I'\omega_y \qquad I\omega_0 = I\omega_z$$
$$\omega_x = -\frac{4}{5}\frac{m_0v_0}{ma} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_0 \qquad (2)$$

Para o satélite considerado, temos ω_0 = 60 rpm = 6,283 rad/s, $m_0/m = \frac{1}{1.000}$, a = 0,800 m e v_0 = 2.000 m/s; encontramos

$$\omega_x = -2 \text{ rad/s} \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = 6{,}283 \text{ rad/s}$$
$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_z^2} = 6{,}594 \text{ rad/s} \qquad \text{tg } \gamma = \frac{-\omega_x}{\omega_z} = +0{,}3183$$

ω = 63,0 rpm γ = 17,7° ◀

Eixo de precessão. Uma vez que, no movimento livre, a direção da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ é fixa no espaço, o satélite terá precessão em torno dessa direção. O ângulo θ entre o eixo de precessão e o eixo z é

$$\text{tg } \theta = \frac{-H_x}{H_z} = \frac{m_0v_0a}{I\omega_0} = \frac{2m_0v_0}{ma\omega_0} = 0{,}796$$

θ = 38,5° ◀

Taxas de precessão e de rotação própria. Esboçamos os cones espacial e corporal para o movimento livre do satélite. Usando a lei dos senos, calculamos as taxas de precessão e de rotação própria.

$$\frac{\omega}{\text{sen } \theta} = \frac{\dot{\phi}}{\text{sen } \gamma} = \frac{\dot{\psi}}{\text{sen } (\theta - \gamma)}$$

$\dot{\phi}$ = 30,8 rpm $\dot{\psi}$ = 35,9 rpm ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, analisamos o movimento de *giroscópios* e de outros *corpos com simetria axial* com um ponto fixo O. Para definir a posição desses corpos em um dado instante qualquer, introduzimos os três *ângulos de Euler* ϕ, θ e ψ (Fig. 18.15), e observamos que suas derivadas temporais definem, respectivamente, a taxa de *precessão*, a taxa de *nutação* e a taxa de *rotação própria* (Fig. 18.16). Os problemas que você encontrará caem em uma das seguintes categorias.

1. Precessão em regime permanente. Este é o movimento de um giroscópio, ou outro corpo com simetria axial com um ponto fixo localizado sobre seu eixo de simetria, em que o ângulo θ, a taxa de precessão $\dot{\phi}$ e a taxa de rotação própria permanecem constantes.

a. Usando o referencial rotativo Oxyz mostrado na Fig. 18.17, que efetua *precessão* com o corpo, *mas não gira* com ele, obtemos as seguintes expressões para a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo, sua quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ e a velocidade angular $\boldsymbol{\Omega}$ do referencial $Oxyz$:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k} \quad (18.40)$$

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + I \omega_z \mathbf{k} \quad (18.41)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.42)$$

onde I = momento de inércia do corpo em relação ao seu eixo de simetria
I' = momento de inércia do corpo em relação a um eixo transversal passando por O
ω_z = componente retangular de $\boldsymbol{\omega}$ ao longo do eixo $z = \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta$

b. O somatório de momentos em relação a O das forças aplicadas ao corpo é igual à taxa de variação de sua quantidade de movimento angular, conforme expresso pela Eq. (18.28). Mas, como θ e as taxa de variação $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ são constantes, segue-se da Eq. (18.41) que o vetor $\mathbf{H}_O$ permanece constante em intensidade o direção quando visto a partir do referencial $Oxyz$. Logo, sua taxa de variação é nula em relação àquele referencial e você pode escrever

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_O \quad (18.43)$$

onde $\boldsymbol{\Omega}$ e $\mathbf{H}_O$ estão definidos, respectivamente, pela Eq. (18.42) e pela Eq. (18.41). A equação obtida mostra que o momento resultante em O das forças aplicadas ao corpo é perpendicular ao eixo de precessão, bem como ao eixo de rotação própria (Fig. 18.18).

c. Tenha em mente que o método descrito aplica-se não apenas a giroscópios, onde o ponto fixo O coincide com o centro de massa G, mas também a *qualquer corpo com simetria axial com um ponto fixo O localizado sobre seu eixo de simetria.* Portanto, esse método pode ser usado para analisar a *precessão em regime permanente de um pião* sobre um piso áspero.

d. Quando um corpo com simetria axial não tem ponto fixo, mas está em precessão em regime permanente em torno de seu centro de massa G, você deve desenhar uma *equação baseada no diagrama de corpo livre* mostrando que o sistema de forças externas exercidas sobre o corpo (incluindo o peso do corpo) é equivalente ao vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ aplicado em G e

ao vetor binário $\dot{\mathbf{H}}_G$ Você pode usar as Eqs. (18.40) a (18.42), trocando $\mathbf{H}_O$ por $\mathbf{H}_G$, e expressar o momento do binário como

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G$$

Pode então usar a equação baseada em diagrama de corpo livre para escrever até seis equações escalares independentes.

2. Movimento de um corpo com simetria axial livre de forças, exceto seu peso próprio. Temos $\Sigma\mathbf{M}_G = 0$ e, portanto, $\dot{\mathbf{H}}_G = 0$; segue-se que *a quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_G$ é constante em intensidade e direção (Seção 18.11). O corpo está em *precessão em regime permanente* com o eixo de precessão *GZ* dirigido ao longo de $\mathbf{H}_G$ (Fig. 18.20). Usando o referencial rotativo *Gxyz* e representando por γ o ângulo que $\boldsymbol{\omega}$ faz com o eixo de rotação própria *Gz* (Fig. 18.21), obtivemos as seguintes relações entre γ e o ângulo θ formado pelos eixos de precessão e de rotação própria:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{I}{I'} \operatorname{tg} \theta \tag{18.49}$$

A precessão é dita *direta se* $I < I'$ (Fig. 18.23) e *retrógrada* se $I > I'$ (Fig. 18.24).

a. Em muitos dos problemas que tratam do movimento de um corpo com simetria axial livre de forças, você será solicitado a determinar o *eixo de precessão* e as *taxas de precessão e de rotação própria* do corpo, conhecendo a intensidade de sua *velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ e o ângulo γ que ela forma com o eixo de simetria *Gz* (Fig. 18.21). Partindo da Eq. (18.49), você determinará o ângulo θ entre o eixo de precessão *GZ* e o eixo *Gz* e decompor $\boldsymbol{\omega}$ em dois *componentes oblíquos* $\dot{\phi}\mathbf{K}$ e $\dot{\psi}\mathbf{k}$. Usando a lei dos senos, você determinará, então, a taxa de precessão $\dot{\phi}$ e a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$.

b. Em outros problemas, o corpo será submetido *a um dado impulso* e você determinará em primeiro lugar a *quantidade de movimento angular* resultante $\mathbf{H}_G$. Usando as Eqs. (18.10), você calculará os componentes retangulares da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$, sua intensidade ω e o ângulo γ que ela faz com o eixo de simetria. Determinará então o *eixo de precessão* e as *taxas de precessão e de rotação própria,* conforme descrito anteriormente [Problema Resolvido 18.6].

3. Movimento geral de um corpo de simetria axial com um ponto fixo O localizado sobre seu eixo de simetria e sujeito apenas ao seu próprio peso. Esse é um movimento em que o ângulo θ pode variar. Em um dado instante qualquer, você deve levar em consideração a taxa de precessão $\dot{\phi}$, a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ *e a taxa de nutação* $\dot{\theta}$, que nenhuma delas permanecerá constante. Um exemplo de movimento desse tipo é o movimento de um pião, discutido nos Problemas 18.139 e 18.140. O referencial rotativo *Oxyz* que você usou ainda é aquele mostrado na

(*continua*)

Fig. 18.18, mas esse referencial irá girar agora em torno do eixo y com a taxa $\dot{\theta}$. Portanto, as Eqs. (18.40), (18.41) e (18.42) devem ser substituídas pelas seguintes equações:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.40')$$

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \mathbf{i} + I'\dot{\theta} \mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{k} \quad (18.41')$$

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \mathbf{i} + \dot{\theta} \mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \quad (18.42')$$

Como a substituição dessas expressões na Eq. (18.44) levaria a equações diferenciais não lineares, é preferível, sempre que possível, aplicar os seguintes princípios de conservação.

a. Conservação de energia. Representando por c a distância entre o ponto fixo O e o centro de massa G do corpo e por E a energia total, você escreverá

$$T + V = E: \qquad \tfrac{1}{2}(I'\omega_x^2 + I'\omega_y^2 + I\omega_z^2) + mgc \cos \theta = E$$

e substituirá os componentes de $\boldsymbol{\omega}$ pelas expressões obtidas na Eq. (18.40′). Note que c será positivo ou negativo, dependendo da posição de G em relação a O. Ainda, $c = 0$ se G coincidir com O, caso em que a *energia cinética* se conserva.

b. Conservação da quantidade de movimento angular em relação ao eixo de precessão. Como o apoio em O está localizado sobre o eixo Z e como o peso do corpo e o eixo Z são ambos verticais e, portanto, paralelos entre si, resulta que $\Sigma M_Z = 0$ e, consequentemente, que H_Z permanece constante. Isso pode ser expresso, escrevendo-se que o produto escalar $\mathbf{K} \cdot \mathbf{H}_O$ é constante, sendo $\mathbf{K}$ o vetor unitário ao longo do eixo Z.

c. Conservação da quantidade de movimento angular em relação ao eixo de rotação própria. Como o apoio em O e o centro de gravidade G são ambos localizados sobre o eixo z, resulta que $\Sigma M_Z = 0$ e, portanto, H_Z permanece constante. Isso é expresso escrevendo-se que o coeficiente do vetor unitário $\mathbf{k}$ na Eq. (18.41′) é constante. Observe que este último princípio de conservação não pode ser aplicado quando o corpo é impedido de girar em torno de seu eixo de simetria, mas, nesse caso as únicas variáveis são θ e ϕ.

PROBLEMAS

18.107 Uma esfera sólida de alumínio de raio de 100 mm está soldada à extremidade de uma barra AB de 200 mm de comprimento e de peso desprezível suspensa por uma junta articulada em A. Sabendo que a esfera tem precessão em torno de um eixo vertical à taxa constante de 60 rpm no sentido indicado e que a barra AB faz um ângulo $\beta = 50°$ com a vertical, determine a taxa de rotação própria da esfera em torno da linha AB.

18.108 Uma esfera sólida de alumínio de raio de 100 mm está soldada à extremidade de uma barra AB de 200 mm de comprimento e de peso desprezível suspensa por uma junta articulada em A. Sabendo que a esfera gira do modo mostrado na figura em torno da linha AB à taxa de 700 rpm, determine o ângulo β com que a esfera terá precessão em torno do eixo vertical à taxa constante de 60 rpm no sentido indicado.

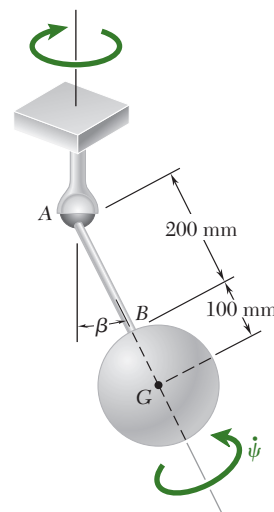



Figura P18.107 e P18.108

18.109 Um cone sólido de altura 300 mm com a base circular de raio 100 mm é suportado por uma junta articulada em A. Sabendo que é observado a precessão do cone em torno do eixo vertical AC à taxa constante 40 rpm no sentido indicado na figura e que seu eixo de simetria AB forma um ângulo $\beta = 40°$ com AC, determine a taxa que o cone gira em torno do eixo AB.

18.110 Um cone sólido de altura 300 mm com a base circular de raio 100 mm é suportado por uma junta articulada em A. Sabendo que cone está girando em torno de seu eixo de simetria AB à taxa de 3.000 rpm e que AB forma um ângulo $\beta = 60°$ com o eixo vertical AC, determine as duas taxas possíveis de precessão em regime permanente do cone em torno do eixo AC.

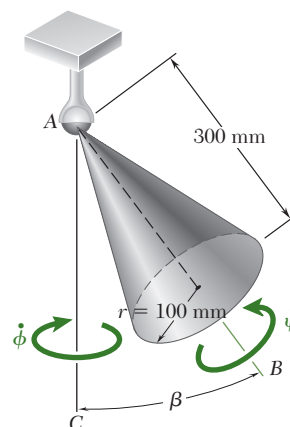



Figura P18.109 e *P18.110*

18.111 O pião de 85 g mostrado na figura está apoiado no ponto fixo O. Os raios de giração do pião em relação ao seu eixo de simetria e em relação a um eixo transversal passando por O são de 21 mm e 45 mm, respectivamente. Sabendo que $c = 37{,}5$ mm e que a taxa de rotação própria do pião em torno de seu eixo de simetria é de 1.800 rpm, detemine as duas possíveis taxas de precessão em regime permanente correspondentes a $\theta = 30°$.

18.112 O pião mostrado na figura está apoiado no ponto fixo O e seus momentos de inércia em relação ao seu eixo de simetria e em relação a um eixo transversal passando por O são representados por I e I', respectivamente (a) Mostre que a condição para a precessão em regime permanente do pião é

$$(I\omega_z - I'\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi} = Wc$$

onde $\dot{\phi}$ é a taxa de precessão e ω_z é o componente retangular da velocidade angular ao longo do eixo de simetria do pião. (b) Mostre que, se a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ do pião é muito grande comparada com sua taxa de precessão $\dot{\phi}$, a condição de precessão em regime permanente é $I\dot{\psi}\dot{\phi} \approx Wc$. (c) Determine o erro percentual introduzido quando esta última relação é usada para aproximar a menor das duas taxas de precessão obtidas para o pião do Problema 18.111.

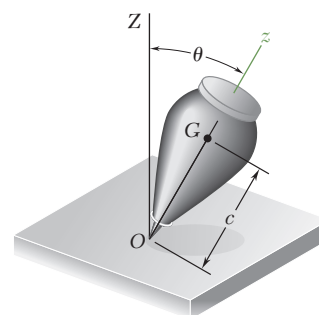



Figura P18.111 e *P18.112*

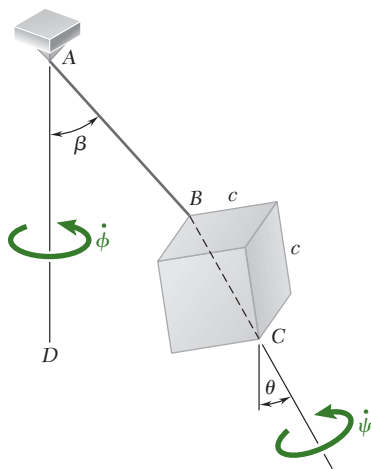



Figura P18.113 e P18.114

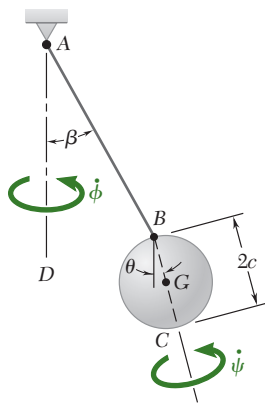



Figura P18.114 e P18.115

18.113 Um cubo sólido de lado $c = 80$ mm é preso a corda AB como mostrado na figura. Observa-se que ele gira a uma taxa $\dot{\psi} = 40$ rad/s em torno de sua diagonal BC e tem precessão à taxa constante de $\dot{\phi} = 5$ rad/s em torno do eixo vertical AD. Sabendo que $\beta = 30°$, determine o ângulo θ que a diagonal BC forma com a vertical. (*Dica:* O momento de inércia do cubo em torno de um eixo que passa pelo seu centro é independente da orientação daquele eixo.)

18.114 Um cubo sólido de lado $c = 120$ mm é preso à corda AB de comprimento 240 mm com mostrado na figura. O cubo gira em torno de sua diagonal BC e tem precessão em torno do eixo vertical AD. Sabendo que $\theta = 25°$ e $\beta = 40°$, determine (*a*) a taxa de rotação própria do cubo, (*b*) sua taxa de precessão. (Ver dica do Problema 18.113.)

18.115 Uma esfera sólida de raio $c = 100$ mm está presa do modo mostrado na figura à corda AB. A esfera tem precessão à taxa constante $\dot{\phi} = 6$ rad/s em torno do eixo vertical AD. Sabendo que $\beta = 40°$, determine o ângulo θ que o diâmetro BC forma com a vertical quando a esfera (*a*) não tem rotação própria, (*b*) gira em torno de seu diâmetro BC à taxa $\dot{\psi} = 50$ rad/s, (*c*) gira em torno de BC à taxa $\dot{\psi} = -50$ rad/s.

18.116 Uma esfera sólida de raio $c = 100$ mm está presa do modo mostrado na figura à corda AB, de 500 mm de comprimento. A esfera gira em torno de seu diâmetro BC e tem precessão em torno do eixo vertical AD. Sabendo que $\theta = 20°$ e $\beta = 35°$, determine (*a*) a taxa de rotação própria da esfera e (*b*) sua taxa de precessão.

18.117 Se a Terra fosse uma esfera, a atração gravitacional do Sol, da Lua e dos planetas seria em todos os instantes equivalente a uma única força **R** agindo no seu centro de massa. No entanto, a Terra é de fato um esferoide oblato e o sistema gravitacional que age sobre ela é equivalente a uma força **R** e a um binário **M**. Sabendo que o efeito do binário **M** é fazer com que o eixo da Terra tenha precessão em torno do eixo GA à taxa de uma revolução em 25.800 anos, determine a intensidade média do binário **M** aplicado à Terra. Admita que a densidade média da Terra seja de 5,51 g/cm^3, que o raio médio da Terra seja de 6.370 km e que $\bar{I} = \frac{2}{5}mr^2$. (*Nota:* Esta precessão forçada é conhecida como a precessão dos equinócios e não deve ser confundida com a precessão livre discutida no Problema 18.123.)

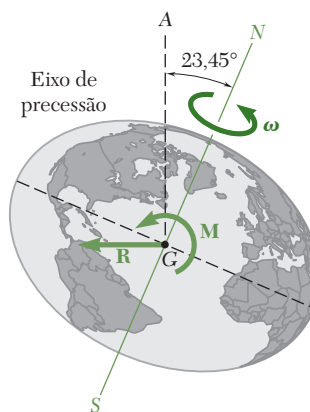



Figura *P18.117*

18.118 Um registro fotográfico de alta velocidade mostra que um certo projétil foi disparado com uma velocidade horizontal $\overline{\mathbf{v}}$ de 600 m/s e com seu eixo de simetria formando um ângulo $\beta = 3°$ com a horizontal.

A taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ do projétil era de 6.000 rpm e o arrasto aerodinâmico era equivalente a uma força **D** de 120 N agindo no centro de pressão C_P localizado a uma distância c = 150 mm de G. (*a*) Sabendo que o projétil tem massa de 20 kg e um raio de giração de 50 mm em relação ao seu eixo de simetria, determine sua taxa aproximada de precessão em regime permanente. (*b*) Sabendo-se ainda que o raio de giração do projétil em relação a um eixo transversal passando por G é 200 mm, determine os valores exatos das duas taxas de precessão possíveis.

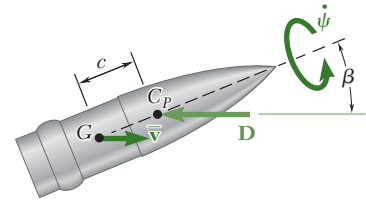



Figura P18.118

18.119 Mostre que, para um corpo com simetria axial livre de forças, as taxas de precessão e de rotação própria podem ser expressas, respectivamente, como

$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I'}$$

e

$$\dot{\psi} = \frac{H_G \cos\theta (I' - I)}{II'}$$

onde H_G é o valor constante da quantidade de movimento angular do corpo.

18.120 (*a*) Mostre que, para um corpo com simetria axial livre de forças, a taxa de precessão pode ser expressa como

$$\dot{\phi} = \frac{I\omega_z}{I' \cos\theta}$$

onde ω_z é o componente retangular de $\boldsymbol{\omega}$ ao longo do eixo de simetria do corpo. (*b*) Use esse resultado para verificar que a condição (18.44) para a precessão em regime permanente é satisfeita por um corpo com simetria axial livre de forças.

18.121 Mostre que o vetor velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ de um corpo com simetria axial livre de forças é visto do corpo como ele próprio girando em torno do eixo de simetria à taxa constante

$$\eta = \frac{(I' - I)}{I'}\omega_z$$

onde ω_z é o componente retangular de $\boldsymbol{\omega}$ ao longo do eixo de simetria do corpo.

18.122 Para um corpo com simetria axial livre de forças, demonstre (*a*) que a taxa de precessão retrógrada nunca pode ser menor que o dobro da taxa de rotação própria do corpo em torno de seu eixo de simetria, (*b*) que, na Fig. 18.24, o eixo de simetria do corpo nunca pode ficar no interior do cone espacial.

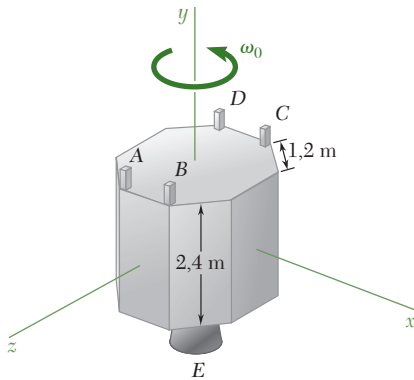
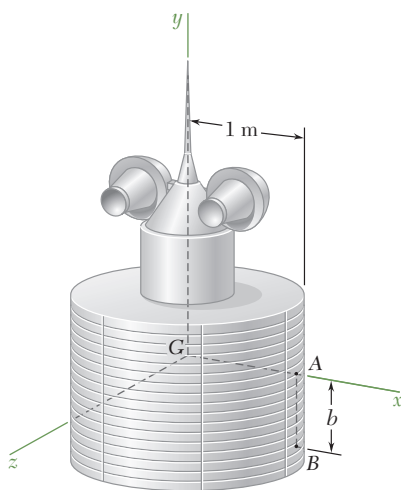
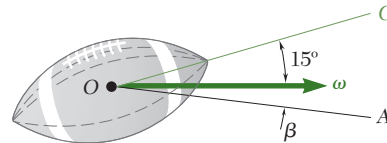
18.123 Usando a relação dada no Problema 18.121, determine o período de precessão do polo norte da Terra em torno do eixo de simetria do planeta. A Terra pode ser aproximada por um esferoide oblato de momento de inércia axial I e momento de inércia transversal $I' = 0{,}99671I$. (*Nota:* Observações reais mostram um período de precessão do polo norte de aproximadamente 432,5 dias solares médios; a diferença entre os períodos observados e calculados deve-se ao fato de que a Terra não é um corpo perfeitamente rígido. A precessão livre aqui considerada não deve ser confundida com a precessão dos equinócios, muito mais lenta, que é uma precessão forçada. Ver o Problema 18.117.)

18.124 O vetor velocidade angular de uma bola de futebol americano que acaba de ser chutada é horizontal e seu eixo de simetria OC está orientado do modo mostrado na figura. Sabendo que a intensidade da velocidade angular é de 200 rpm e que a razão entre os momentos de inércia axial e transversal é $I/I' = \frac{1}{3}$, determine (*a*) a orientação do eixo de precessão OA e (*b*) as taxas de precessão e de rotação própria.

Figura P18.124

Figura P18.125

18.125 Um satélite de 2.500 kg tem 2,4 m de altura e bases octogonais com lados de 1,2 m. Os eixos de coordenadas mostrados na figura são os eixos centroidais principais de inércia do satélite e seus raios de giração são $k_x = k_z = 0,9$ m e $k_y = 0,98$ m. O satélite é equipado com um propulsor principal E de 500 N de empuxo e quatro propulsores de 20 N de empuxo A,B,C e D que podem expelir propelente no sentido y positivo. O satélite está girando à taxa de 36 rev/h em torno de seu eixo de simetria Gy, que mantém uma direção fixa no espaço, quando os propulsores A e B são ativados durante 2 s. Determine (*a*) o eixo de precessão do satélite, (*b*) sua taxa de precessão, (*c*) sua taxa de rotação própria.

18.126 Resolva o Problema 18.125, admitindo que os propulsores A e D (em vez de A e B) sejam ativados durante 2 s.

Figura P18.127

18.127 Um satélite geoestacionário de 400 kg está girando com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}_0 = (1,5 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ quando ele é atingido em B por um meteorito de 200 g viajando a uma velocidade $\mathbf{v}_0 = -(500 \text{ m/s})\mathbf{i} + (400 \text{ m/s})\mathbf{j} + (1.250 \text{ m/s})\mathbf{k}$ relativa ao satélite. Sabendo que $b = 500$ mm e que os raios de giração do satélite são $\bar{k}_x = \bar{k}_z = 700$ mm e $\bar{k}_y = 800$ mm, determine o eixo de precessão e as taxas de precessão e rotação próprias do satélite depois do impacto.

18.128 Resolva o Problema 18.127, admitindo que o meteorito atinja o satélite em A em vez de B.

18.129 Uma moeda é lançada para o alto. Observa-se que ela gira a uma taxa de 600 rpm em torno do eixo GC perpendicular à moeda e que tem precessão em torno da direção vertical GD. Sabendo que GC faz um ângulo de 15° com GD, determine (*a*) o ângulo que a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ da moeda faz com GD, (*b*) a taxa de precessão da moeda em torno de GD.

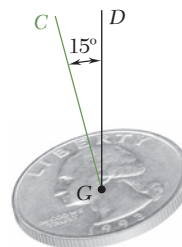



Figura P18.129

18.130 Resolva o Problema Resolvido 18.6, considerando que o meteorito atinge o satélite em C com velocidade $\mathbf{v}_0 = (2.000 \text{ m/s})\mathbf{i}$.

18.131 Um disco homogêneo de massa m está conectado em A e B a um garfo, de massa desprezível, que se apoia em um mancal em C. O disco é livre para girar em torno de seu diâmetro horizontal AB e o eixo é livre para girar em torno do eixo vertical passando por C. Inicialmente, o disco está em um plano vertical ($\theta_0 = 90°$) e o eixo tem uma velocidade angular $\dot{\phi}_0 = 8$ rad/s. Se o disco é ligeiramente perturbado, determine, para o movimento subsequente, (a) o valor mínimo de $\dot{\phi}$, (b) o valor máximo de $\dot{\theta}$.

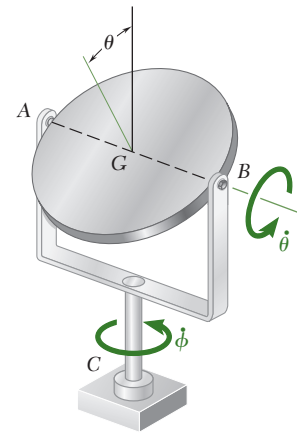



Figura P18.131

18.132 Uma barra delgada e homogênea AB de massa m e comprimento L é livre para girar em torno do eixo horizontal que passa pelo seu centro de massa G. O eixo é suportado por uma estrutura de massa desprezível e é livre para girar em torno do eixo vertical CD. Sabendo que $\theta = \theta_0$, $\dot{\theta} = 0$ e $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$, mostre que a barra oscilará em torno do eixo horizontal e determine (a) a faixa de valores do ângulo θ durante o movimento, (b) o valor máximo de $\dot{\theta}$, (c) o valor mínimo de $\dot{\phi}$.

Figura P18.132

18.133 Uma placa retangular homogênea de massa m e lados c e $2c$ está apoiada nos pontos A e B por um garfo na extremidade do eixo, de massa desprezível, que é suportado pelo mancal em C. A placa é livre para girar em torno de AB e o eixo é livre para girar em torno da horizontal que passa por C. Sabendo que, inicialmente, $\theta_0 = 30°$, $\dot{\theta}_0 = 0$ e $\dot{\phi}_0 = 6$ rad/s, determine, para o movimento subsequente, (a) a faixa de valores de θ, (b) o valor mínimo de $\dot{\phi}$, (c) o valor máximo de $\dot{\theta}$.

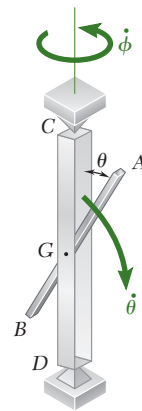
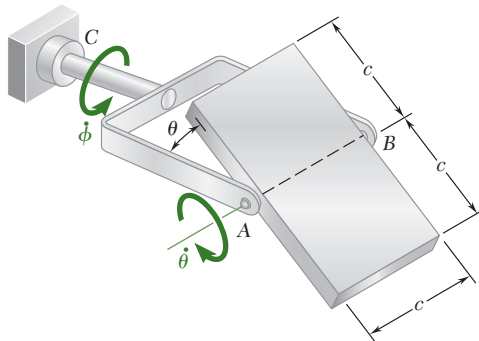



Figura P18.133 e P18.134

18.134 Uma placa retangular homogênea de massa m e lados c e $2c$ está apoiada nos pontos A e B por um garfo na extremidade do eixo, de massa desprezível, que é suportado pelo mancal em C. A placa é livre para girar em torno de AB e o eixo é livre para girar em torno da horizontal que passa por C. Inicialmente, a placa está no plano do garfo ($\theta_0 = 0$) e o eixo tem uma velocidade angular $\dot{\phi}_0 = 6$ rad/s. Se a placa é levemente perturbada, determine, para o movimento subsequente, (a) o valor mínimo de $\dot{\phi}$, (b) o valor máximo de $\dot{\theta}$.

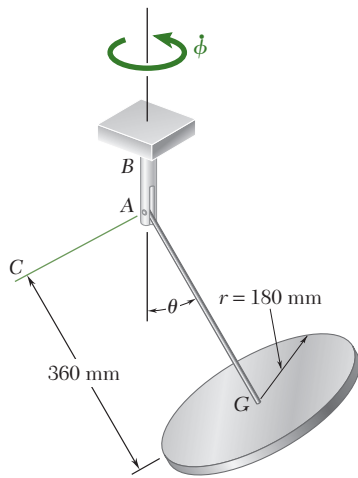



Figura *P18.135* e *P18.136*

18.135 Um disco homogêneo de raio 180 mm está soldado a uma barra *AG* de comprimento 360 mm e massa desprezível que está conectada por um grampo a um eixo vertical *AB*. A barra e o disco podem girar livremente em torno de um eixo horizontal *AC*, e o eixo *AB* pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Inicialmente, a barra *AG* está na horizontal ($\theta_0 = 90°$) e não tem velocidade angular em torno de *AC*. Sabendo que o valor máximo $\dot{\phi}_m$ da velocidade angular do eixo *AB* no movimento subsequente é o dobro de seu valor inicial $\dot{\phi}_0$, determine (*a*) o valor mínimo de θ, (*b*) a velocidade angular inicial $\dot{\phi}_0$ do eixo *AB*.

18.136 Um disco homogêneo de raio 180 mm está soldado a uma barra *AG* de comprimento 360 mm e massa desprezível que está conectada por um grampo a um eixo vertical *AB*. A barra e o disco podem girar livremente em torno de um eixo horizontal *AC*, e o eixo *AB* pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Inicialmente, a barra *AG* está na horizontal ($\theta_0 = 90°$) e não tem velocidade angular em torno de *AC*. Sabendo que o menor valor de θ no movimento subsequente é 30°, determine (*a*) a velocidade angular inicial do eixo *AB* e (*b*) sua velocidade angular máxima.

***18.137** Um disco homogêneo de raio de 180 mm está soldado a uma barra *AG* de 360 mm de comprimento e massa desprezível que está suspensa por uma junta articulada em *A*. O disco é liberado com uma taxa de rotação própria $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, com taxas nulas de precessão e nutação e com a barra *AG* na horizontal ($\theta_0 = 90°$). Determine (*a*) o menor valor de θ no movimento subsequente, (*b*) as taxas de precessão e de rotação própria quando o disco passar pela sua posição mais baixa.

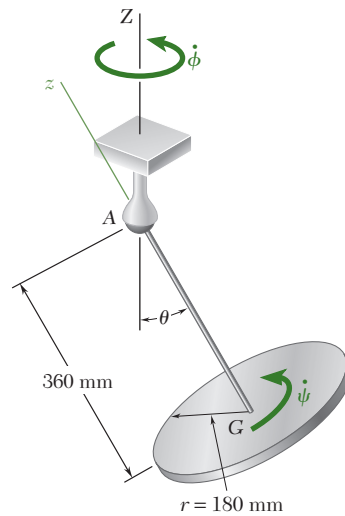



Figura P18.137 e P18.138

***18.138** Um disco homogêneo de raio de 180 mm está soldado a uma barra *AG* de 360 mm de comprimento e de massa desprezível que está suspensa por uma junta articulada em *A*. O disco é liberado com uma taxa de rotação própria $\dot{\psi}_0$ anti-horária vista de *A*, com taxas nulas de precessão e nutação e com a barra *AG* na horizontal ($\theta_0 = 90°$). Sabendo que o menor valor de θ no movimento subsequente é 30°, de-

termine (a) taxa de rotação própria $\dot{\psi}_0$ do disco em sua posição inicial, (b) as taxas de precessão e de rotação própria quando o disco passar pela sua posição mais baixa.

***18.139** Um pião se apoia em um ponto fixo O como mostra a figura. Representando por ϕ, θ e ψ os ângulos de Euler que definem a posição do pião em relação a um referencial fixo, considere o movimento geral do pião no qual todos os ângulos de Euler variam.

(a) Observando que $\Sigma M_Z = 0$ e $\Sigma M_z = 0$, e representando por I e I', respectivamente, os momentos de inércia do pião em relação ao seu eixo de simetria e em relação a um eixo transversal passando por O, deduza as duas equações diferenciais de primeira ordem do movimento

$$I'\dot{\phi}\,\text{sen}^2\,\theta + I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta = \alpha$$
$$I(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta) = \beta$$

onde α e β são constantes que dependem das condições iniciais. Essas equações expressam que a quantidade de movimento angular do pião se conserva em relação aos eixos Z e z, ou seja, que os componentes retangulares de $\mathbf{H}_O$ ao longo de cada um desses eixos é constante.

(b) Use as Eqs. (1) e (2) para mostrar que o componente retangular ω_z da velocidade angular do pião é constante e que a taxa de precessão $\dot{\phi}$ depende do valor do ângulo de nutação θ.

Figura 18.139 e 18.140

***18.140** (a) Aplicando o princípio de conservação de energia, deduza uma terceira equação diferencial para o movimento geral do pião do Problema 18.139.

(b) Eliminando as derivadas $\dot{\phi}$ e $\dot{\psi}$ da equação obtida e das duas equações do Problema 18.139, mostre que a taxa de nutação $\dot{\theta}$ é definida pela equação diferencial $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$, onde

$$f(\theta) = \frac{1}{I'}\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgc\cos\theta\right) - \left(\frac{\alpha - \beta\cos\theta}{I'\,\text{sen}\,\theta}\right)^2$$

(c) Introduzindo uma variável auxiliar $x = \cos\theta$, mostre ainda que os valores máximo e mínimo de θ podem ser obtidos resolvendo-se a seguinte equação cúbica para x

$$\left(2E - \frac{\beta^2}{I} - 2mgcx\right)(1 - x^2) - \frac{1}{I'}(\alpha - \beta x)^2 = 0$$

****18.141*** A esfera homogênea de massa m e raio a é soldada à barra AB de massa desprezível, que é suportada por uma junta articulada em A. A esfera é liberada na posição $\beta = 0$ com a taxa de precessão $\dot{\phi}_0 = \sqrt{17g/11a}$ com rotação e nutação nulas. Determine o maior valor de β no momento subsequente.

****18.142*** A esfera homogênea de massa m e raio a é soldada à barra AB de massa desprezível, que é suportada por uma junta articulada em A. A esfera é liberada na posição $\beta = 0$ com a taxa de precessão $\dot{\phi} = \dot{\phi}_0$ com rotação e nutação nulas. Sabendo que o maior valor de β no momento subsequente é 30°, determine (a) a taxa de precessão $\dot{\phi}_0$ da esfera na sua posição inicial, (b) as taxas de precessão e rotação própria quando $\beta = 30°$.

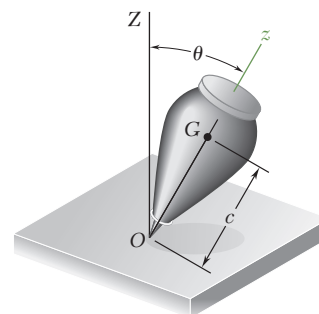
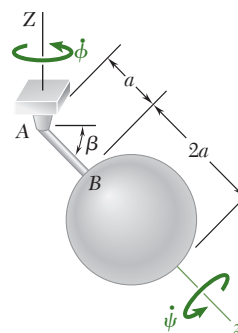



Figura *P18.141* e *P18.142*

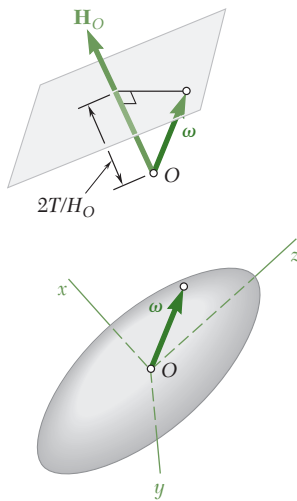



Figura P18.143

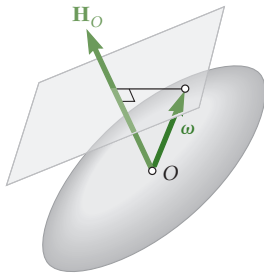



Figura P18.144

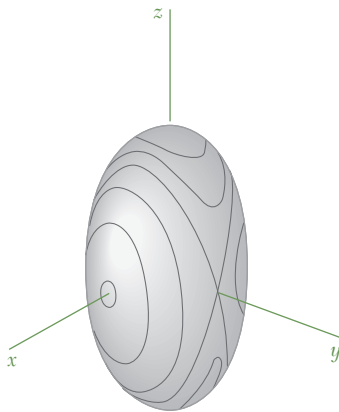



Figura P18.146

***18.143** Considere um corpo rígido de formato arbitrário que está preso ao seu centro de massa O e não está sujeito a forças, exceto por seu peso próprio pela reação do apoio em O.

(*a*) Demonstre que a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação ao ponto fixo O é constante em intensidade e direção, que a energia cinética T do corpo é constante e que a projeção ao longo de $\mathbf{H}_O$ da velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo é constante.

(*b*) Mostre que a ponta do vetor $\boldsymbol{\omega}$ descreve uma curva sobre um plano fixo no espaço (chamado *plano invariante*) que é perpendicular a $\mathbf{H}_O$ e a uma distância $2T/H_O$ de O.

(*c*) Mostre, em relação a um referencial ligado ao corpo e coincidente com seus eixos principais de inércia, que a ponta do vetor $\boldsymbol{\omega}$ parece descrever uma curva sobre um elipsoide cuja equação é

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante}$$

O elipsoide (chamado *elipsoide de Poinsot*) está rigidamente ligado ao corpo e tem o mesmo formato do elipsoide de inércia, mas em tamanho diferente.

***18.144** Referindo-se ao Problema 18.143, (*a*) demonstre que o elipsoide de Poinsot é tangente ao plano invariante, (*b*) mostre que o movimento do corpo rígido deve ser tal que o elipsoide de Poinsot parece rolar sobre o plano invariante. (*Dica:* Na parte *a,* mostre que a normal ao elipsoide de Poinsot na ponta de $\boldsymbol{\omega}$ é paralela a $\mathbf{H}_O$. Lembre-se de que a direção da normal a uma superfície de equação $F(x, y, z) =$ constante em um ponto P é a mesma do vetor **grad** F no ponto P.)

***18.145** Usando os resultados obtidos nos Problemas 18.143 e 18.144, mostre que, para um corpo com simetria axial preso ao seu centro de massa O e livre de forças, exceto por seu peso próprio pela reação em O, o elipsoide de Poinsot é um elipsoide de revolução e os cones espacial e corporal são ambos circulares e tangentes entre si. Mostre ainda que (*a*) os dois cones são tangentes externamente e que a precessão é direta quando $I < I'$, onde I e I' representam, respectivamente, os momentos de inércia axial e transversal do corpo, (*b*) o cone espacial fica dentro do cone corporal e a precessão é retrógrada quando $I > I'$.

***18.146** Refira-se aos Problemas 18.143 e 18.144.

(*a*) Mostre que a curva (chamada polódia) descrita pela ponta do vetor $\boldsymbol{\omega}$ em relação a um referencial coincidente com os eixos principais de inércia do corpo rígido é definida pelas equações

$$I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2 = 2T = \text{constante} \qquad (1)$$

$$I_x^2\omega_x^2 + I_y^2\omega_y^2 + I_z^2\omega_z^2 = H_O^2 = \text{constante} \qquad (2)$$

e que, portanto, ela pode ser obtida por interseção do elipsoide de Poinsot com o elipsoide definido pela Eq. (2).

(*b*) Admitindo que $I_x > I_y > I_z$, mostre ainda que as polódias obtidas para vários valores de H_O têm os formatos indicados na figura.

(*c*) Usando o resultado obtido na parte *b,* mostre que um corpo rígido livre de forças pode girar em torno de um eixo centroidal fixo se, e somente se, aquele eixo coincidir com um dos eixos principais de inércia do corpo, e que o movimento será estável se o eixo de rotação própria coincidir com o eixo maior ou menor do elipsoide de Poinsot (eixo z ou x na figura) e instável se coincidir com o eixo intermediário (eixo y).

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado à análise cinética do movimento de corpos rígidos tridimensionais.

Equações fundamentais do movimento para um corpo rígido

Verificamos em primeiro lugar [Seção 18.1] que as duas equações fundamentais deduzidas no Cap. 14 para o movimento de um sistema de partículas

$$\Sigma \mathbf{F} = m\overline{\mathbf{a}} \tag{18.1}$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \tag{18.2}$$

fornecem a base de nossa análise, assim como elas fizeram no Cap. 16 no caso do movimento plano de corpos rígidos. Entretanto, o cálculo da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ do corpo e de sua derivada $\dot{\mathbf{H}}_G$ é agora bem mais complexo.

Quantidade de movimento angular de um corpo rígido tridimensional

Na Seção 18.2, vimos que os componentes retangulares da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo rígido podem ser expressos do seguinte modo, em termos dos componentes de sua velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ e de seus momentos e produtos centroidais de inércia:

$$\begin{aligned} H_x &= +\bar{I}_x\,\omega_x - \bar{I}_{xy}\omega_y - \bar{I}_{xz}\omega_z \\ H_y &= -\bar{I}_{yx}\omega_x + \bar{I}_y\,\omega_y - \bar{I}_{yz}\omega_z \\ H_z &= -\bar{I}_{zx}\omega_x - \bar{I}_{zy}\omega_y + \bar{I}_z\,\omega_z \end{aligned} \tag{18.7}$$

Se forem empregados os *eixos principais de inércia* $Gx'y'z'$, essas relações se reduzem a

$$H_{x'} = \bar{I}_{x'}\omega_{x'} \qquad H_{y'} = \bar{I}_{y'}\omega_{y'} \qquad H_{z'} = \bar{I}_{z'}\omega_{z'} \tag{18.10}$$

Observamos que, em geral, *a quantidade de movimento angular* $\mathbf{H}_G$ *e a velocidade angular* $\boldsymbol{\omega}$ *não têm a mesma direção* (Fig. 18.25). Todavia, elas terão a mesma direção se $\boldsymbol{\omega}$ estiver orientado ao longo de um dos eixos principais de inércia do corpo.

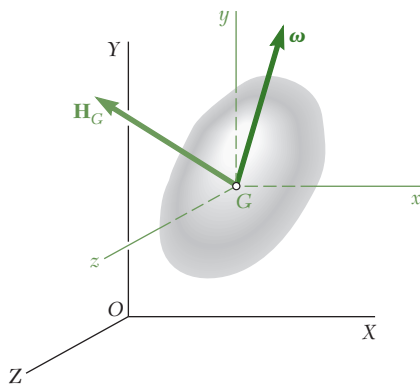



Figura 18.25

Quantidade de movimento angular em relação a um ponto dado

Relembrando que o sistema de quantidades de movimento das partículas constituintes de um corpo rígido pode ser reduzido ao vetor $m\bar{\mathbf{v}}$ ligado a G e ao binário $\mathbf{H}_G$ (Fig. 18.26), observamos que, uma vez que a quantidade de movimento linear $m\bar{\mathbf{v}}$ e a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_G$ de um corpo rígido tenham sido determinadas, a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação a um ponto dado qualquer O pode ser obtida escrevendo-se

$$\mathbf{H}_O = \bar{\mathbf{r}} \times m\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{H}_G \qquad (18.11)$$

Corpo rígido com um ponto fixo

No caso particular de um corpo rígido *restrito a girar em torno de um ponto fixo O*, os componentes da quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_O$ do corpo em relação a O podem ser obtidos diretamente a partir dos componentes de sua velocidade angular e de seus momentos e produtos de inércia em relação a eixos passando por O. Escrevemos

$$\begin{aligned} H_x &= +I_x\,\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_y\,\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_z\,\omega_z \end{aligned} \qquad (18.13)$$

Princípio de impulso e quantidade de movimento

O *princípio de impulso e quantidade de movimento* para um corpo rígido em movimento tridimensional [Seção 18.3] é expresso pela mesma fórmula fundamental usada no Cap. 17 para um corpo rígido em movimento plano

$$\textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_1 + \textbf{Sist. de Imp. Ext.}_{1\to 2} = \\ = \textbf{Sist. de Quant. de Mov.}_2 \qquad (17.4)$$

mas, agora, os sistemas de quantidades de movimento inicial e final devem ser representados do modo mostrado na Fig. 18.26, e $\mathbf{H}_G$ deve ser calculado a partir das relações (18.7) ou (18.10) [Problemas Resolvidos 18.1 e 18.2].

Energia cinética de um corpo rígido tridimensional

A *energia cinética* de um corpo rígido em movimento tridimensional pode ser dividida em duas partes [Seção 18.4], uma associada ao movimento de seu centro de massa G e a outra ao seu movimento em torno de G. Usando os eixos centroidais principais x', y', z', escrevemos

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \tfrac{1}{2}(\bar{I}_{x'}\omega_{x'}^2 + \bar{I}_{y'}\omega_{y'}^2 + \bar{I}_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.17)$$

onde $\bar{\mathbf{v}}$ = velocidade do centro de massa
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidade angular
m = massa do corpo rígido
$\bar{I}_{x'}, \bar{I}_{y'}, \bar{I}_{z'}$ = momentos centroidais principais de inércia

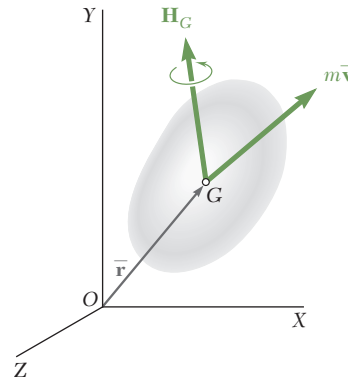



Figura 18.26

Observamos também que, no caso de um corpo rígido *limitado a girar em torno de um ponto fixo O*, a energia cinética do corpo pode se expressa como

$$T = \tfrac{1}{2}(I_{x'}\omega_{x'}^2 + I_{y'}\omega_{y'}^2 + I_{z'}\omega_{z'}^2) \qquad (18.20)$$

onde x', y' e z' são os eixos principais de inércia do corpo em O. Os resultados obtidos na Seção 18.4 tornam possível estender ao movimento tridimensional de um corpo rígido a aplicação do *princípio de trabalho e energia* e do *princípio de conservação da energia.*

Uso de um referencial rotativo para escrever as equações do movimento de um corpo rígido no espaço

A segunda parte do capítulo foi dedicada à aplicação das equações fundamentais

$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad (18.1)$$

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (18.2)$$

ao movimento de um corpo rígido tridimensional. Primeiramente relembramos [Seção 18.5] que $\mathbf{H}_G$ representa a quantidade de movimento angular do corpo em relação a um referencial centroidal $GX'Y'Z'$ de orientação fixa (Fig. 18.27) e que $\dot{\mathbf{H}}_G$ na Eq. (18.2) representa a taxa de

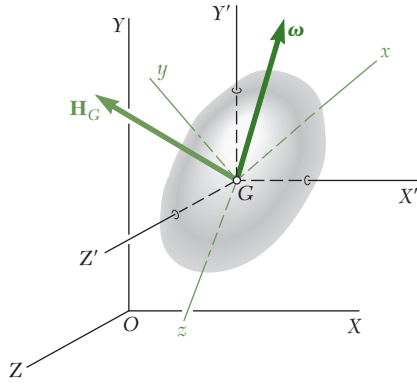



Figura 18.27

variação de $\mathbf{H}_G$ em relação àquele referencial. Verificamos que, à medida que o corpo gira, seus momentos e produtos de inércia em relação ao referencial $GX'Y'Z'$ variam continuamente. Portanto, é mais conveniente usar um referencial rotativo $Gxyz$ para decompor $\boldsymbol{\omega}$ em componentes e para calcular os momentos e produtos de inércia que serão usados para determinar $\mathbf{H}_G$ nas Eqs. (18.7) ou (18.10). Entretanto, como $\dot{\mathbf{H}}_G$ na Eq. (18.2) representa a taxa de variação de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial $GX'Y'Z'$, de orientação fixa, devemos usar o método da Seção 15.10 para determinar seu valor. Retomando a Eq. (15.31), escrevemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (18.22)$$

onde $\mathbf{H}_G$ = quantidade de movimento angular em relação ao referencial $GX'Y'Z'$ de orientação fixa

$(\dot{\mathbf{H}}_G)G_{xyz}$ = taxa de variação de $\mathbf{H}_G$ em relação ao referencial rotativo $Gxyz$, a ser calculado a partir das relações (18.7)

Ω = velocidade angular do referencial rotativo $Gxyz$

Substituindo $\dot{\mathbf{H}}_G$ da Eq. (18.22) na Eq. (18.2), obtivemos

$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{Gxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (18.23)$$

Se o referencial rotativo é de fato ligado ao corpo, sua velocidade angular Ω é identicamente igual à velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ do corpo. Todavia, há muitas aplicações em que é vantajoso usar um referencial que não esteja ligado ao corpo, mas que gira de maneira independente [Problema Resolvido 18.5].

Equações de Euler do movimento. Princípio de D'Alembert

Fazendo $\Omega = \boldsymbol{\omega}$ na Eq. (18.23), usando eixos principais e escrevendo esta equação em forma escalar, obtivemos as *equações de Euler do movimento* [Seção 18.6]. Uma discussão sobre a solução dessas equações e das equações escalares correspondentes à Eq. (18.1) levou-nos a estender o princípio de d'Alembert ao movimento tridimensional de um corpo rígido e a concluir que o sistema de forças externas que agem sobre um corpo rígido é não só equipolente, mas também, de fato, *equivalente* às forças efetivas do corpo representadas pelo vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e pelo binário $\dot{\mathbf{H}}_G$ (Fig. 18.28). Problemas que envolvem o movimento tridimensional de um corpo rígido podem ser resolvidos considerando a equação baseada no diagrama de corpo livre representada na Fig. 18.28 e escrevendo equações escalares apropriadas relacionando os componentes ou momentos das forças externas e efetivas [Problemas Resolvidos 18.3 e 18.5].

Equação do diagrama de corpo livre

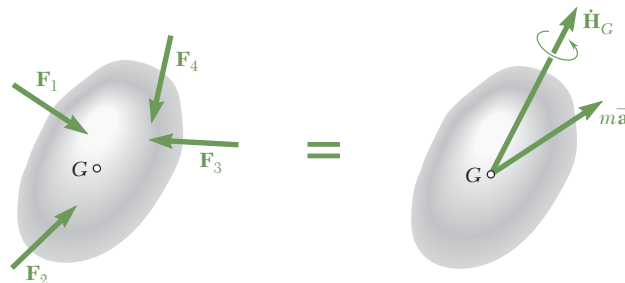



Figura 18.28

Corpo rígido com um ponto fixo

No caso de um corpo rígido *limitado a girar em torno de um ponto fixo O*, é possível usar um método alternativo de solução envolvendo os momentos das forças e a taxa de variação da quantidade de movimento angular em relação ao ponto *O*. Escrevemos [Seção 18.7]:

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O \qquad (18.28)$$

onde $\Sigma\mathbf{M}_O$ = somatório dos momentos em relação a O das forças aplicada ao corpo rígido
$\mathbf{H}_O$ = quantidade de movimento angular em relação ao referencial fixo $OXYZ$
$(\dot{\mathbf{H}}_O)_{Oxyz}$ = taxa de variação de $\mathbf{H}_O$ em relação ao referencial rotativo $Oxyz$ a ser calculado a partir das relações (18.13)
Ω = velocidade angular do referencial rotativo $Oxyz$

Essa abordagem pode ser usada na resolução de certos problemas que envolvam a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo [Seção 18.8], como por exemplo, um eixo rotativo desbalanceado [Problema Resolvido 18.4].

Movimento de um giroscópio

Na última parte do capítulo, consideramos o movimento de *giroscópios* e de outros *corpos com simetria axial.* Introduzindo os *ângulos de Euler* ϕ, θ e ψ para definir a posição de um giroscópio (Fig. 18.29), observamos que suas derivadas $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\psi}$ representam, respectivamente, as taxas de *precessão,* de *nutação* e de *rotação própria* do giroscópio [Seção 18.9]. Expressando a velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$ em termos dessas derivadas, escrevemos

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.35)$$

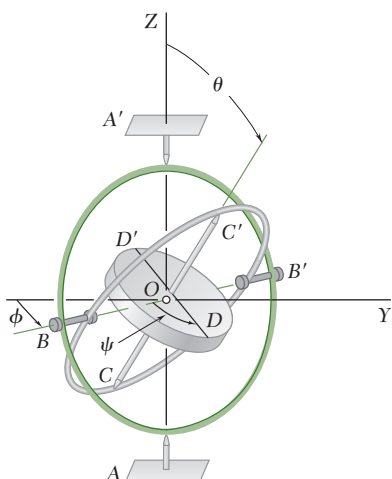



Figura 18.29

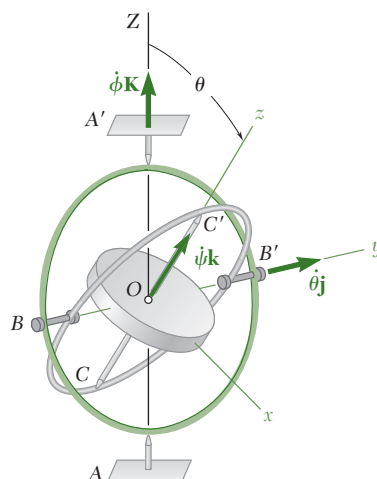



Figura 18.30

onde os vetores unitários estão associados ao referencial *Oxyz* ligado à argola interna do giroscópio (Fig. 18.30) e, portanto, giram com a velocidade angular

$$\boldsymbol{\Omega} = -\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + \dot{\theta}\mathbf{j} + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{k} \qquad (18.38)$$

Representando por I o momento de inércia do giroscópio em relação ao seu eixo de rotação própria z e por I' seu momento de inércia em relação a um eixo transversal passando por O, escrevemos

$$\mathbf{H}_O = -I'\dot{\phi} \text{ sen } \theta \mathbf{i} + I'\dot{\theta}\mathbf{j} + I(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)\mathbf{k} \qquad (18.36)$$

A substituição de $\mathbf{H}_O$ e $\boldsymbol{\Omega}$ na Eq. (18.28) levou-nos às equações diferenciais que definem o movimento do giroscópio.

Precessão em regime permanente

No caso particular da *precessão em regime permanente* de um giroscópio [Seção 18.10], o ângulo θ, a taxa de precessão $\dot{\phi}$ e a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ permanecem constantes. Vimos que tal movimento só é possível se os momentos das forças externas em relação a O satisfizerem a relação

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (I\omega_z - I'\dot{\phi} \cos \theta)\dot{\phi} \text{ sen } \theta\mathbf{j} \qquad (18.44)$$

ou seja, se as forças externas se reduzirem a um binário de momento igual ao membro à direita da Eq. (18.44) aplicado *em relação a um eixo perpendicular ao eixo de precessão e ao eixo de rotação própria* (Fig. 18.31). O capítulo terminou com uma discussão sobre o movimento de um corpo com simetria axial com rotação própria e precessão *livre de forças* [Seção 18.11; Problema Resolvido 18.6].

Figura 18.31

PROBLEMAS DE REVISÃO

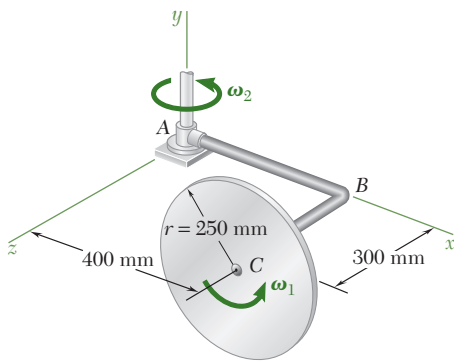



Figura P18.147

18.147 Um disco homogêneo de massa $m = 5$ kg gira a uma taxa constante $\omega_1 = 8$ rad/s em relação ao eixo dobrado ABC, que por sua vez gira a uma taxa constante $\omega_2 = 3$ rad/s em torno do eixo y. Determine a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_C$ do disco em torno de seu centro C.

18.148 Dois braços em formato de L, cada qual com massa de 2 kg, são soldados aos terços médios do eixo AB de 600 mm. Sabendo que o eixo AB gira à taxa constante $\omega = 180$ rpm, determine (*a*) a quantidade de movimento angular $\mathbf{H}_A$ do corpo em relação ao ponto A, (*b*) o ângulo que $\mathbf{H}_A$ forma com o eixo.

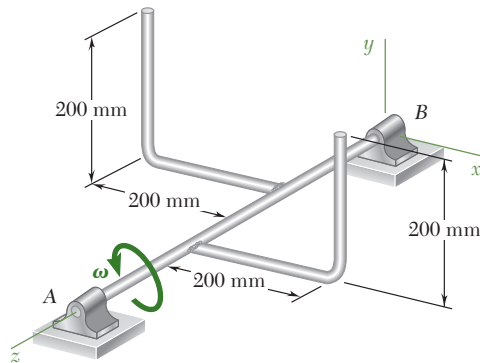



Figura P18.148

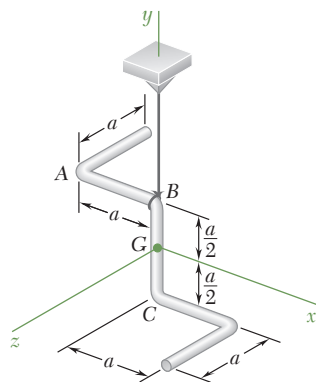



Figura *P18.149*

18.149 Uma barra uniforme de massa m e comprimento $5a$ é dobrada na forma mostrada na figura e é suspensa por um fio preso em B. Sabendo que a barra é atingida em C na direção z negativa e indicando que o impulso correspondente por $-(F\,\Delta t)\mathbf{k}$, determine, logo após o impacto, (*a*) a velocidade angular da barra, (*b*) a velocidade do seu centro de massa G.

18.150 Um disco homogêneo de raio a e massa m apoiado por uma junta articulada em A está girando em torno do seu diâmetro vertical com uma velocidade angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\mathbf{j}$ quando uma obstrução é subitamente introduzida em B. Admitindo que o impacto seja perfeitamente plástico ($e = 0$), determine, imediatamente após o impacto, (*a*) a velocidade angular do disco, (*b*) a velocidade do seu centro de massa G.

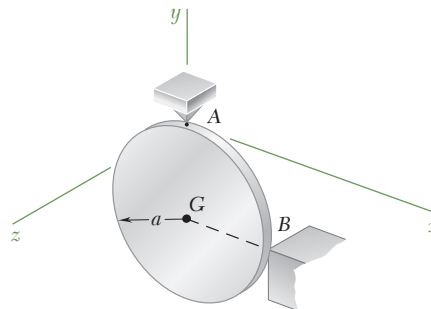



Figura P18.150

18.151 Determine a energia cinética perdida quando o disco do Problema 18.150 atinge a obstrução em *B*.

18.152 Cada uma das placas triangulares mostradas na figura tem massa de 5 kg e está soldada a um eixo vertical *AB*. Sabendo que o conjunto gira à taxa constante ω = 8 rad/s, determine as reações dinâmicas em *A* e *B*.

Figura *P18.152*

18.153 Um pedaço de chapa de aço de 2,4 kg com dimensões 160 mm × 640 mm foi dobrada na forma do componente mostrado na figura. O componente está em repouso (ω = 0) quando o binário $\mathbf{M}_0$ = (0,8 N · m)**k** é aplicado nele. Determine (*a*) a aceleração angular do componente, (*b*) as reações dinâmicas em *A* e *B* imediatamente após o binário ser aplicado.

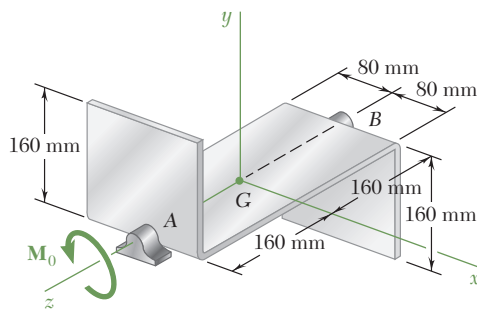
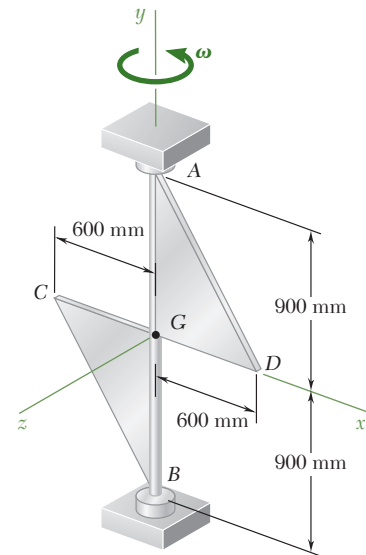



Figura *P18.153*

18.154 Um anel fino de 100 mm de raio é preso por um cursor em *A* a um eixo vertical que gira com uma velocidade angular constante ω. Determine (*a*) o ângulo constante β que o plano do anel forma com a vertical quando ω = 12 rad/s, (*b*) o maior valor de ω para o qual o anel permanece vertical (β = 0).

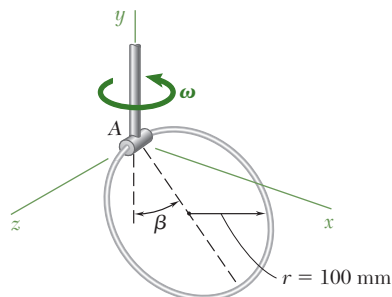



Figura P18.154

18.155 O disco fino de massa m = 4 kg gira com uma velocidade angular ω_2 em relação ao braço *OA*, que por sua vez gira com uma velocidade angular ω_1 em torno do eixo *y*. Determine (*a*) o binário $M_1\mathbf{j}$ que poderia ser aplicado ao braço *OA* para dar-lhe uma aceleração $\boldsymbol{\alpha}_1$ = (6 rad/s^2)**j** com velocidade ω_1 = 4 rad/s, sabendo que o disco gira a uma taxa constante ω_2 = 12 rad/s, (*b*) o sistema força-binário representando a reação dinâmica em *O* nesse instante. Considere que o braço *OA* tem massa desprezível.

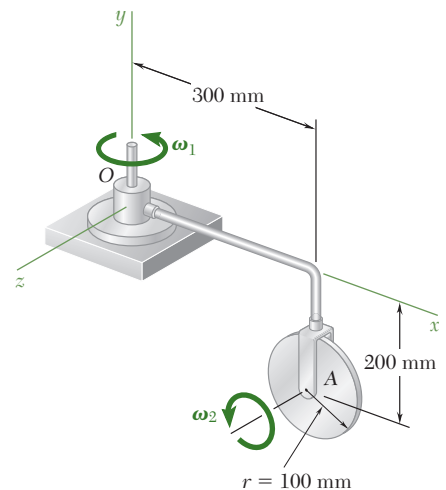



Figura P18.155

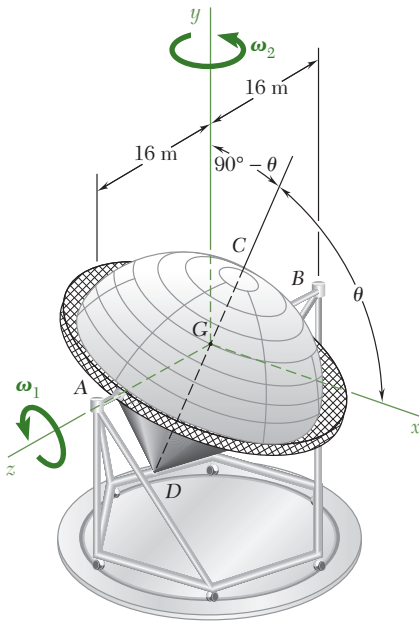



Figura P18.156

18.156 Um concentrador experimental de energia solar por lentes Fresnel pode girar em torno do eixo horizontal AB que passa por meio de seu centro de massa G. Ele é suportado em A e B por uma estrutura que pode girar em torno do eixo vertical y. O concentrador tem uma massa de 30 Mg, um raio de giração de 12 m em torno se seu eixo de simetria CD e um raio de giração de 10 m em torno de qualquer eixo transversal que passa por G. Sabendo que as velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}_1$ e $\boldsymbol{\omega}_2$ têm intensidade constante igual 0,20 rad/s e 0,25 rad/s, respectivamente, determine, para a posição $\theta = 60°$, (*a*) a força exercida no concentrador em A e B, (*b*) o binário $M_2\mathbf{k}$ aplicado no concentrador naquele instante.

18.157 Um disco de 2 kg e 150 mm de diâmetro está preso na extremidade de uma barra AB de massa desprezível que é suspensa por junta articulada em A. Se no disco for observada a precessão em torno da vertical no sentido indicado a uma taxa constante de 36 rpm, determine a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ do disco em torno de AB.

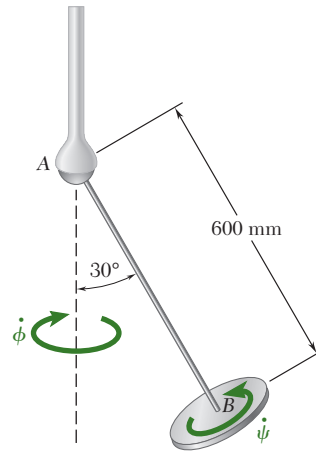



Figura P18.157

18.158 As características essenciais de um giroscópio são mostradas na figura. O rotor gira a uma taxa $\dot{\psi}$ em torno de um eixo montado em uma única argola que pode girar livremente em torno do eixo vertical AB. O ângulo formado pelo eixo do rotor e o plano do meridiano é indicado por θ e a latitude da posição da terra é indicada por λ. Notamos que a linha OC é paralela ao eixo da terra, e indicando por $\boldsymbol{\omega}_e$ a velocidade angular da terra em torno de seu eixo.

(*a*) Mostre que as equações de movimento do giroscópio são

$$I'\ddot{\theta} + I\omega_z\omega_e \cos\lambda \operatorname{sen}\theta - I'\omega_e^2 \cos^2\lambda \operatorname{sen}\theta \cos\theta = 0$$
$$I\dot{\omega}_z = 0$$

onde ω_z é um componente retangular da velocidade angular total $\boldsymbol{\omega}$ ao longo do eixo do rotor, e I e I' são os momentos de inércia do rotor com relação ao seu eixo de simetria e ao eixo transversal que passa por O, respectivamente.

(*b*) Desprezando o termo contendo ω_e^2, mostre que, para o menor valor de θ, temos

$$\ddot{\theta} + \frac{I\omega_z\omega_e \cos\lambda}{I'}\theta = 0$$

e que o eixo do giroscópio oscila em torno da direção norte-sul.

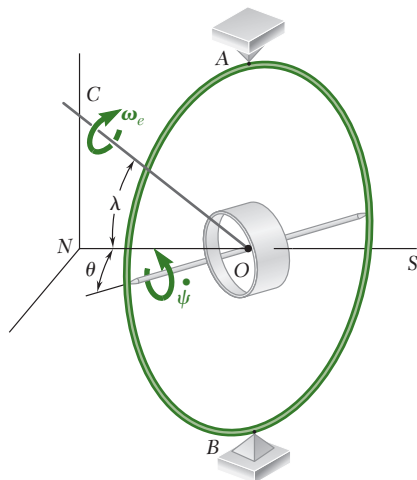



Figura *P18.158*

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

18.C1 Um arame de seção transversal uniforme pesando 60 g/m é usado para formar a estrutura mostrada na figura, que é suspensa pelo cordão *AD*. Um impulso $\mathbf{F}\,\Delta t = (2{,}5\ \mathrm{N \cdot s})\mathbf{j}$ é aplicado à estrutura no ponto *E*. Use um programa de computador para calcular e representar por gráficos, imediatamente após o impacto, valores de θ variando de 0 a 180°, (*a*) a velocidade do centro de massa *G* da estrutura, (*b*) a velocidade angular da estrutura.

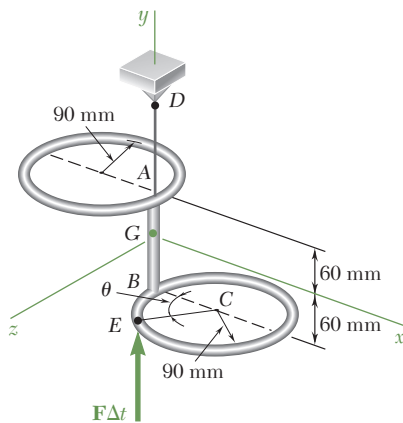



Figura P18.C1

18.C2 Uma sonda de 2.500 kg em órbita ao redor da Lua tem 2,4 m de altura e bases octogonais com lados de 1,2 m. Os eixos de coordenadas mostrados na figura são os eixos centroidais principais de inércia da sonda e seus raios de giração são $k_x = 0{,}98$ m, $k_y = 1{,}06$ m e $k_z = 1{,}02$ m. A sonda é equipada com um propulsor principal de 500 N de empuxo *E* e com quatro propulsores de 20 N de empuxo *A*, *B*, *C* e *D* que podem expelir propelente no sentido *y* positivo. A sonda tem uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_z \mathbf{k}$ quando dois dos propulsores de 20 N são usados para reduzir a velocidade angular a zero. Use um programa de computador para determinar, para qualquer par de ω_x e ω_z menor que ou igual a 0,06 rad/s, quais propulsores poderão ser usados e por quanto tempo poderão ser ativados. Use esse programa de computador considerando que $\boldsymbol{\omega}$ tem (*a*) a velocidade angular dada no Problema 18.33, (*b*) a velocidade angular do Problema 18.34, (*c*) $\boldsymbol{\omega} = (0{,}06\ \mathrm{rad/s})\mathbf{i} + (0{,}02\ \mathrm{rad/s})\mathbf{k}$, (*d*) $\boldsymbol{\omega} = -(0{,}06\ \mathrm{rad/s})\mathbf{i} - (0{,}02\ \mathrm{rad/s})\mathbf{k}$.

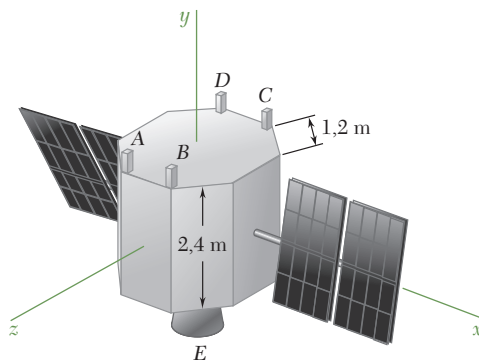



Figura P18.C2

18.C3 Um binário $\mathbf{M}_0 = (0{,}05 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i}$ é aplicado a um conjunto formado por pedaços de chapa de alumínio de espessura uniforme e massa total de 1,5 kg soldados a um eixo leve apoiado em mancais em A e B. Use um programa de computador para determinar as reações dinâmicas exercidas pelos mancais sobre o eixo em qualquer instante t após a aplicação do binário. Decomponha essas reações em componentes orientados ao longo dos eixos y e z girando com o conjunto. (*a*) Calcule e represente graficamente os componentes das reações de $t = 0$ até $t = 2$ s em intervalos de 0,1 s. (*b*) Determine o instante em que os componentes z das reações em A e B são iguais a zero.

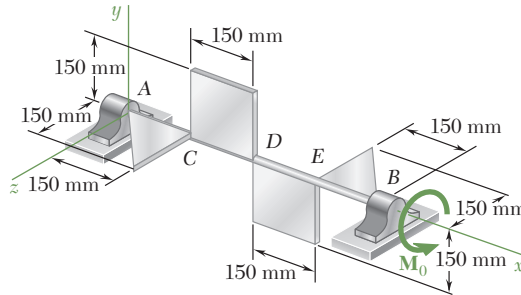



Figura P18.C3

18.C4 Um disco homogêneo de 2,5 kg e raio de 80 mm pode girar em relação ao braço ABC, que está soldado a um eixo DCE apoiado por mancais em D e E. Tanto o braço como o eixo têm massa desprezível. No instante $t = 0$, um binário $\mathbf{M}_0 = (0{,}5 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ é aplicado ao eixo DCE. Sabendo que em $t = 0$ a velocidade angular do disco é $\boldsymbol{\omega}_1 = (60 \text{ rad/s})\mathbf{j}$ e que o atrito no mancal em A faz com que a intensidade de $\boldsymbol{\omega}_1$ decresça à taxa de 15 rad/s^2, determine as reações dinâmicas exercidas sobre o eixo pelos mancais em D e E em qualquer instante t. Decomponha essas reações em componentes orientados ao longo dos eixos x e y que giram com o eixo. Use um programa de computador (*a*) para calcular os componentes das reações de $t = 0$ até $t = 4$ s. (*b*) para determinar os instantes t_1 e t_2 em que os componentes x e y das reações em E são respectivamente iguais a zero.

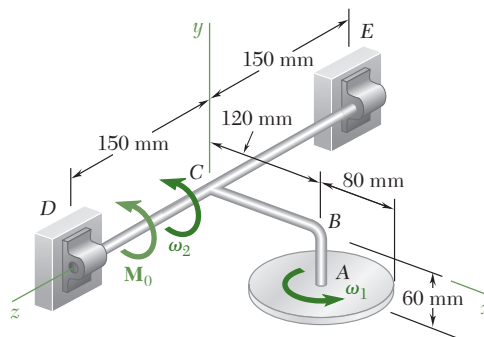



Figura P18.C4

18.C5 Um disco homogêneo de 180 mm de raio está soldado a uma barra *AG* de 360 mm de comprimento e massa desprezível que está conectada por um grampo a um eixo vertical *AB*. A barra e o disco podem girar livremente em torno de um eixo horizontal *AC*, e o eixo *AB* pode girar livremente em torno de um eixo vertical. Inicialmente, a barra *AG* faz um dado ângulo θ_0 com a vertical para baixo e sua velocidade angular $\dot{\theta}_0$ em torno de *AC* é nula. O eixo *AB* atinge então uma velocidade angular $\dot{\phi}_0$ em torno da vertical. Use um programa de computador (*a*) para calcular o valor mínimo θ_m do ângulo θ no movimento subsequente e o período de oscilação em θ, ou seja, o tempo necessário para θ readquirir seu valor inicial θ_0, (*b*) para calcular a velocidade angular $\dot{\phi}$ do eixo *AB* para valores de θ variando de θ_0 até θ_m. Use esse programa com as condições iniciais (*i*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, (*ii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\phi}_0 = 10$ rad/s, (*iii*) $\theta_0 = 60°$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s. [*Dica:* Use o princípio de conservação de energia e o fato de que a quantidade de movimento angular do corpo em relação ao eixo vertical passando por *A* se conserva para obter uma equação da forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Essa equação pode ser integrada por um método numérico.]

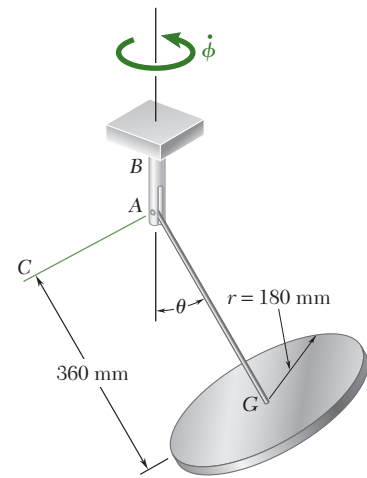



Figura P18.C5

18.C6 Um disco homogêneo de 180 mm de raio está soldado a uma barra *AG* de 360 mm de comprimento e massa desprezível que está suspensa por uma junta articulada em *A*. O disco é liberado na posição $\theta = \theta_0$ com uma taxa de rotação própria $\dot{\psi}_0$, um taxa de precessão $\dot{\phi}_0$ e uma taxa de nutação nula. Use um programa de computador (*a*) para calcular o valor mínimo θ_m do ângulo θ no movimento subsequente e o período de oscilação em θ, ou seja, o tempo necessário para θ readquirir seu valor inicial θ_0, (*b*) para calcular a taxa de rotação própria $\dot{\psi}$ e a taxa de precessão $\dot{\phi}$ para valores de θ variando de θ_0 até θ_m usando a 2ª ordem. Use esse programa com as condições iniciais (*i*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 0$, (*ii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 0$, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, (*iii*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, (*iv*) $\theta_0 = 90°$, $\dot{\psi}_0 = 10$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s, (*v*) $\theta_0 = 60°$, $\dot{\psi}_0 = 50$ rad/s, $\dot{\phi}_0 = 5$ rad/s. [*Dica:* Use o princípio de conservação de energia e o fato de que a quantidade de movimento angular do corpo conserva-se em relação a ambos os eixos Z e *z* para obter uma equação da forma $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$. Essa equação pode ser integrada por um método numérico.]

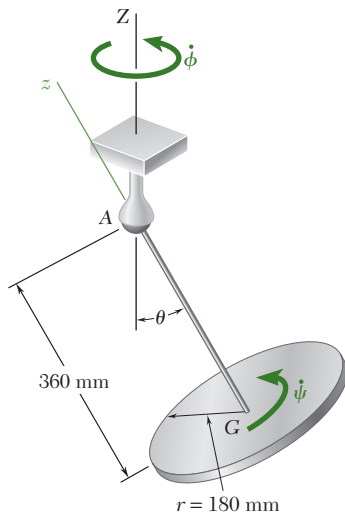



Figura P18.C6

O amortecedor de vento do Taipei 101 ajuda a proteger de tufões e terremotos reduzindo os efeitos do vento e da vibração na construção. Sistemas mecânicos podem estar sujeitos a *vibrações livres ou a vibrações forçadas*. As vibrações são *amortecidas* quando há dissipação de energia e *não amortecidas* no caso contrário. Este capítulo é uma introdução para muitos conceitos fundamentais na análise de vibração.

Vibrações mecânicas

19 Vibrações mecânicas

19.1 Introdução

Uma *vibração mecânica* é o movimento de uma partícula ou de um corpo que oscila em torno de uma posição de equilíbrio. A maior parte das vibrações em máquinas e estruturas é indesejável devido ao aumento de tensões e às perdas de energia que as acompanham. Elas deveriam, portanto, ser eliminadas ou reduzidas, tanto quanto possível, por meio de projetos adequados. A análise de vibrações tem se tomado cada vez mais importante nos últimos anos devido à tendência atual por máquinas de altas velocidades e de estruturas mais leves. Existem muitas razões para esperar que essa tendência permaneça e que uma necessidade ainda maior de análise de vibrações ocorra no futuro.

A análise de vibrações é um tema muito extenso, aos quais textos inteiros têm sido dedicados. Nosso presente estudo, consequentemente, será limitado a tipos simples de vibrações, a saber, as vibrações de um corpo ou de um sistema de corpos com um grau de liberdade.

Uma vibração mecânica é geralmente produzida quando um sistema é deslocado de sua posição de equilíbrio estável. O sistema tende a retornar a essa posição sob a ação de forças restauradoras (sejam forças elásticas, como no caso de uma massa ligada a uma mola, ou forças gravitacionais, como no caso de um pêndulo). Mas o sistema em geral atinge sua posição original com certa velocidade adquirida que o leva além dessa posição. Como o processo pode ser repetido indefinidamente, o sistema mantém-se em movimento oscilatório ao redor de sua posição de equilíbrio. O intervalo de tempo necessário para o sistema completar um ciclo inteiro do movimento é chamado de *período* da vibração. O número de ciclos por unidade de tempo define a *frequência* e o deslocamento máximo do sistema de sua posição de equilíbrio é chamado de *amplitude* da vibração.

Quando o movimento é mantido somente pelas forças restauradoras, a vibração é denominada *vibração livre* (Seções de 19.2 a 19.6). Quando uma força periódica é aplicada ao sistema, o movimento resultante é descrito como uma *vibração forçada* (Seção 19.7). Quando os efeitos do atrito podem ser desprezados, as vibrações são ditas *não amortecidas.* Entretanto, todas as vibrações são realmente *amortecidas* em algum grau. Se uma vibração livre é apenas ligeiramente amortecida, sua amplitude decresce lentamente até, depois de certo tempo, o movimento cessar. Mas se o amortecimento for grande o suficiente para impedir qualquer vibração real, o sistema, então, retoma lentamente à sua posição original (Seção 19.8). Uma vibração forçada amortecida é mantida durante todo o tempo em que a força periódica que produz a vibração é aplicada. A amplitude da vibração, entretanto, é afetada pelas intensidades das forças de amortecimento (Seção 19.9).

VIBRAÇÕES SEM AMORTECIMENTO

19.2 Vibrações livres de partículas. Movimento harmônico simples

Considere um corpo de massa m ligado a uma mola de constante k (Fig. 19.1a). Como, neste momento, estamos preocupados somente com o movimento de seu centro de massa, nos referimos a esse corpo como uma partícula. Quando a partícula está em equilíbrio estático, as forças que agem sobre ela são seu peso **W** e a força **T** exercida pela mola, de

intensidade $T = k\delta_{est}$, onde δ_{est} representa a elongação da mola. Temos, portanto,

$$W = k\delta_{est}$$

Considere agora que a partícula é deslocada ao longo de uma distância x_m de sua posição de equilíbrio e é liberada com velocidade inicial nula. Se x_m for escolhido como sendo menor que δ_{est}, a partícula vai oscilar em torno de sua posição de equilíbrio; uma vibração de amplitude x_m terá sido produzida. Note que a vibração também pode ser produzida comunicando-se certa velocidade inicial à partícula quando ela está em sua posição de equilíbrio $x = 0$ ou, de modo mais geral, pondo a partícula em movimento a partir de qualquer posição dada $x = x_0$ com uma dada velocidade inicial $\mathbf{v}_0$.

Para analisar a vibração, consideremos a partícula em uma posição P em algum instante arbitrário t (Fig. 19.1b). Representando por x o deslocamento OP medido a partir da posição de equilíbrio O (positivo para baixo), observamos que as forças que atuam sobre a partícula são seu peso $\mathbf{W}$ e a força $\mathbf{T}$ exercidos pela mola que, nessa posição, tem uma intensidade $T = k(\delta_{est} + x)$. Recordando que $W = k\delta_{est}$, constatamos que a intensidade da resultante $\mathbf{F}$ das duas forças (positivo para baixo) é

$$F = W - k(\delta_{est} + x) = -kx \tag{19.1}$$

Figura 19.1

Assim, a *resultante* das forças exercidas sobre a partícula é proporcional ao deslocamento *OP medido a partir da posição de equilíbrio.* Recordando a convenção de sinal, verificamos que $\mathbf{F}$ é sempre dirigida *ao longo da* posição de equilíbrio O. Substituindo F na equação fundamental $F = ma$ e recordando que a é a segunda derivada $\ddot{x}$ de x em relação a t, escrevemos

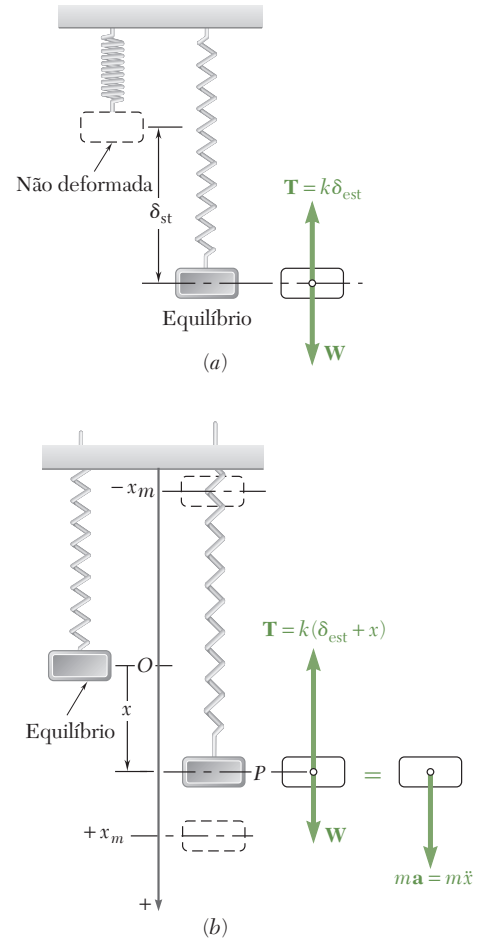
$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{19.2}$$

Observe que a mesma convenção de sinal deve ser utilizada para a aceleração $\ddot{x}$ e para o deslocamento x, a saber, positivo para baixo.

O movimento definido pela Eq. (19.2) é chamado *movimento harmônico simples.* Ele é caracterizado pelo fato de que *a aceleração é proporcional ao deslocamento, de direção e sentido oposto.* Podemos verificar que cada uma das funções $x_1 = \text{sen}\,(\sqrt{k/m}\,t)$ e $x_2 = \cos\,(\sqrt{k/m}\,t)$ satisfaz a Eq. (19.2). Essas funções, portanto, constituem duas *soluções particulares* da equação diferencial (19.2). *A solução geral* da Eq. (19.2) é obtida multiplicando-se cada uma das soluções particulares por uma constante arbitrária e adicionando-as. Assim, a solução geral é expressa como

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) + C_2\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \tag{19.3}$$

Observamos que x é *uma função periódica* do tempo t e que, portanto, representa uma vibração da partícula P. O coeficiente de t na expressão que obtivemos é chamado de *frequência natural circular* da vibração e é representado por ω_n. Temos

$$\text{Frequência natural circular} = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{19.4}$$

Substituindo $\sqrt{k/m}$ na Eq. (19.3), escrevemos

$$x = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \quad (19.5)$$

Essa é a solução geral da equação diferencial

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \quad (19.6)$$

que pode ser obtida a partir da Eq. (19.2) dividindo-se ambos os termos por m e observando que $k/m = \omega_n^2$. Diferenciando duas vezes ambos os membros da Eq. (19.5) em relação a t, obtemos as seguintes expressões para a velocidade e a aceleração no instante t:

$$v = \dot{x} = C_1\omega_n \cos \omega_n t - C_2\omega_n \text{ sen } \omega_n t \quad (19.7)$$

$$a = \ddot{x} = -C_1\omega_n^2 \text{ sen } \omega_n t - C_2\omega_n^2 \cos \omega_n t \quad (19.8)$$

Os valores das constantes C_1 e C_2 dependem das *condições iniciais* do movimento. Por exemplo, temos $C_1 = 0$ se a partícula é deslocada de sua posição de equilíbrio e liberada em $t = 0$ com velocidade inicial nula, e temos $C_2 = 0$ se a partícula parte de O em $t = 0$ com determinada velocidade inicial. Em geral, substituindo $t = 0$ e os valores iniciais x_0 e v_0 do deslocamento e da velocidade nas Eqs. (19.5) e (19.7), encontramos que $C_1 = v_0/\omega_n$ e $C_2 = x_0$.

As expressões obtidas para o deslocamento, velocidade e aceleração de uma partícula podem ser escritas de forma mais compacta se observarmos que a Eq. (19.5) expressa que o deslocamento $x = OP$ é a soma dos componentes x de dois vetores, $\mathbf{C}_1$ e $\mathbf{C}_2$, respectivamente, de intensidades C_1 e C_2, dirigidos como mostrado na Fig. 19.2*a*. Quando t varia, ambos os vetores giram no sentido horário; constatamos também que a intensidade da sua resultante $\overrightarrow{OQ}$ é igual ao deslocamento máximo x_m. O movimento harmônico simples de P ao longo do eixo x pode, assim, ser obtido projetando-se neste eixo o movimento de um ponto Q que descreve uma *circunferência auxiliar* de raio x_m *com uma velocidade angular constante* ω_n (o que explica o nome de frequência natural circular dado para ω_n). Representando por ϕ o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{OQ}$ e $\mathbf{C}_1$, escrevemos

$$OP = OQ \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \quad (19.9)$$

que conduz a novas equações para o deslocamento, velocidade e aceleração de P:

$$x = x_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \quad (19.10)$$

$$v = \dot{x} = x_m\omega_n \cos (\omega_n t + \phi) \quad (19.11)$$

$$a = \ddot{x} = -x_m\omega_n^2 \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \quad (19.12)$$

A curva deslocamento-tempo é representada por uma curva senoidal (Fig. 19.2*b*); o valor máximo x_m do deslocamento é chamado *amplitude* da vibração; e o ângulo ϕ que define a posição inicial de Q no círculo é chamado *ângulo de fase.* Verificamos a partir da Fig. 19.2 que um *ciclo* completo é descrito quando o ângulo $\omega_n t$ aumenta em 2π rad. O valor correspondente de t, representado por τ_n, é chamado *período* da vibração livre e é medido em segundos. Temos

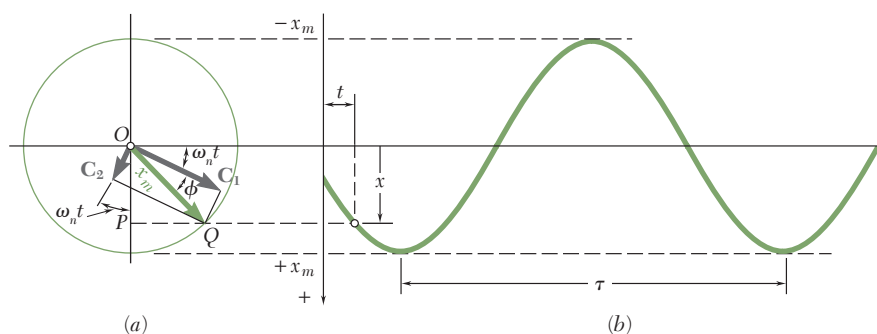



Figura 19.2

$$\text{período} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{19.3}$$

O número de ciclos descritos por unidade de tempo é representado por f_n e é conhecido como a *frequência natural* da vibração. Escrevemos

$$\text{Frequência natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{19.14}$$

A unidade de frequência é uma frequência de 1 ciclo por segundo, correspondente a um período de 1 s. Em termos de unidades básicas, a unidade de frequência é, então, 1/s ou s^{-1}. Ela é chamada *hertz* (Hz) no sistema de unidades SI. Segue-se também da Eq. (19.14) que uma frequência de 1 s^{-1} ou 1 Hz corresponde a uma frequência circular de 2π rad/s. Em problemas que envolvem velocidades angulares expressas em rotações por minuto (rpm), temos 1 rpm $= \frac{1}{60}$ s^{-1} $= \frac{1}{60}$ Hz, ou 1 rpm $= (2\pi/60)$ rad/s.

Recordando que ω_n foi definido em (19.4) em termos da constante k da mola e da massa m da partícula, observamos que o período e a frequência são independentes das condições iniciais e da amplitude da vibração. Veja que τ_n e f_n dependem da *massa* e não do *peso* da partícula, e, assim, são independentes do valor de g.

As curvas velocidade-tempo e aceleração-tempo podem ser representadas por curvas senoidais de mesmo período que a curva deslocamento-tempo, mas com ângulos de fase diferentes. A partir das Eqs. (19.11) e (19.12), verificamos que os valores máximos das intensidades da velocidade e da aceleração são

$$v_m = x_m\omega_n \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \tag{19.15}$$

Como o ponto Q descreve a circunferência auxiliar, de raio x_m, a uma velocidade angular constante ω_n, sua velocidade e aceleração são iguais, respectivamente, às expressões (19.15). Recordando as Eqs. (19.11) e (19.12), constatamos, portanto, que a velocidade e a aceleração de P podem ser obtidas em qualquer instante pela projeção no eixo x de vetores de intensidade $v_m = x_m\omega_n$ e $a_m = x_m\omega_n^2$, representando, respectivamente, a velocidade e a aceleração de Q no mesmo instante (Fig. 19.3).

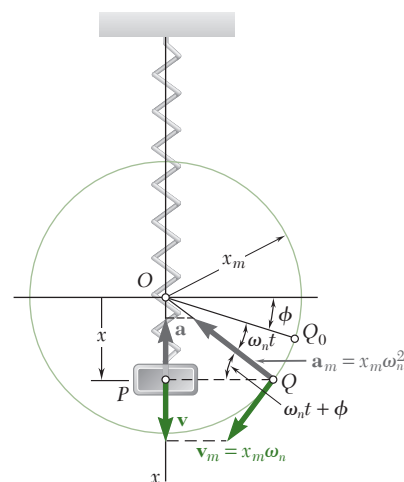
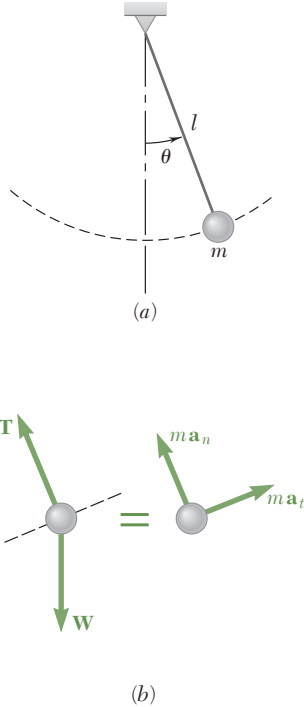



Figura 19.3

Os resultados obtidos não estão limitados à solução do problema de uma massa ligada a uma mola. Eles podem ser usados para analisar o movimento retilíneo de uma partícula *sempre que a resultante* **F** *das forças que atuam sobre a partícula seja proporcional ao deslocamento x e dirigida para O.* A equação fundamental do movimento $F = ma$ pode então ser escrita sob a forma da Eq. (19.6), que é característica de um movimento harmônico simples. Observando que o coeficiente de x deve ser igual a ω_n^2, podemos facilmente determinar a frequência circular natural ω_n do movimento. Substituindo o valor obtido para ω_n nas Eqs. (19.13) e (19.14), obtemos então o período τ_n e a frequência natural f_n do movimento.

(a)

(b)

Figura 19.4

19.3 Pêndulo simples (solução aproximada)

A maioria das vibrações encontradas em aplicações de engenharia pode ser representada por um movimento harmônico simples. Muitas outras, embora de tipos diferentes, podem ser *aproximadas* por um movimento harmônico simples, contanto que suas amplitudes permaneçam pequenas. Considere, por exemplo, um *pêndulo simples,* consistindo em um pêndulo de massa m ligada a uma corda de comprimento l, que pode oscilar em um plano vertical (Fig. 19.4*a*). Em um determinado instante t, a corda forma um ângulo θ com a vertical. As forças que agem sobre o pêndulo são seu peso **W** e a força **T** exercido pela corda (Fig. 19.4*b*). Decompondo o vetor $m\mathbf{a}$ em componentes tangencial e normal, com $m\mathbf{a}_t$ dirigido para a direita, isto é, na direção e sentido correspondente aos valores crescentes de θ, e observando que $a_t = l\alpha = l\ddot{\theta}$, escrevemos

$$\Sigma F_t = ma_t: \qquad -W \text{ sen } \theta = ml\ddot{\theta}$$

Sabendo que $W = mg$ e dividindo tudo por ml, obtemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \text{ sen } \theta = 0 \tag{19.16}$$

Para oscilações de pequena amplitude, podemos substituir sen θ por θ, expresso em radianos, e escrevemos

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \theta = 0 \tag{19.17}$$

A comparação com a Eq. (19.6) mostra que a equação diferencial (19.17) é a de um movimento harmônico simples com uma frequência natural circular ω_n igual a $(g/l)^{1/2}$. A solução geral da Eq. (19.17) pode, portanto, ser expressa como

$$\theta = \theta_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi)$$

onde θ_m é a amplitude das oscilações e ϕ é um ângulo de fase. Substituindo na Eq. (19.13) o valor obtido para ω_n, obtemos a seguinte expressão para o período das pequenas oscilações de um pêndulo de comprimento l:

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{19.18}$$

*19.4 Pêndulo simples (solução exata)

A Eq. (19.18) é apenas uma solução aproximada. Para obter uma expressão exata para o período das oscilações de um pêndulo simples, devemos retornar à Eq. (19.16). Multiplicando ambos os termos por $2\dot{\theta}$ e integrando de uma posição inicial correspondente à máxima deflexão, isto é, $\theta = \theta_m$ e $\dot{\theta} = 0$, escrevemos

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}(\cos\theta - \cos\theta_m)$$

Substituindo $\cos\theta$ por $1 - 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$ e $\cos\theta_m$ por uma expressão análoga, resolvendo para dt e integrando em um quarto do período partindo de $t = 0$, $\theta = 0$ até $t = \tau_n/4$, $\theta = \theta_m$, temos

$$\tau_n = 2\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_m}\frac{d\theta}{\sqrt{\text{sen}^2(\theta_m/2) - \text{sen}^2(\theta/2)}}$$

A integral de lado direito da equação é uma *integral elíptica;* ela não pode ser expressa em termos das funções algébricas ou trigonométricas usuais. Entretanto, fazendo

$$\text{sen}\,(\theta/2) = \text{sen}\,(\theta_m/2)\,\text{sen}\,\phi$$

podemos escrever

$$\tau_n = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\phi}{\sqrt{1 - \text{sen}^2(\theta_m/2)\,\text{sen}^2\phi}} \tag{19.19}$$

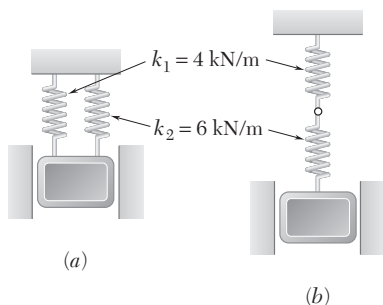
onde a integral obtida, comumente representada por K, pode ser calculada usando-se um método numérico de integração. Essa integral também pode ser encontrada em *tabelas de integrais elípticas* para vários valores de $\theta_m/2$*. A fim de comparar o resultado aqui obtido com o resultado da seção precedente, escrevemos a Eq. (19.19) sob a forma

$$\tau_n = \frac{2K}{\pi}\left(2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\right) \tag{19.20}$$

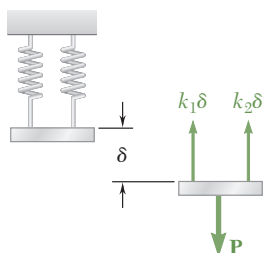
A Eq. (19.20) mostra que o valor real do período de um pêndulo simples pode ser obtido multiplicando-se o valor aproximado dado na Eq. (19.18) pelo fator de correção $2K/\pi$. Na Tabela 19.1 são apresentados valores do fator de correção para vários valores da amplitude θ_m. Verificamos que, para cálculos comuns de engenharia, o fator de correção pode ser omitido, desde que a amplitude não exceda 10°.

Tabela 19.1 Fator de correção para o período de um pêndulo simples

θ_m	0°	10°	20°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
K	1.571	1.574	1.583	1.598	1.686	1.854	2.157	2.768	∞
$2K/\pi$	1.000	1.002	1.008	1.017	1.073	1.180	1.373	1.762	∞

* Ver, por exemplo, *Standard Mathematical Tables,* Chemical Rubber Publishing Company, Cleveland, Ohio.

PROBLEMA RESOLVIDO 19.1

Um bloco de 50 kg se move entre guias verticais, como mostra a figura. O bloco é puxado até 40 mm abaixo de sua posição de equilíbrio e liberado. Para cada combinação de molas, determine o período da vibração, a velocidade máxima do bloco e a aceleração máxima desse bloco.

SOLUÇÃO

a. Molas presas em paralelo. Inicialmente, determinamos a constante k de uma mola única equivalente às duas molas, *encontrando a intensidade da força* **P** necessária para produzir uma dada deflexão δ. Uma vez que para uma deflexão δ as intensidades das forças exercidas pelas molas são, respectivamente, $k_1\delta$ *e* $k_2\delta$, temos

$$P = k_1\delta + k_2\delta = (k_1 + k_2)\delta$$

A constante k da mola única equivalente é

$$k = \frac{P}{\delta} = k_1 + k_2 = 4 \text{ kN/m} + 6 \text{ kN/m} = 10 \text{ kN/m} = 10^4 \text{ N/m}$$

Período de vibração: Como $m = 50$ kg, a Eq. (19.4) resulta em

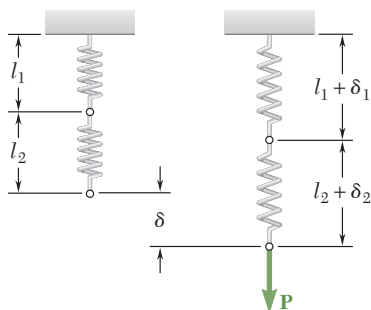
$$\omega_n^2 = \frac{k}{m} = \frac{10^4 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \qquad \omega_n = 14{,}14 \text{ rad/s}$$

$$\tau_n = 2\pi/\omega_n \qquad \tau_n = 0{,}444 \text{ s} \quad ◀$$

Velocidade máxima: $v_m = x_m\omega_n = (0{,}040 \text{ m})(14{,}14 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0{,}566 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0{,}566 \text{ m/s} \updownarrow \quad ◀$$

Aceleração máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0{,}040 \text{ m})(14{,}14 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 8{,}00 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 8{,}00 \text{ m/s}^2 \updownarrow \quad ◀$$

b. Molas presas em série. Determinamos inicialmente a constante k da mola única equivalente às duas molas, *encontrando a elongação total* δ dessas molas sob a ação de uma carga estática dada **P**. Visando facilitar os cálculos, uma carga estática de intensidade $P = 12$ kN é utilizada.

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{12 \text{ kN}}{4 \text{ kN/m}} + \frac{12 \text{ kN}}{6 \text{ kN/m}} = 5 \text{ m}$$

$$k = \frac{P}{\delta} = \frac{12 \text{ kN}}{5 \text{ m}} = 2{,}4 \text{ kN/m} = 2.400 \text{ N/m}$$

Período de vibração: $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m} = \dfrac{2.400 \text{ N/m}}{50 \text{ kg}} \qquad \omega_n = 6{,}93 \text{ rad/s}$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 0{,}907 \text{ s} \quad ◀$$

Velocidade máxima: $\omega_m = x_m v_m = (0{,}040 \text{ m})(6{,}93 \text{ rad/s})$

$$v_m = 0{,}277 \text{ m/s} \qquad \mathbf{v}_m = 0{,}277 \text{ m/s} \updownarrow \quad ◀$$

Aceleração máxima: $a_m = x_m\omega_n^2 = (0{,}040 \text{ m})(6{,}93 \text{ rad/s})^2$

$$a_m = 1{,}920 \text{ m/s}^2 \qquad \mathbf{a}_m = 1{,}920 \text{ m/s}^2 \updownarrow \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Este capítulo trata de *vibrações mecânicas,* ou seja, do movimento de uma partícula ou corpo que oscila em torno de uma posição de equilíbrio.

Nesta primeira lição, vimos que uma *vibração livre* de uma partícula ocorre quando essa partícula está sujeita a uma força proporcional ao seu deslocamento e de direção oposta, tal como a força exercida por uma mola (Fig. 19.1). O movimento resultante, chamado *movimento harmônico simples,* é caracterizado pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{19.2}$$

onde x é o deslocamento da partícula, $\ddot{x}$ é sua aceleração, m é sua massa e k é a constante da mola. A solução encontrada para essa equação diferencial foi

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{19.10}$$

onde x_m = amplitude da vibração
$\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frequência natural circular (rad/s)
ϕ = ângulo de fase (rad)

Também definimos o *período* da vibração como o tempo $\tau_n = 2\pi/\omega_n$ necessário para a partícula completar um ciclo, e a *frequência natural* como o número de ciclos por segundo $f_n = 1/\tau_n = \omega_n/2\pi$ expressa em Hz ou s^{-1}. Diferenciando a Eq. (19.10) duas vezes, obtemos a velocidade e a aceleração da partícula em qualquer instante. Os valores máximos encontrados da velocidade e da aceleração foram

$$v_m = x_m\omega_m \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \tag{19.15}$$

Para determinar os parâmetros da Eq. (19.10), você pode seguir estes passos.

1. Desenhe um diagrama de corpo livre mostrando as forças exercidas sobre a partícula quando essa partícula está a uma distância x de sua posição de equilíbrio. A resultante dessas forças será proporcional a x e seu sentido será oposto ao sentido positivo de x [Eq. (19.1)].

2. Escreva a equação diferencial do movimento igualando à $m\ddot{x}$ a resultante das forças encontradas no passo 1. Note que, uma vez que uma direção positiva para x tenha sido escolhida, a mesma convenção de sinal deve ser usada para a aceleração $\ddot{x}$. Depois da transposição, você vai obter uma equação na forma da Eq. (19.2).

(*continua*)

3. Determine a frequência natural circular ω_n dividindo o coeficiente de x pelo coeficiente de $\ddot{x}$ nessa equação e tomando a raiz quadrada do resultado obtido. Certifique-se que ω_n está expresso em rad/s.

4. Determine a amplitude x_m e o ângulo de fase ϕ substituindo o valor obtido por ω_n e os valores iniciais de x e $\dot{x}$ na Eq. (19.10), e a equação obtida diferenciando a Eq. (19.10) em relação a t.

A Eq. (19.10) e as duas equações obtidas diferenciando a Eq. (19.10) duas vezes em relação a t podem agora ser usadas para encontrar o deslocamento, a velocidade e a aceleração da partícula em um instante qualquer. As Eqs. (19.15) produzem a velocidade máxima v_m e a aceleração máxima a_m.

5. Você também observou que, para pequenas oscilações de um pêndulo simples, o ângulo θ que a corda do pêndulo forma com a vertical satisfaz a equação diferencial

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{19.17}$$

onde l é o comprimento da corda e θ é expresso em radianos [Seção 19.3]. Essa equação define novamente um *movimento harmônico simples*, e sua solução tem a mesma forma que a Eq. (19.10).

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi)$$

onde a frequência natural circular $\omega_n = \sqrt{g/l}$ é expressa em rad/s. A determinação das várias constantes dessa expressão é realizada de maneira similar à da descrita anteriormente. Lembre-se de que a velocidade do pêndulo é tangente à trajetória e que sua intensidade é $v = l\dot{\theta}$, enquanto a aceleração do pêndulo tem um componente tangencial $\mathbf{a}_t$, de intensidade $a_t = l\ddot{\theta}$, e um componente normal $\mathbf{a}_n$ dirigido para o centro da trajetória e de intensidade $a_n = l\dot{\theta}^2$.

PROBLEMAS

19.1 Determine a velocidade máxima e a aceleração máxima de uma partícula que se move em movimento harmônico simples com uma amplitude de 5 mm e um período de 0,1 s.

19.2 Determine a amplitude e a velocidade máxima de uma partícula que se move em movimento harmônico simples com uma aceleração máxima de 60 m/s^2 e uma frequência de 40 Hz.

19.3 Uma partícula se move em movimento harmônico simples. Sabendo que a amplitude é de 300 mm e a aceleração máxima é de 5 m/s^2, determine a velocidade máxima da partícula e a frequência de seu movimento.

Figura P19.4

19.4 Um bloco de 15 kg é suportado pela mola como mostrado na figura. Se o bloco é movido verticalmente para baixo até sua posição de equilíbrio e liberado, determine (*a*) o período e a frequência do movimento resultante, (*b*) a velocidade máxima e a aceleração máxima do bloco se a amplitude de seu movimento é 50 mm.

Figura P19.5

19.5 Um bloco de 32 kg é ligado a uma mola e pode mover-se sem atrito em um rasgo como mostrado na figura. O bloco está na sua posição de equilíbrio quando é atingido por um martelo que lhe confere uma velocidade inicial de 250 mm/s. Determine (*a*) o período e a frequência do movimento resultante, (*b*) a amplitude do movimento e a aceleração máxima do bloco.

19.6 Um pêndulo simples consistindo de um peso ligado a uma corda oscila em um plano vertical com um período de 1,3 s. Considerando um movimento harmônico simples e sabendo que a velocidade máxima do pêndulo é de 400 mm/s, determine (*a*) a amplitude do movimento em graus, (*b*) a aceleração tangencial máxima do peso.

Figura P19.6 e P19.7

19.7 Um pêndulo simples consistindo de um peso ligado a uma corda de comprimento $l = 800$ mm oscila em um plano vertical. Considerando um movimento harmônico simples e sabendo que o pêndulo é liberado do repouso quando $\theta = 6°$, determine (*a*) a frequência de oscilação, (*b*) a velocidade máxima do peso.

19.8 Uma caixa de instrumento *A* está aparafusada numa mesa vibratória como mostrado na figura. A mesa se movimenta verticalmente em movimento harmônico simples na mesma frequência do motor de rotação variável que a impulsiona. A caixa deve ser testada para uma aceleração de pico de 50 m/s^2. Sabendo que a amplitude da mesa vibratória é de 60 mm, determine (*a*) a rotação requerida do motor em rpm, (*b*) a velocidade máxima da mesa.

Figura P19.8

19.9 O movimento de uma partícula é descrito pela equação $x = 5 \operatorname{sen} 2t + 4 \cos 2t$, onde x é expresso em metros e t em segundos. Determine (*a*) o período do movimento, (*b*) sua amplitude, (*c*) seu ângulo de fase.

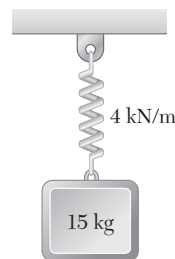
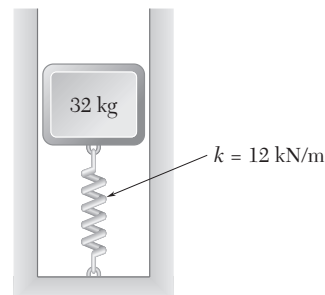
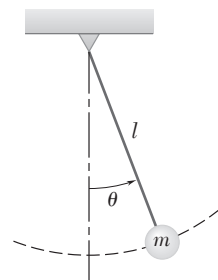
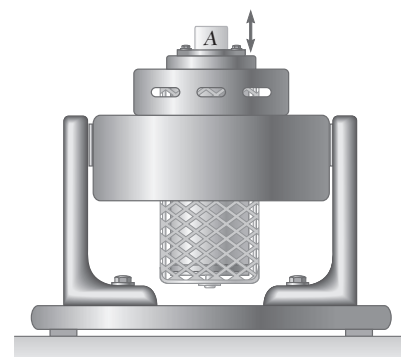
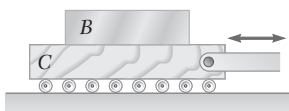



Figura P19.10

19.10 Um pacote de instrumento B é colocado na mesa C como mostrado na figura. A mesa foi projetada para se deslocar horizontalmente em movimento harmônico simples com uma frequência de 3 Hz. Sabendo que o coeficiente de atrito estático μ_s é igual a 0,40, determine a maior amplitude possível do movimento para que o pacote não deslize na mesa.

19.11 Um bloco de 32 kg ligado a uma mola de constante $k = 12$ kN/m pode se mover sem atrito em um rasgo como mostrado na figura. O bloco sofre um deslocamento inicial de 300 mm para baixo a partir da sua posição de equilíbrio e é liberado. Determine, 1,5 s depois de o bloco ter sido liberado (*a*) a distância total percorrida pelo bloco, (*b*) a aceleração do bloco.

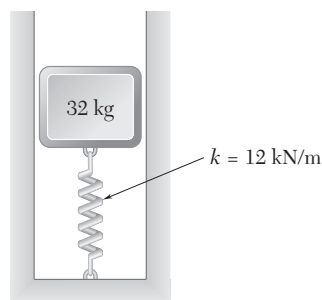



Figura P19.11

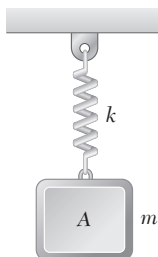



Figura P19.12

19.12 Um bloco de 2 kg é suportado, como mostrado na figura, por uma mola de constante $k = 400$ N/m que pode atuar em tração ou compressão. O bloco está na sua posição de equilíbrio quando ele é atingido por baixo por um martelo que lhe confere uma velocidade ascendente de 2,5 m/s. Determine (*a*) o tempo requerido para o bloco se mover 100 mm para cima, (*b*) as correspondentes velocidade e aceleração do bloco.

19.13 No Problema 19.12, determine a posição, velocidade e aceleração do bloco 0,90 s após ter sido atingido pelo martelo.

19.14 O peso de um pêndulo simples de comprimento $l = 800$ mm é liberado do repouso quando $\theta = +5°$. Considerando um movimento harmônico simples, determine, 1,6 s após a liberação, (*a*) o ângulo θ, (*b*) as intensidades da velocidade e aceleração do peso.

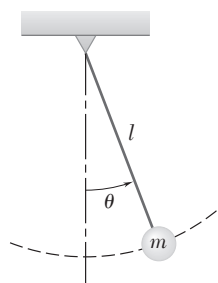



Figura P19.14

19.15 Um colar de 5 kg repousa sobre a mola mostrada na figura, à qual não está preso. Observa-se que quando o colar é empurrado 180 mm ou mais para baixo e liberado, ele perde contato com a mola. Determine (*a*) a constante da mola, (*b*) a posição, a velocidade e a aceleração do colar 0,16 s após ter sido empurrado 180 mm para baixo e liberado.

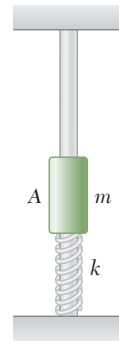



Figura *P19.15*

19.16 Um colar *C* de 8 kg pode deslizar sem atrito sobre uma barra horizontal entre duas molas idênticas *A* e *B* nas quais não está preso. Cada mola tem uma constante $k = 600$ N/m. O colar é empurrado para a esquerda contra a mola *A*, comprimindo esta em 20 mm, e liberado na posição mostrada na figura. Ele então desliza ao longo da barra para a direita e atinge a mola *B*. Após comprimir esta mola em 20 mm, o colar desliza para esquerda e atinge a mola *A*, que é comprimida de 20 mm. O ciclo é então repetido. Determine (*a*) o período do movimento do colar, (*b*) a velocidade do colar 1,5 s depois de ter sido liberado. (*Nota:* Isto é um movimento periódico, mas não um movimento harmônico simples.)

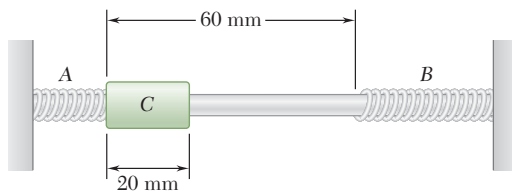



Figura *P19.16*

19.17 e 19.18 Um bloco de 35 kg é suportado pelo sistema de molas mostrado na figura. O bloco é movido verticalmente para baixo a partir de sua posição de equilíbrio e liberado. Sabendo que a amplitude do movimento resultante é de 45 mm, determine (*a*) o período e a frequência do movimento, (*b*) a velocidade máxima e a aceleração máxima do bloco.

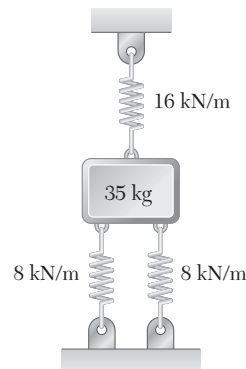



Figura P19.17

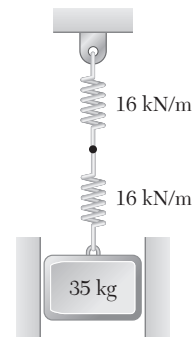



Figura P19.18

19.19 Um bloco de 15 kg é suportado pelo sistema de molas mostrado na figura. Se o bloco é movido 40 mm verticalmente para baixo da sua posição de equilíbrio e liberado, determine (*a*) o período e a frequência do movimento resultante, (*b*) a velocidade máxima e a aceleração do bloco.

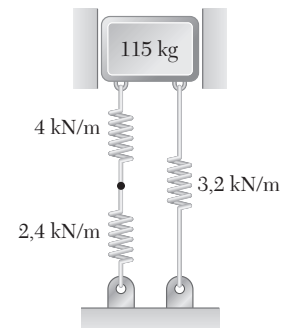



Figura P19.19

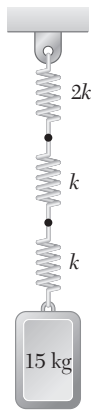
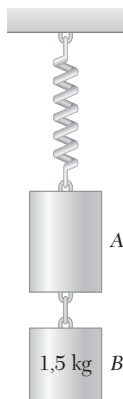
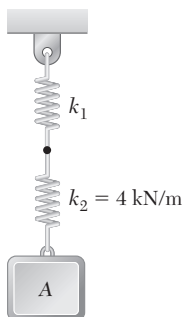



Figura P19.21

19.20 Um bloco de 5 kg preso à extremidade inferior de uma mola cuja extremidade superior é fixa vibra com um período de 6,8 s. Sabendo que a constante k da mola é inversamente proporcional ao seu comprimento, determine o período de um bloco de 3 kg que está preso ao centro da mesma mola se as extremidades superior e inferior da mola forem fixas.

19.21 Um bloco de 15 kg é suportado pelo sistema de molas mostrado na figura. O bloco é movido 20 mm verticalmente para baixo da sua posição de equilíbrio e então liberado. Sabendo que o período do movimento resultante é de 1,5 s, determine (*a*) a constante k, (*b*) a velocidade máxima e a aceleração máxima do bloco.

19.22 Duas molas de constantes k_1 e k_2 estão unidas em série a um bloco A que vibra em movimento harmônico simples com um período de 5 s. Quando as duas mesmas molas são unidas em paralelo ao mesmo bloco, este vibra com um período de 2 s. Determine a razão k_1/k_2 das duas constantes de mola.

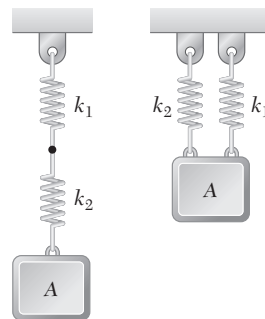



Figura P19.22

Figura P19.23

19.23 Observou-se que o período de vibração do sistema mostrado na figura é de 0,6 s. Após o cilindro B ser removido, o período observado é de 0,5 s. Determine (*a*) a massa do cilindro A, (*b*) a constante da mola.

19.24 Observou-se que o período de vibração do sistema mostrado na figura é de 0,8 s. Se o bloco A é removido, o período observado é de 0,7 s. Determine (*a*) a massa do bloco C, (*b*) o período de vibração quando os blocos A e B são removidos.

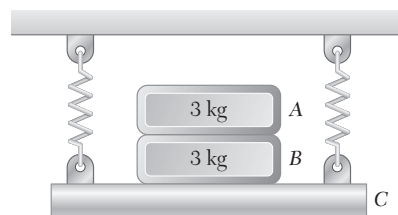



Figura P19.24

Figura P19.25

19.25 O período de vibração do sistema mostrado na figura observado é de 0,2 s. Depois que a mola de constante $k_2 = 4$ kN/m é removida e o bloco A é preso à mola de constante k_1, o período observado é de 0,12 s. Determine (*a*) a constante k_1 da mola que restou, (*b*) a massa do bloco A.

19.26 Uma plataforma A de 50 kg é presa nas molas B e D, cada uma das quais tem uma constante de $k = 2$ kN/m. Sabendo que a frequência de vibração da plataforma permanece inalterada quando um bloco de 40 kg é colocado sobre ela e uma terceira mola C é adicionada entre as molas B e D, determine a constante requerida da mola C.

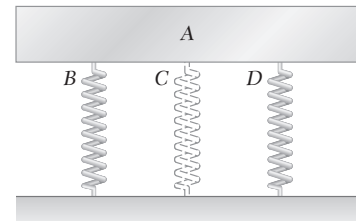



Figura P19.26

19.27 A partir da resistência dos materiais sabe-se que quando uma carga estática **P** é aplicada à extremidade B de uma barra de metal uniforme engastada na extremidade A, o comprimento da barra tem um incremento $\delta = PL/AE$, onde L é o comprimento não deformado da barra, A é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade do material. Sabendo que $L = 450$ mm, $E = 200$ GPa e que o diâmetro da barra é 8 mm, e desprezando o peso da barra, determine (*a*) a constante de mola equivalente da barra, (*b*) a frequência da vibração vertical de um bloco de massa $m = 8$ kg preso à extremidade B da mesma barra.

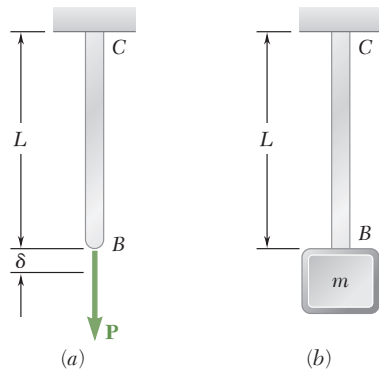



Figura P19.27

19.28 A partir da resistência dos materiais, sabe-se que, para uma viga engastada de seção transversal uniforme, uma carga estática **P** aplicada na extremidade B causará uma deflexão $\delta_B = PL^3/3EI$, onde L é o comprimento da viga, E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção transversal da viga. Sabendo que $L = 3$ m, $E = 230$ GPa e $I = 5 \times 10^6$ mm^4, determine (*a*) a constante de mola equivalente da viga, (*b*) a frequência de vibração de um bloco de 250 kg preso na extremidade B da mesma viga.

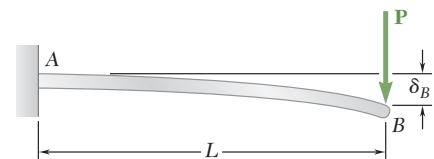



Figura P19.28

19.29 Uma deflexão de 40 mm no segundo piso de um edifício é medida diretamente abaixo de uma máquina rotativa de 4.000 kg recém-instalada que possui um rotor com um pequeno desbalanceamento. Considerando que a deflexão do piso é proporcional à carga que ele suporta, determine (*a*) a constante de mola equivalente do conjunto do piso, (*b*) a rotação da máquina, em rpm, que deve ser evitada para não coincidir com a frequência natural do sistema máquina-piso.

19.30 A equação de força-deflexão para uma mola não linear engastada em uma extremidade é $F = 5x^{1/2}$, onde F é a força, expressa em newtons, aplicada à outra extremidade, e x é a deflexão expressa em metros. (*a*) Determine a deflexão x_0 se um bloco de 120 g estiver suspenso pela mola e em repouso. (*b*) Considerando que a inclinação da curva deflexão-força no ponto correspondente a esta carga pode ser utilizada como uma constante de mola equivalente, determine a frequência de vibração do bloco se esse bloco for ligeiramente deslocado para baixo da sua posição de equilíbrio e liberado.

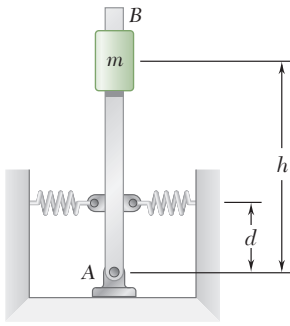



Figura ***P19.31***

19.31 Se h = 700 mm e d = 500 mm e cada mola tem uma constante k = 600 N/m, determine a massa m para a qual o período de pequenas oscilações é (a) 0,50 s, (b) infinito. Despreze a massa da barra e considere que cada mola pode atuar tanto tração como em compressão.

19.32 Representando por δ_{est} a deflexão estática de uma viga submetida a uma determinada carga, mostre que a frequência de vibração da carga é

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{est}}}$$

Despreze a massa da viga e considere que a carga permanece em contato com a viga.

***19.33** Expandindo o integrando da Eq. (19.19) da Seção 19.4 em uma série de potências pares de sen φ e integrando, mostre que o período de um pêndulo simples de comprimento l pode ser aproximado pela fórmula

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\,\text{sen}^2\frac{\theta_m}{2}\right)$$

onde θ_m é a amplitude das oscilações.

***19.34** Usando a fórmula dada no Problema 19.33, determine a amplitude θ_m para a qual o período de um pêndulo simples é $\frac{1}{2}$% mais longo que o período do mesmo pêndulo considerando pequenas oscilações.

***19.35** Usando os dados da Tabela 19.1, determine o período de um pêndulo simples de comprimento l = 750 mm (a) para pequenas oscilações, (b) para oscilações de amplitude θ_m = 60°, (c) para oscilações de amplitude θ_m = 90°.

***19.36** Usando os dados da Tabela 19.1, determine o comprimento em milímetros de um pêndulo simples que oscila com um período de 2 s e uma amplitude de 90°.

19.5 Vibrações livres de corpos rígidos

A análise das vibrações de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos que possui um único grau de liberdade é análoga à análise das vibrações de uma partícula. Uma variável apropriada, tal como uma distância x ou um ângulo θ, é escolhida para definir a posição do corpo ou sistema de corpos, e uma equação relacionando essa variável e sua derivada segunda em relação a t é escrita. Se a equação obtida for da mesma forma que (19.6), isto é, se tivermos

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = 0 \tag{19.21}$$

a vibração considerada será um movimento harmônico simples. O período e a frequência natural da vibração podem, então, ser obtidos identificando-se ω_n e substituindo seu valor nas Eqs. (19.13) e (19.14).

Em geral, um modo simples de se obter uma das Eqs. (19.21) é expressar que o sistema de forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas traçando um diagrama de corpo livre para um valor arbitrário da variável e escrevendo a equação de movimento apropriada. Recorríamos

que nosso objetivo devia ser *a determinação do coeficiente* da variável x ou θ, e *não* a determinação da variável em si ou das derivadas $\ddot{x}$ ou $\ddot{\theta}$. Fazendo este coeficiente igual a ω_n^2, obtemos a frequência natural circular ω_n a partir da qual τ_n e f_n podem ser determinados.

O método apresentado pode ser utilizado para analisar vibrações que sejam de fato representadas por um movimento harmônico simples, ou vibrações de pequena amplitude que possam ser *aproximadas* por um movimento harmônico simples. Como um exemplo, vamos determinar o período das pequenas oscilações de uma placa quadrada de lado $2b$ que está suspensa pelo ponto médio O de um dos seus lados (Fig. 19.5*a*). Consideramos a placa em uma posição arbitrária definida pelo ângulo θ que a linha OG forma com a vertical e traçamos uma equação de diagrama de corpo livre para expressar que o peso $\mathbf{W}$ da placa e os componentes $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{R}_y$ da reação em O são equivalentes aos vetores $m\mathbf{a}_t$ e $m\mathbf{a}_n$ e ao binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ (Fig. 19.5*b*). Como a velocidade angular e a aceleração angular da placa são iguais, respectivamente, a $\dot{\theta}$ e $\ddot{\theta}$, as intensidades dos dois vetores são, respectivamente, $mb\ddot{\theta}$ e $mb\dot{\theta}^2$, ao passo que o momento do binário é $\bar{I}\ddot{\theta}$. Em aplicações anteriores a este método (Cap. 16), tentamos, sempre que possível, assumir o sentido correto para a aceleração. Aqui, porém, devemos considerar o mesmo sentido positivo para θ e $\ddot{\theta}$ a fim de obter uma equação da forma (19.21). Consequentemente, a aceleração angular $\ddot{\theta}$ será considerada positiva no sentido anti-horário, ainda que esta suposição não seja claramente realista. Igualando os momentos em relação a O, escrevemos

$$+\circlearrowleft \qquad -W(b \operatorname{sen} \theta) = (mb\ddot{\theta})b + \bar{I}\ddot{\theta}$$

Considerando que $\bar{I} = \frac{1}{12}m[(2b)^2 + (2b)^2] = \frac{2}{3}mb^2$ e $W = mg$, obtemos

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b} \operatorname{sen} \theta = 0 \qquad (19.22)$$

Para oscilações de pequena amplitude, podemos substituir sen θ por θ, expresso em radianos, e escrever

$$\ddot{\theta} + \frac{3}{5}\frac{g}{b}\theta = 0 \qquad (19.23)$$

A comparação com (19.21) mostra que a equação obtida é a de um movimento harmônico simples e que a frequência natural circular ω_n das oscilações é igual a $(3g/5b)^{1/2}$. Substituindo em (19.13), encontramos que o período das oscilações é

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \qquad (19.24)$$

O resultado obtido é válido somente para oscilações de pequena amplitude. Uma descrição mais precisa do movimento da placa é obtida pela comparação das Eqs. (19.16) e (19.22). Observamos que as duas equações são idênticas se escolhermos l igual a $5b/3$. Isso significa que a placa oscilará como um pêndulo simples de comprimento $l = 5b/3$, e os resultados da Seção 19.4 podem ser utilizados para corrigir o valor do período dado em (19.24). O ponto A da placa localizado sobre a reta OG a uma distância $l = 5b/3$ de O é definido como o *centro de oscilação* correspondente a O (Fig. 19.5*a*).

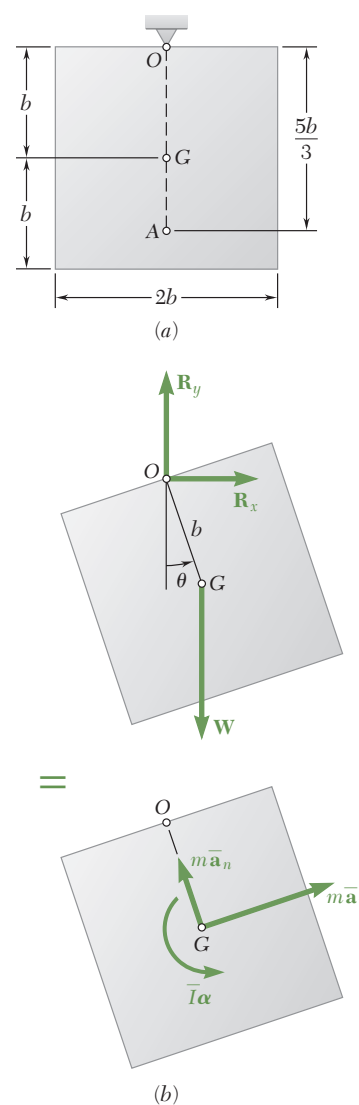
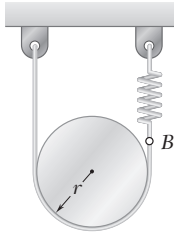



Figura 19.5

PROBLEMA RESOLVIDO 19.2

Um cilindro de peso W e raio r está suspenso por um laço de corda, conforme mostrado na figura. Uma extremidade da corda está presa diretamente a um suporte rígido, enquanto a outra extremidade está presa a uma mola de constante k. Determine o período e a frequência natural das vibrações do cilindro.

SOLUÇÃO

Cinemática do movimento. Expressamos o deslocamento linear e a aceleração do cilindro em função do deslocamento angular θ. Escolhendo o sentido horário como positivo e medindo os deslocamentos a partir da posição de equilíbrio, escrevemos

$$\bar{x} = r\theta \qquad \delta = 2\bar{x} = 2r\theta$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \ddot{\theta}\downarrow \qquad \bar{a} = r\alpha = r\ddot{\theta} \qquad \bar{\mathbf{a}} = r\ddot{\theta}\downarrow \tag{1}$$

Equações de movimento. O sistema de forças externas que atuam sobre o cilindro consiste no peso $\boldsymbol{W}$ e nas forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ exercidas pela corda. Expressamos que esse sistema é equivalente ao sistema de forças efetivas representado pelo vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ ligado a G e pelo binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$.

$$+\downarrow\Sigma M_A = \Sigma(M_A)_{\text{efet}}: \qquad Wr - T_2(2r) = m\bar{a}r + \bar{I}\alpha \tag{2}$$

Quando o cilindro está em sua posição de equilíbrio, a tração na corda é $T_0 = \frac{1}{2}W$. Verificamos que, para um deslocamento angular θ, a intensidade de $\mathbf{T}_2$ é

$$T_2 = T_0 + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k\delta = \tfrac{1}{2}W + k(2r\theta)$$

Substituindo (1) e (3) em (2) e lembrando que $\bar{I} = \frac{1}{2}mr^2$, escrevemos

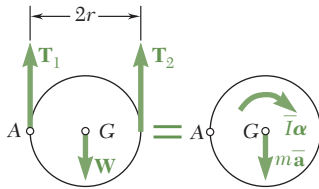
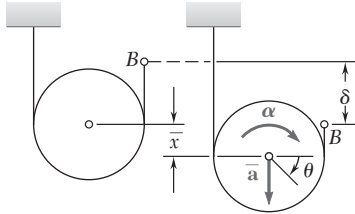
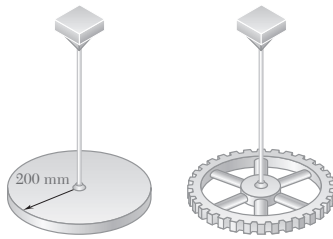
$$Wr - (\tfrac{1}{2}W + 2kr\theta)(2r) = m(r\ddot{\theta})r + \tfrac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{8}{3}\frac{k}{m}\theta = 0$$

Vemos que o movimento é harmônico simples, e temos

$$\omega_n^2 = \frac{8}{3}\frac{k}{m} \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{8}\frac{m}{k}} \quad \blacktriangleleft$$

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \qquad f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8}{3}\frac{k}{m}} \quad \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO 19.3

Um disco circular pesando 10 kg e de raio de 200 mm está suspenso por um arame como ilustrado na figura. O disco é girado (torcendo, portanto, o arame) e, em seguida, liberado; o período da vibração torcional é visto como sendo de 1,13 s. A seguir, uma engrenagem é então suspensa pelo mesmo arame e o período de vibração torcional é observado como de 1,93 s. Considerando que o momento do binário exercido pelo arame é proporcional ao ângulo de torção, determine (*a*) a constante de mola torcional do arame, (*b*) o momento de inércia centroidal da engrenagem, (*c*) a velocidade angular máxima alcançada pela engrenagem quando ela é girada em 90° e liberada.

SOLUÇÃO

a. Vibração do disco. Representando por θ o deslocamento angular do disco, expressamos que a intensidade do binário exercido pelo arame é $M = K\theta$, onde K é a constante da mola torcional do arame. Uma vez que esse binário deve ser equivalente ao binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$ que representa as forças efetivas do disco, escrevemos

$$+\circlearrowleft \Sigma M_O = \Sigma(M_O)_{\text{efet.}}: \qquad +K\theta = -\bar{I}\ddot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{K}{\bar{I}}\theta = 0$$

O movimento é, portanto, harmônico simples, e temos

$$\omega_n^2 = \frac{K}{\bar{I}} \qquad \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{K}} \qquad (1)$$

Para o disco, temos

$$\tau_n = 1{,}13 \text{ s} \qquad \bar{I} = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(10 \text{ kg})(0{,}2 \text{ m})^2 = 0{,}2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Substituindo em (1), obtemos

$$1{,}13 = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}2}{K}} \qquad K = 6{,}183 \text{ N}\cdot\text{m/rad} \quad ◄$$

b. Vibração da engrenagem. Como o período de vibração da engrenagem é de 1,93 s e $K = 6{,}183$ N · m/rad, a Eq (1) fornece

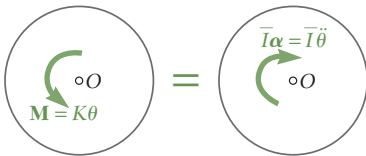
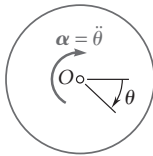
$$1{,}93 = 2\pi\sqrt{\frac{\bar{I}}{6{,}183}} \qquad \bar{I}_{\text{engr.}} = 0{,}583 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \quad ◄$$

c. Velocidade angular máxima da engrenagem. Como o movimento é harmônico simples, temos

$$\theta = \theta_m \operatorname{sen} \omega_n t \qquad \omega = \theta_m\omega_n \cos \omega_n t \qquad \omega_m = \theta_m\omega_n$$

Recordando que $\theta_m = 90° = 1{,}571$ rad e $\tau = 1{,}93$ s, escrevemos

$$\omega_m = \theta_m\omega_n = \theta_m\left(\frac{2\pi}{\tau}\right) = (1{,}571 \text{ rad})\left(\frac{2\pi}{1{,}93 \text{ s}}\right)$$

$$\omega_m = 5{,}11 \text{ rad/s}$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção você viu que um corpo rígido, ou um sistema de corpos rígidos, cuja posição pode ser definida por uma coordenada simples x ou θ, executará um movimento harmônico simples se a equação diferencial obtida pela aplicação da segunda Lei de Newton for da forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \tag{19.21}$$

Seu objetivo deve ser determinar ω_n a partir do qual pode obter o período τ_n e a frequência natural f_n. Levando em conta as condições iniciais, você pode então escrever uma equação da forma

$$x = x_m \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{19.10}$$

onde x deve ser substituído por θ se houver uma rotação envolvida. Para resolver os problemas desta seção, você deve seguir os seguintes passos:

1. Escolha uma coordenada que irá medir o deslocamento do corpo a partir de sua posição de equilíbrio. Você notará que muitos dos problemas aqui apresentados envolvem a rotação de um corpo em torno de um eixo fixo e que o ângulo que mede a rotação do corpo a partir da sua posição de equilíbrio é a coordenada mais conveniente para ser utilizada. Em problemas envolvendo o movimento plano geral de um corpo, onde a coordenada x (e possivelmente a coordenada y) é usada para definir a posição do centro de massa G do corpo e uma coordenada θ é utilizada para medir sua rotação em torno de G, encontre relações cinemáticas que lhe permitirão expressar x (e y) em termos de θ [Problema Resolvido 19.2].

2. Desenhe uma equação de diagrama de corpo livre para expressar que o sistema das forças externas é equivalente ao sistema de forças efetivas, que consiste no vetor $m\bar{\mathbf{a}}$ e no binário $\bar{I}\boldsymbol{\alpha}$, onde $\bar{a} = \ddot{x}$ e $\alpha = \ddot{\theta}$. Assegure-se de que cada força ou binário aplicado esteja desenhado em uma direção e um sentido coerentes com os deslocamentos considerados e que os sentidos de $\bar{\mathbf{a}}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ sejam, respectivamente, os sentidos de crescimento das coordenadas x e θ.

3. Escreva as equações diferenciais de movimento igualando as somas dos componentes das forças externas e efetivas nas direções x e y e as somas de seus momentos em relação a um ponto dado. Se necessário, utilize as relações cinemáticas desenvolvidas no passo l para obter equações envolvendo somente a coordenada θ. Se θ for um ângulo pequeno, substitua sen θ por θ e cos θ por 1, se essas funções aparecerem em suas equações. Ao eliminar todas as reações desconhecidas, você obterá uma equação do tipo das Eqs. (19.21). Observe que, em problemas envolvendo um corpo que gira em torno de um eixo fixo, você pode obter tal equação de maneira imediata igualando os momentos das forças externas e das forças efetivas em relação a esse eixo fixo.

4. Comparando a equação que obteve com uma das Eqs. (19.21), você pode identificar ω_n^2 e assim determinar a frequência natural circular ω_n. Lembre-se de que o objetivo da sua análise *não é resolver* a equação diferencial que você obteve, *mas sim identificar* ω_n^2.

5. Determine a amplitude e o ângulo de fase ϕ por meio da substituição do valor obtido para ω_n e dos valores iniciais da coordenada e de sua primeira derivada na Eq. (19.10) e na equação obtida pela diferenciação de (19.10) em relação a t. A partir Eq. (19.10) e das duas equações obtidas diferenciando (19.10) duas vezes em relação a t, e usando as relações cinemáticas desenvolvidas no passo 1, você será capaz de determinar a posição, a velocidade, e a aceleração de qualquer ponto do corpo em qualquer instante de tempo.

6. Em problemas envolvendo vibrações torcionais, a constante K da mola torcional é expressa em N · m/rad. O produto de K pelo ângulo de torção θ, expresso em radianos, resulta no momento restaurador, o qual deve ser igualado à soma de momentos das forças ou binários efetivos em relação ao eixo de rotação [Problema Resolvido 19.3].

PROBLEMAS

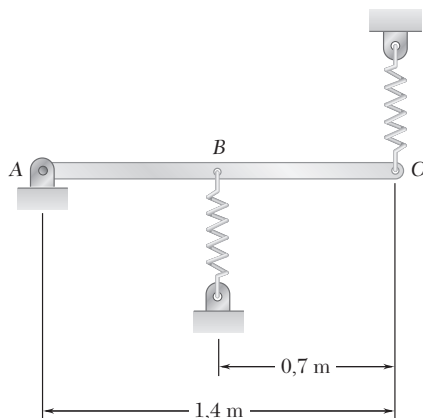



Figura P19.37

19.37 A barra uniforme *AC* de 5 kg está presa a molas com constantes $k = 500$ N/m em *B* e $k = 620$ N/m em *C*, que podem atuar em tração ou compressão. Se a extremidade *C* for ligeiramente abaixada e liberada, determine (*a*) a frequência de vibração, (*b*) a amplitude do movimento do ponto *C*, sabendo que a velocidade máxima desse ponto é de 0,9 m/s.

19.38 A barra uniforme mostrada na figura tem uma massa de 7,5 kg e está presa a uma mola de constante $k = 800$ N/m. Se a extremidade *B* da barra é abaixada 10 mm e liberada, determine (*a*) o período de vibração, (*b*) a máxima velocidade da extremidade *B*.

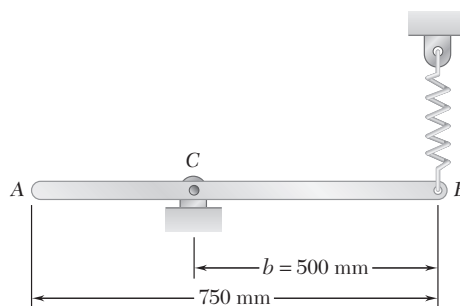



Figura P19.38

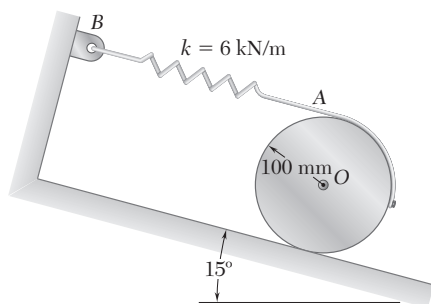



Figura P19.39

19.39 Um cilindro uniforme de 15 kg pode rolar sem deslizar em um plano inclinado de 15°. Uma esteira é presa ao aro do cilindro e uma mola mantém o cilindro em repouso na posição mostrada na figura. Se o centro do cilindro é movido 50 mm para baixo no plano inclinado e liberado, determine (*a*) o período de vibração, (*b*) a aceleração máxima do centro do cilindro.

19.40 Uma barra *AB* de 7,5 kg está aparafusada a um disco uniforme de 6 kg como mostrada na figura. Uma esteira é presa na borda do disco e uma mola que mantém a barra em repouso na posição mostrada na figura. Se a extremidade *A* da barra é movida 20 mm para baixo e liberada, determine (*a*) o período de vibrações, (*b*) a máxima velocidade da extremidade *A*.

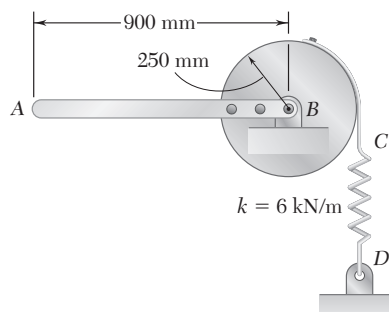



Figura P19.40

19.41 Uma barra uniforme AB de 8 kg está ligada a uma articulação em A e está presa por meio dos pinos B e C em um disco de 12 kg e raio de 400 mm. Uma mola presa em D mantém a barra em repouso na posição mostrada na figura. Se o ponto B é movido para baixo 25 mm e liberado, determine (*a*) o período de vibrações, (*b*) a máxima velocidade da extremidade B.

19.42 Resolva o Problema 19.41, considerando que o pino C é removido e que o disco pode girar livremente sobre o pino B.

Figura P19.41

19.43 Uma esteira é posta sobre a borda do aro de um volante de 240 kg e ligada, como mostra a figura, a duas molas cada uma de constante $k = 15$ kN/m. Se a extremidade C da esteira é puxada 40 mm para baixo e liberada, observa-se o período de vibração do volante de 0,5 s. Sabendo que a tração inicial na esteira é suficiente para impedir o deslizamento, determine (*a*) a velocidade angular máxima do volante, (*b*) o raio de giração centroidal do volante.

Figura P19.43

19.44 Um furo de raio 75 mm é cortado em um disco uniforme de raio 200 mm que está ligada a um pino sem atrito em seu centro geométrico O. Determine (*a*) o período de pequenas oscilações da placa, (*b*) o comprimento de um pêndulo simples que tem o mesmo período.

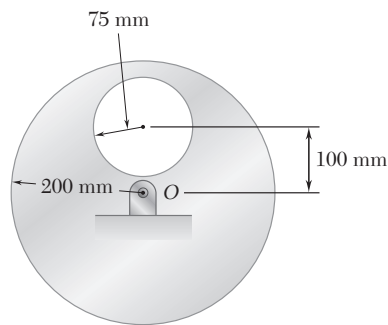
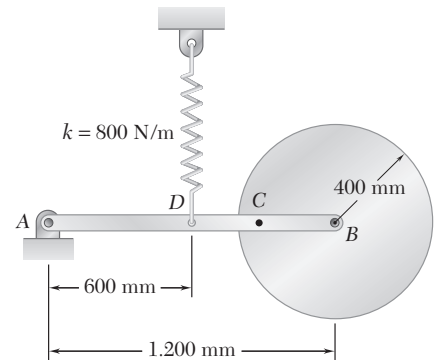
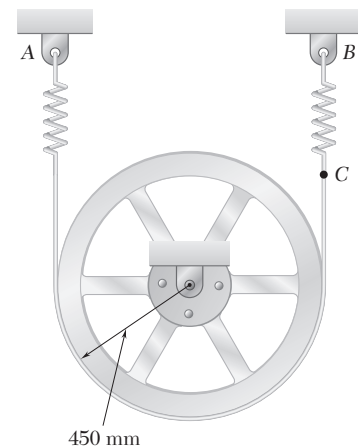



Figura P19.44

19.45 Dois pequenos pesos w são fixados em A e B no aro de um disco uniforme de raio r e peso W. Representando por τ_0 o período de pequenas oscilações quando $\beta = 0$, determine o ângulo β para o qual o período de pequenas oscilações é $2\tau_0$.

19.46 Dois pesos de massa 50 g cada são fixados em A e B no aro de um disco uniforme de 1,5 kg e de raio $r = 100$ mm. Determine a frequência de pequenas oscilações quando o ângulo $\beta = 60°$.

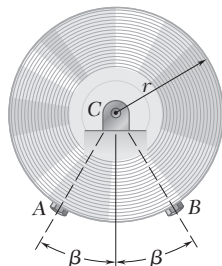



Figura P19.45 e P19.46

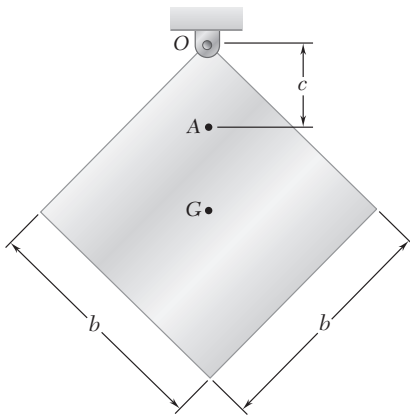



Figura P19.47

19.47 Para uma placa quadrada uniforme de lado $b = 300$ mm, determine (*a*) o período de pequenas oscilações se a placa é suspensa como mostrado na figura, (*b*) a distância c a partir de O até o ponto A para que a placa possa ser suspensa para que o período seja mínimo.

19.48 Uma biela é suportada por uma aresta pontiaguda no ponto A; o período de suas pequenas oscilações observado é 0,87 s. A biela é então invertida e suportada pela aresta pontiaguda no ponto B e o período de suas pequenas oscilações observado é 0,78 s. Sabendo que $r_a + r_b = 250$ mm, determine (*a*) a localização do centro de massa G, (*b*) o raio de giração centroidal $\bar{k}$.

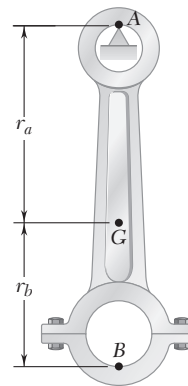



Figura P19.48

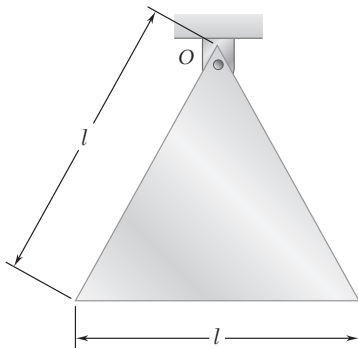



Figura P19.49

19.49 Para a placa triangular equilátera uniforme de lado $l = 300$ mm, determine o período de pequenas oscilações se a placa é suspensa por (*a*) um dos vértices, (*b*) o ponto médio de um dos seus lados.

19.50 Um disco uniforme de raio $r = 250$ mm é fixado em A a uma haste AB de 650 mm, de massa desprezível, que pode girar livremente em um plano vertical em torno de B. Determine o período de pequenas oscilações (*a*) se o disco é livre para girar em um mancal em A, (*b*) se a haste está rebitada ao disco em A.

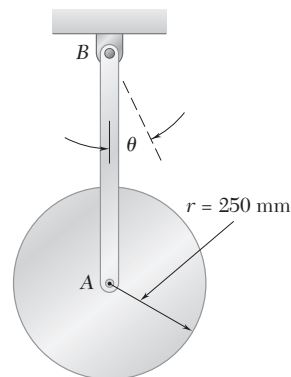



Figura P19.50

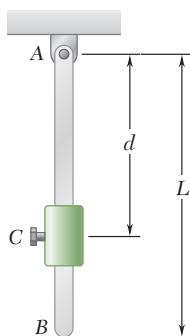



Figura P19.51

19.51 Um pequeno cursor de massa de 1 kg está rigidamente ligado a uma barra uniforme de 3 kg, de comprimento $L = 1$ m. Determine (*a*) a distância d para maximizar a frequência de oscilação quando é dado na barra um pequeno deslocamento inicial, (*b*) o correspondente período de oscilação.

19.52 Um *pêndulo composto* é definido como uma placa rígida que oscila em torno de um ponto fixo O, chamado de centro de suspensão. Mostre que o período de oscilação de um pêndulo composto é igual ao período de um pêndulo simples de comprimento OA, onde a distância de A para o centro de massa G é $GA = \bar{k}^2/\bar{r}$. O ponto A é definido como o centro de oscilação e coincide com o centro de percussão definido no Problema 17.66.

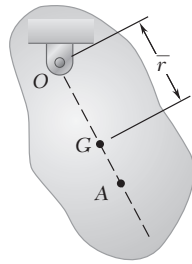



Figura P19.52 e P19.53

19.53 Uma placa rígida oscila em torno de um ponto fixo O. Mostre que o menor período de oscilação ocorre quando a distância $\bar{r}$ do ponto O para o centro de massa G é igual a $\bar{k}$.

19.54 Mostre que se o pêndulo composto do Problema 19.52 é suspenso do ponto A em vez de O, o período de oscilação é o mesmo que o anterior e que o novo centro de oscilação está localizado em O.

19.55 Uma barra uniforme AB de 8 kg está articulada em C e é presa em A a uma mola de constante $k = 500$ N/m. Se a extremidade A recebe um pequeno deslocamento e é liberada, determine (a) a frequência de pequenas oscilações, (b) o menor valor da constante de mola k para o qual a oscilação vai ocorrer.

Figura P19.55

19.56 Uma placa quadrada uniforme de 20 kg é suspensa de um pino localizado no ponto médio A de um dos seus lados de 0,4 m e está ligada a duas molas, cada uma de constante $k = 1,6$ kN/m. Se é dado um pequeno deslocamento no canto B e liberado, determine a frequência da vibração resultante. Considere que cada mola pode atuar em tração ou compressão.

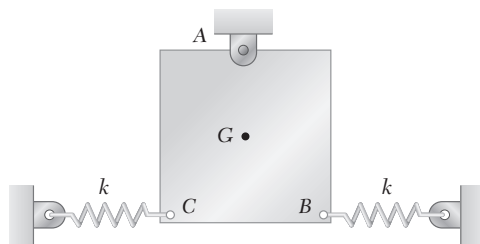



Figura P19.56

19.57 Duas hastes uniformes, cada uma de massa $m = 12$ kg e comprimento $L = 800$ mm, são soldadas juntas para formar a montagem mostrada na figura. Sabendo que a constante de cada mola é $k = 500$ N/m e que a extremidade A recebe um pequeno deslocamento e é liberada, determine a frequência do movimento resultante.

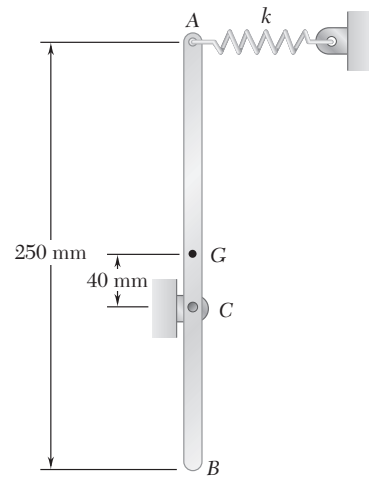
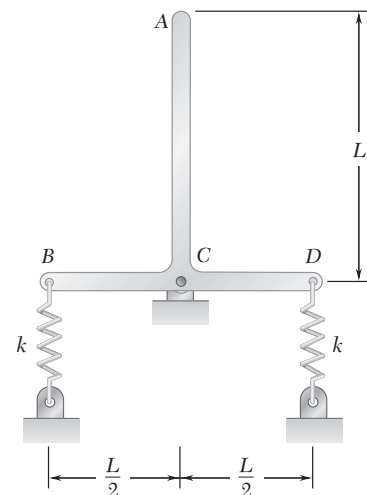



Figura P19.57

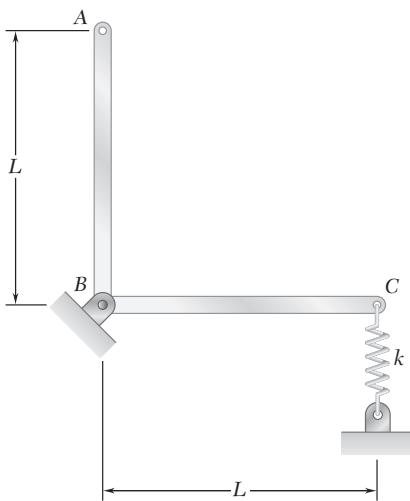



Figura P19.58

19.58 A barra ABC de massa total m é dobrada como mostrado na figura e é suportada no plano vertical pelo pino em B e pela mola de constante k em C. Se na extremidade C é dado um pequeno deslocamento e liberado, determine a frequência do movimento resultante em termos de m, L e k.

19.59 Um disco uniforme de raio $r = 250$ mm é ligado em A a uma barra AB de 650 mm, de massa desprezível, que pode girar livremente em um plano vertical em torno de B. Se a barra é deslocada em 2° da posição mostrada na figura e liberada, determine a intensidade da frequência natural, considerando que o disco (*a*) é livre para girar em um mancal em A, (*b*) está rebitado à barra em A.

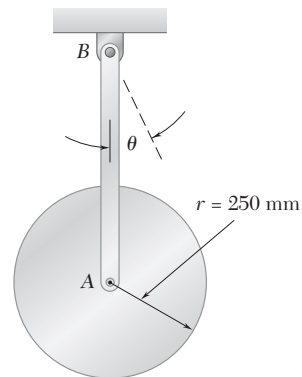



Figura P19.59

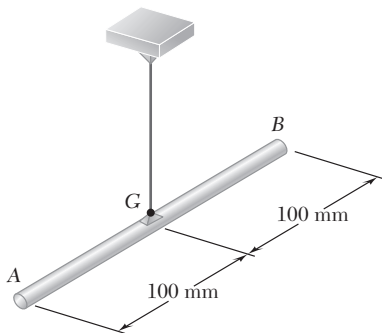



Figura *P19.60*

19.60 Uma haste delgada de 3 kg é suspensa por um fio de aço que é sabido ter uma constante de mola torcional $K = 2{,}25$ N · m/rad. Se a haste é girada 180° sobre o eixo vertical e liberada, determine (*a*) o período de oscilação, (*b*) a máxima velocidade da extremidade A da barra.

19.61 Um fio homogêneo dobrado para formar a figura mostrada está ligado ao pino do suporte em A. Sabendo que $r = 220$ mm e que o ponto B é empurrado para baixo 20 mm e liberado, determine a intensidade da velocidade de B 8 s depois.

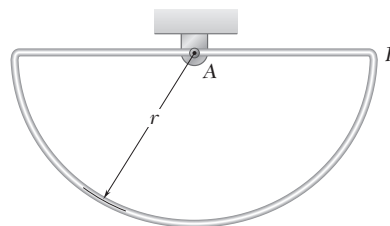



Figura P19.61 e *P19.62*

19.62 Um fio homogêneo dobrado para formar a figura mostrada está ligado ao pino do suporte em A. Sabendo que $r = 400$ mm e que o ponto B é empurrado para baixo 40 mm e liberado, determine a intensidade da aceleração de B 10 s depois.

19.63 Um disco uniforme de raio $r = 120$ mm tem seu centro soldado a duas barras elásticas de igual comprimento com extremidades A e B engastadas. Sabendo que o disco gira em um ângulo de 8° quando um binário de 0,5 N · m é aplicado ao disco e que o mesmo oscila com um período de 1,3 s quando o binário é removido, determine (a) a massa do disco, (b) o período de vibração se uma das barras for removida.

Figura P19.63

19.64 Uma barra uniforme CD de 5 kg e de comprimento $l = 0{,}75$ m está soldada em C a duas barras elásticas, que têm as extremidades A e B engastadas e uma constante de mola torcional combinada de $K = 30$ N · m/rad. Determine o período para pequenas oscilações, se a posição de equilíbrio de CD é (a) vertical, como mostra a figura, (b) horizontal.

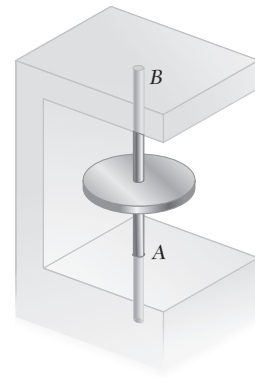
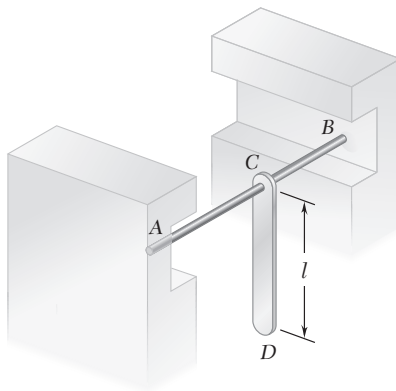



Figura P19.64

19.65 Uma placa uniforme de 1,8 kg na forma de um triangulo equilátero é suspensa em seu centro de gravidade por um fio de aço que é sabido ter uma constante de mola torcional $K = 0{,}035$ N · m/rad. Se a placa é girada 360° sobre o eixo vertical e então liberada, determine (a) o período de oscilação, (b) a máxima velocidade de um dos vértices do triângulo.

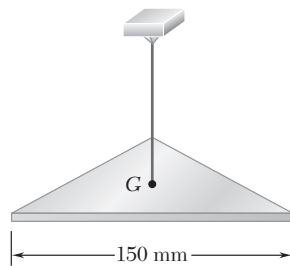



Figura P19.65

19.66 Uma plataforma horizontal P é suspensa por meio de diversas barras rígidas que estão conectadas a um arame vertical. Sabe-se que o período de oscilação da plataforma é de 2,2 s quando a plataforma está vazia e de 3,8 s quando um objeto A com momento de inércia uniforme é colocado sobre a plataforma com seu centro de massa diretamente sobre o centro de massa da placa. Sabendo que o arame tem uma constante de mola torcional $K = 30$ N · m/rad, determine o momento de inércia em torno do centro de massa do objeto A.

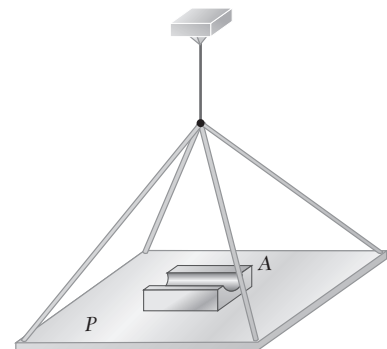
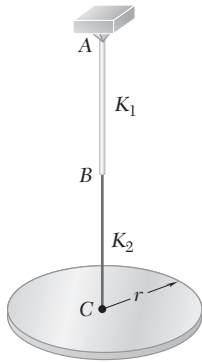



Figura P19.66

19.67 Uma placa fina retangular de lados a e b é suspensa por quatro arames verticais de mesmo comprimento l. Determine o período das pequenas oscilações da placa quando (a) ela é girada em um pequeno ângulo em torno do eixo vertical que passa por seu centro de massa G, (b) ela sofre um pequeno deslocamento horizontal em uma direção perpendicular a AB (c) ela sofre um pequeno deslocamento horizontal em uma direção perpendicular a BC.

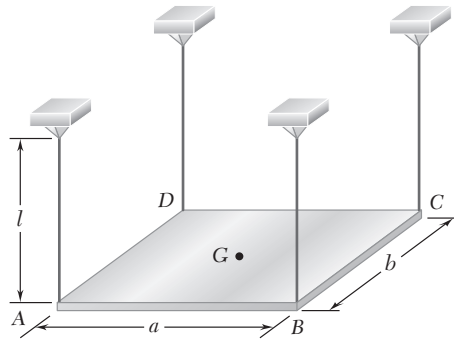



Figura P19.67

Figura P19.68

19.68 Um disco circular de raio $r = 0{,}8$ m é suspenso pelo seu centro C por meio dos arames AB e BC unidos por solda no ponto B. As constantes de mola torcional dos arames são $K_1 = 100$ N · m/rad para AB e $K_2 = 50$ N · m/rad para BC. Se o período de oscilação é 0,5 s torno do eixo AC, determine a massa do disco.

19.6 Aplicação do princípio de conservação de energia

Vimos na Seção 19.2 que, quando uma partícula de massa m está em movimento harmônico simples, a resultante $\mathbf{F}$ das forças exercidas sobre a partícula tem uma intensidade proporcional ao deslocamento x medido a partir da posição de equilíbrio O e está dirigida na direção de O; escrevemos $F = -kx$. Voltando à Seção 13.6, observamos que $\mathbf{F}$ é uma *força conservativa* e que a correspondente energia potencial é $V = \frac{1}{2}kx^2$, onde V é considerado igual a zero na posição de equilíbrio $x = 0$. Uma vez que a velocidade da partícula é igual a $\dot{x}$, sua energia cinética é $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ e podemos expressar que a energia total da partícula se conserva escrevendo

$$T + V = \text{constante} \qquad \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = \text{constante}$$

Dividindo a equação por $m/2$ e recordando da Seção 19.2 que $k/m = \omega_n^2$, onde ω_n é a frequência natural circular da vibração, temos

$$\dot{x}^2 + \omega_n^2 x^2 = \text{constante} \qquad (19.25)$$

A Eq. (19.25) é característica de um movimento harmônico simples, pois ela pode ser obtida a partir da Eq. (19.6) multiplicando-se ambos os termos por $2\dot{x}$ e integrando.

O princípio da conservação de energia fornece um caminho conveniente para a determinação do período de vibração de um corpo rígido ou de um sistema de corpos rígidos que possuem um único grau de liberdade, uma vez que tenha sido estabelecido que o movimento do sistema é um movimento harmônico simples ou que possa ser aproximado por um movimento harmônico simples. Escolhendo uma variável apropriada, tal como uma distância x ou um ângulo θ, consideremos duas posições particulares do sistema:

1. *O deslocamento do sistema é máximo*; temos $T_1 = 0$ e V_1 pode ser expresso em termos da amplitude x_m ou θ_m (escolhendo $V = 0$ na posição de equilíbrio).
2. *O sistema passa por sua posição de equilíbrio*; temos $V_2 = 0$ e T_2 pode ser expresso em função da velocidade máxima $\dot{x}_m$ ou da velocidade angular máxima $\dot{\theta}_m$.

Expressamos então que a energia total do sistema é conservada e escrevemos $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$. Recordando de (19.15) que, para o movimento harmônico simples, a velocidade máxima é igual ao produto da amplitude pela frequência natural circular ω_n, encontramos que a equação obtida pode ser resolvida para ω_n.

Como um exemplo, consideremos novamente a placa quadrada tratada na Seção 19.5. Na posição de deslocamento máximo (Fig. 19.6*a*), temos

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = W(b - b\cos\theta_m) = Wb(1 - \cos\theta_m)^*$$

ou, como $1 - \cos\theta_m = 2\,\text{sen}^2(\theta_m/2) \approx 2(\theta_m/2)^2 = \theta_m^2/2$ para oscilações de pequena amplitude,

$$T_1 = 0 \qquad V_1 = \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 \tag{19.26}$$

Quando a placa passa por sua posição de equilíbrio (Fig. 19.6*b*), sua velocidade é máxima e temos

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2 = \tfrac{1}{2}mb^2\dot{\theta}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0$$

ou, recordando da Seção 19.5 que $\bar{I} = \frac{2}{3}mb^2$,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\dot{\theta}_m^2 \qquad V_2 = 0 \tag{19.27}$$

Substituindo (19.26) e (19.27) em $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ e observando que a velocidade máxima $\dot{\theta}_m$ é igual ao produto $\theta_m\omega_m$ e ω = mg, escrevemos

$$\tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{5}{3}mb^2)\theta_m^2\omega_n^2 \tag{19.28}$$

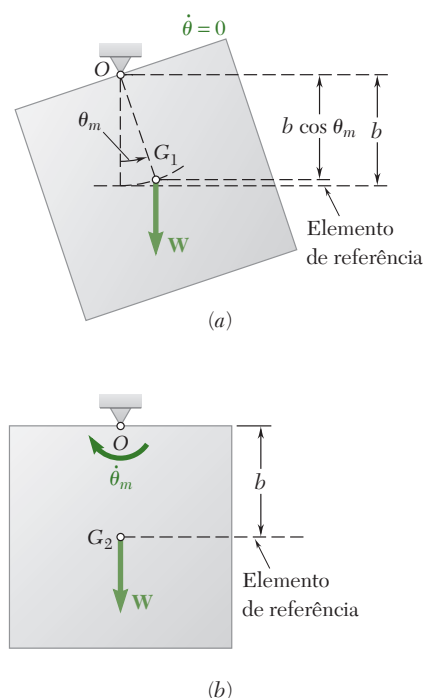
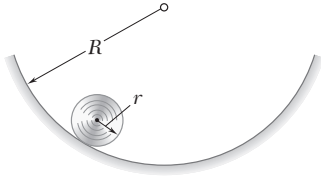
que produz $\omega_n^2 = 3g/5b$ e

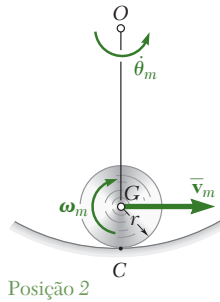
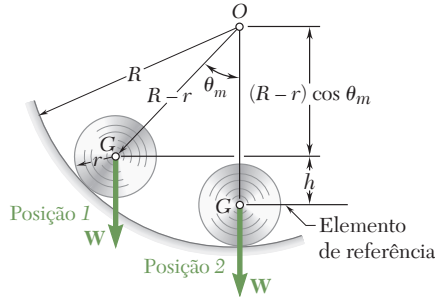
$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{5b}{3g}} \tag{19.29}$$

como previamente obtido.

Figura 19.6

---

* Note que não devemos substituir $\cos\theta_m \approx 1$ pelo menor valor de θ_m porque a equação principal (19.25) contém o termo x^2. Dessa forma, elevamos a aproximação do deslocamento mínimo a uma ordem de grandeza de pelo menos igual ao quadrado do deslocamento, neste caso θ_m^2.

PROBLEMA RESOLVIDO 19.4

Determine o período de pequenas oscilações de um cilindro de raio r que rola sem deslizar no interior de uma superfície curva de raio R.

SOLUÇÃO

Representamos por θ o ângulo que a reta OG forma com a vertical. Como o cilindro rola sem deslizar, podemos aplicar o princípio de conservação da energia entre a posição *1*, onde $\theta = \theta_m$, e a posição *2*, onde $\theta = 0$.

Posição 1

Energia cinética. Como a velocidade do cilindro é zero, $T_1 = 0$.

Energia potencial. Escolhendo uma referência como mostrado na figura e representando por W o peso do cilindro, temos

$$V_1 = Wh = W(R - r)(1 - \cos\theta)$$

Verificando que para pequenas oscilações $(1 - \cos\theta) = 2\,\text{sen}^2\,(\theta/2) \approx \theta^2/2$, temos

$$V_1 = W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2}$$

Posição 2. Representando por $\dot\theta_m$ a velocidade angular da reta OG quando o cilindro passa pela posição *2* e observando que o ponto C é o centro instantâneo de rotação do cilindro, escrevemos

$$\bar v_m = (R - r)\dot\theta_m \qquad \omega_m = \frac{\bar v_m}{r} = \frac{R - r}{r}\dot\theta_m$$

Energia cinética

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m\bar v_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar I\omega_m^2 \\ &= \tfrac{1}{2}m(R - r)^2\dot\theta_m^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2)\left(\frac{R - r}{r}\right)^2\dot\theta_m^2 \\ &= \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot\theta_m^2 \end{aligned}$$

Energia potencial

$$V_2 = 0$$

Conservação de energia

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + W(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2\dot\theta_m^2 + 0$$

Como $\dot\theta_m = \omega_n\theta_m$ e $W = mg$, escrevemos

$$mg(R - r)\frac{\theta_m^2}{2} = \tfrac{3}{4}m(R - r)^2(\omega_n\theta_m)^2 \qquad \omega_n^2 = \frac{2}{3}\frac{g}{R - r}$$

$$\tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad \tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{3}{2}\frac{R - r}{g}} \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nos problemas que se seguem você será solicitado a usar o *princípio de conservação de energia* para determinar o período ou a frequência natural de um movimento harmônico simples de uma partícula ou corpo rígido. Considerando que você escolha um ângulo θ para definir a posição do sistema (com $\theta = 0$ na posição de equilíbrio), como fará na maioria dos problemas desta seção, você vai expressar que a energia total de um sistema é conservada, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre a posição 1 de deslocamento máximo ($\theta_1 = \theta_m$, $\dot{\theta}_1 = 0$) e a posição 2 de velocidade máxima ($\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_m$, $\theta_2 = 0$). Segue-se que T_1 e V_2 serão ambos iguais a zero, e a equação de energia vai se reduzir a $V_1 = T_2$, onde V_1 e T_2 são expressões quadráticas homogêneas em θ_m e $\dot{\theta}_m$, respectivamente. Recordando que, para um movimento harmônico simples, $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$ e substituindo esse produto na equação de energia, você vai obter, depois da redução, uma equação que pode ser resolvida para ω_n^2. Uma vez que você tenha determinado a frequência natural circular ω_n, poderá obter o período τ_n e a frequência natural f_n da vibração.

Os passos que você deve adotar são os seguintes:

1. Calcule a energia potencial V_1 do sistema na sua posição de deslocamento máximo. Desenhe um esboço do sistema na sua posição de deslocamento máximo e expresse a energia potencial de todas as forças envolvidas (tanto internas como externas) em termos do deslocamento máximo x_m ou θ_m.

a. A energia potencial associada ao peso W de um corpo é $V_g = Wy$, onde y é a elevação do centro de gravidade G do corpo acima da sua posição de equilíbrio. Se o problema que você está resolvendo envolve a oscilação de um corpo rígido em torno de um eixo horizontal por meio do ponto O, localizado a uma distância b de G (Fig. 19.6), expresse y em termos do ângulo θ que a linha OG forma com a vertical: $y = b(1 - \cos\theta)$. Mas, para valores pequenos de θ, você pode substituir esta expressão por $y = 1/2b\theta^2$ [Problema Resolvido 19.4]. Portanto, quando θ alcança seu valor máximo θ_m, e para oscilações de pequena amplitude, você pode expressar V_g como

$$V_g = \tfrac{1}{2}Wb\theta_m^2$$

Observe que *se G está localizado acima de O* em sua posição de equilíbrio (em vez de abaixo de O, como temos considerado), o deslocamento vertical y será negativo e deve ser aproximado por $y = -1/2b\theta^2$, o que vai resultar em um valor negativo para V_g. Na ausência de outras forças, a posição de equilíbrio será instável e o sistema não vai oscilar. (Veja, por exemplo, o Problema 19.91.)

b. A energia potencial associada à força elástica exercida por uma mola é $V_e = \frac{1}{2}kx^2$, onde k é a constante da mola e x sua deflexão. Em problemas envolvendo a rotação de um corpo em torno de um eixo, você geralmente vai ter $x = a\theta$ onde a é a distância do eixo de rotação

(*continua*)

ao ponto do corpo onde a mola está presa e onde θ é o ângulo de rotação. Portanto, quando x alcança seu valor máximo x_m e θ alcança seu valor máximo θ_m, você pode expressar V_e como

$$V_e = \tfrac{1}{2}kx_m^2 = \tfrac{1}{2}ka^2\theta_m^2$$

c. A energia potencial V_1 do sistema em sua posição de deslocamento máximo é obtida pela adição de várias energias potenciais que você tenha calculado. Ela será igual ao produto de uma constante e θ_m^2.

2. Calcule a energia cinética T_2 do sistema em sua posição de velocidade máxima. Observe que essa posição é também a posição de equilíbrio do sistema.

a. Se o sistema consiste de um único corpo rígido, a energia cinética T_2 do sistema será a soma da energia cinética associada ao movimento do centro de massa G do corpo e a energia cinética associada com a rotação do corpo em torno de G. Você vai escrever, portanto,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m\bar{v}_m^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega_m^2$$

Considerando que a posição do corpo tenha sido definida por um ângulo θ, expresse $\bar{v}_m$ e ω_m em termos da taxa de variação $\dot{\theta}_m$ de θ quando o corpo passa por sua posição de equilíbrio. A energia cinética do corpo será, assim, expressa como o produto de uma constante e $\dot{\theta}_m^2$. Observe que se θ mede a rotação do corpo em torno de seu centro de massa, como foi o caso para a placa da Fig. 19.6, então $\omega_m = \dot{\theta}_m$. Em outros casos, entretanto, a cinemática do movimento deveria ser usada para deduzir uma relação entre ω_m e $\dot{\theta}_m$ [Problema Resolvido 19.4].

b. Se o sistema consiste de vários corpos rígidos, repita os cálculos anteriores para cada um dos corpos, usando a mesma coordenada θ, e some o resultado obtido.

3. Iguale a energia potencial V_1 do sistema à sua energia cinética T_2,

$$V_1 = T_2$$

e, recordando a primeira das Eqs. (19.15), substitua $\dot{\theta}_m$ no primeiro membro pelo produto da amplitude θ_m e da frequência circular ω_n. Como ambos os termos contêm agora o fator θ_m^2, esse fator pode ser cancelado e a equação resultante pode ser resolvida pela frequência circular ω_n.

PROBLEMAS

Todos os problemas devem ser resolvidos usando o método da Seção 19.6.

19.69 Determine o período de pequenas oscilações de uma pequena partícula que se move sem atrito dentro de uma superfície cilíndrica de raio R.

Figura P19.69

19.70 Uma esfera A de 400 g e uma esfera C de 300 g estão ligadas às extremidades de uma barra AC de massa desprezível que pode girar em um plano vertical em torno de um eixo em B. Determine o período de pequenas oscilações da barra.

Figura P19.70

19.71 Um cursor A de 1,8 kg é preso a uma mola de constante 800 N/m e pode deslizar sem atrito na barra horizontal. Se o cursor é movido 70 mm para a esquerda de sua posição de equilíbrio e liberado, determine a máxima velocidade e a máxima aceleração do cursor durante o movimento resultante.

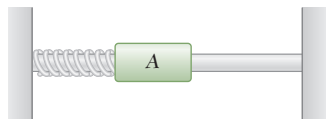



Figura P19.71 e P19.72

19.72 Um cursor A de 1,5 kg é preso a uma mola de constante 1 kN/m e pode deslizar sem atrito na barra horizontal. O cursor está em repouso quando é golpeado com uma marreta e atinge uma velocidade inicial de 1 m/s. Determine a amplitude do movimento resultante e a máxima aceleração do cursor.

19.73 Uma barra AB uniforme pode girar em um plano vertical em torno de um eixo horizontal em C localizado a uma distância c acima do centro de massa G da barra. Para pequenas oscilações, determine o valor de c para o qual a frequência do movimento será máxima.

Figura P19.73

19.74 Um arame homogêneo de comprimento $2l$ é dobrado como mostrado na figura e pode oscilar sobre o pino B sem atrito. Indicando por τ_0 o período de pequenas oscilações quando $\beta = 0$, determine o ângulo β para o qual o período de pequenas oscilações é $2\tau_0$.

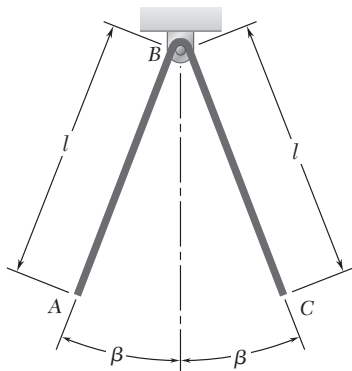



Figura P19.74

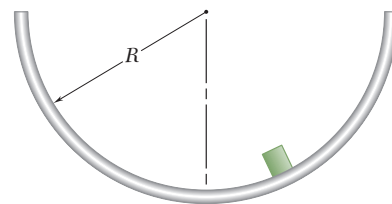
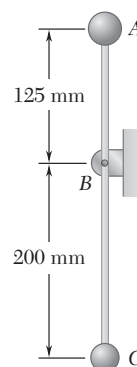
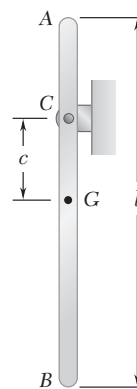
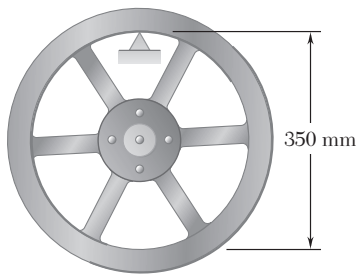
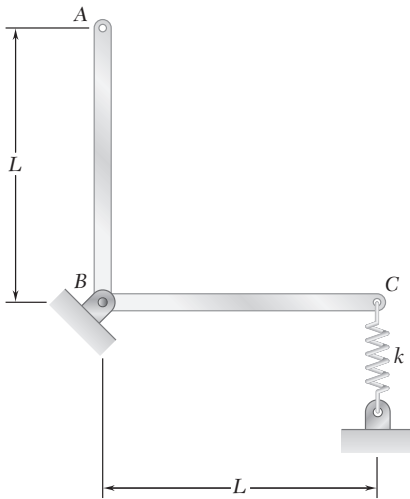
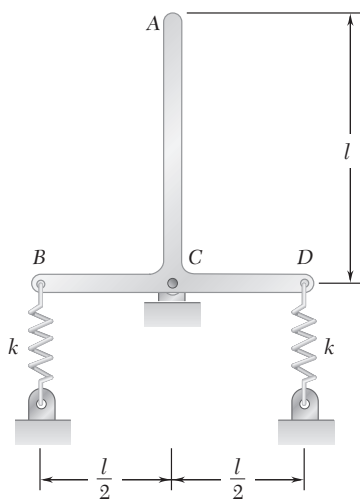



Figura *P19.75*

19.75 O aro interior de um volante de 40 kg é colocado sobre uma aresta pontiaguda e o período de suas pequenas oscilações encontrado é de 1,26 s. Determine o momento de inércia centroidal do volante.

19.76 Uma biela é suportada por uma aresta pontiaguda no ponto *A*; o período de suas pequenas oscilações observado é de 1,03 s. Sabendo que r_a é 150 mm, determine o raio de giração centroidal da biela.

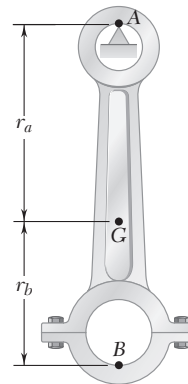



Figura P19.76

Figura P19.77

19.77 A barra *ABC* de massa total *m* é dobrada como mostrado na figura e é suportada no plano vertical pelo pino em *B* e pela mola de constante *k* em *C*. Se na extremidade *C* é dado um pequeno deslocamento e liberado, determine a frequência do movimento resultante em termos de *m*, *L* e *k*.

19.78 Um cilindro uniforme de 7,5 kg pode rolar sem deslizar em um plano inclinado e está ligado a uma mola *AB* como mostrado na figura. Se o centro do cilindro é movido em 10 mm descendo no plano inclinado e liberado, determine (*a*) o período de vibração, (*b*) a velocidade máxima do centro do cilindro.

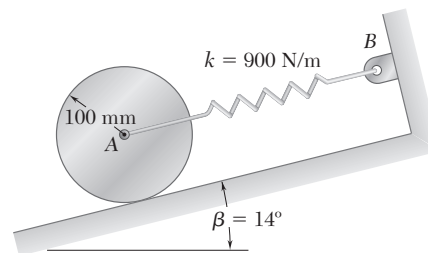



Figura P19.78

Figura P19.79

19.79 Duas barras uniformes, cada uma de massa $m = 600$ g e comprimento $l = 200$ mm, estão unidas por solda para formar a montagem mostrada na figura. Sabendo que a constante de cada mola é $k = 120$ N/m e que a extremidade *A* sofre um pequeno deslocamento e é liberada, determine a frequência do movimento resultante.

19.80 Uma barra delgada *AB* de 8 kg e comprimento $l = 600$ mm está ligada a dois cursores de massa desprezível. O cursor *A* está ligado a uma mola de constante $k = 1,2$ kN/m e pode deslizar em uma barra

vertical, enquanto o cursor B pode deslizar livremente em uma barra horizontal. Sabendo que o sistema está em equilíbrio e que $\theta = 40°$, determine o período de vibração se o cursor B recebe um pequeno deslocamento e é liberado.

Figura P19.80 e *P19.81*

19.81 Uma barra delgada AB de comprimento $l = 600$ mm e massa desprezível está ligada a dois cursores de 8 kg cada. O cursor A está ligado a uma mola de constante $k = 1{,}2$ kN/m e pode deslizar em uma barra vertical, enquanto o cursor B pode deslizar livremente em uma barra horizontal. Sabendo que o sistema está em equilíbrio e que $\theta = 40°$, determine o período de vibração se ao cursor A recebe um pequeno deslocamento e é liberado.

19.82 Uma barra delgada AB de 3 kg está aparafusada a um disco uniforme de 5 kg. Uma mola de constante 280 N/m está ligada ao disco e deformada na posição mostrada na figura. Se a extremidade B da barra recebe um pequeno deslocamento e é liberada, determine o período de vibração do sistema.

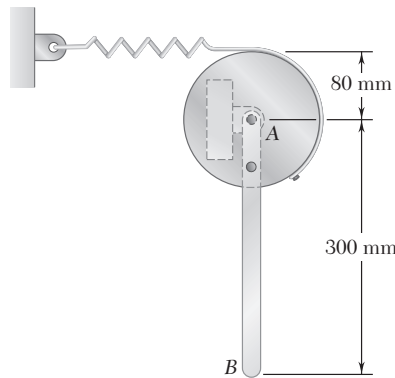



Figura *P19.82*

19.83 Uma esfera A de 400 g e uma esfera C de 300 g estão ligadas às extremidades de uma barra AC de 600 g que pode rodar em um plano vertical em torno de um eixo em B. Determine o período de pequenas oscilações da barra.

Figura P19.83

19.84 Três barras idênticas são ligadas como mostra a figura. Se $b = \frac{3}{4}l$, determine a frequência das pequenas oscilações do sistema.

Figura P19.84

19.85 Uma barra AB de 800 g está aparafusada a um disco de 1,2 kg. Uma mola de constante $k = 12$ N/m é presa ao centro do disco em A e na parede em C. Sabendo que o disco gira sem escorregar, determine o período das pequenas oscilações do sistema.

Figura P19.85

19.86 e 19.87 Duas barras uniformes AB e CD cada uma de comprimento l e massa m estão ligadas a engrenagens como mostrado na figura. Sabendo que a massa da engrenagem C é m e que a massa da engrenagem A é $4m$, determine o período de pequenas oscilações do sistema.

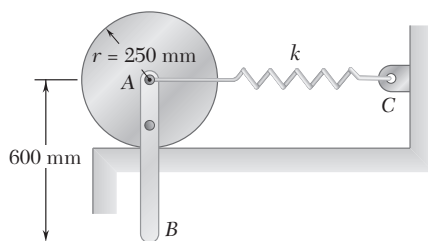
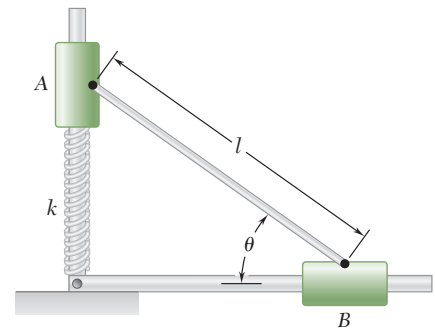
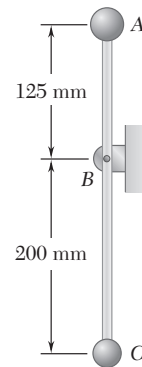
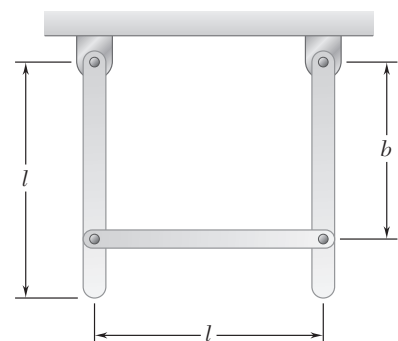
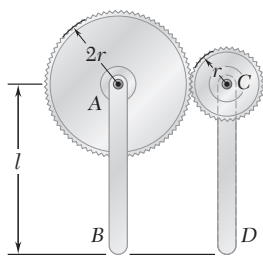



Figura P19.86

Figura P19.87

19.88 Uma barra uniforme CD de 5 kg é soldada em C a um eixo de massa desprezível que está soldado aos centros de dois discos uniformes A e B de 10 kg. Sabendo que os discos rolam sem deslizar, determine o período de pequenas oscilações do sistema.

Figura P19.88

19.89 Quatro barras de massa m e de igual comprimento l são ligadas pelos pinos A, B, C e D e podem mover-se no eixo do plano horizontal. As barras são ligadas a quatro molas de mesma constante k e estão em equilíbrio na posição mostrada na figura ($\theta = 45°$). Determine o período de vibração se os cantos A e C recebem pequenos deslocamentos iguais de um lado para o outro.

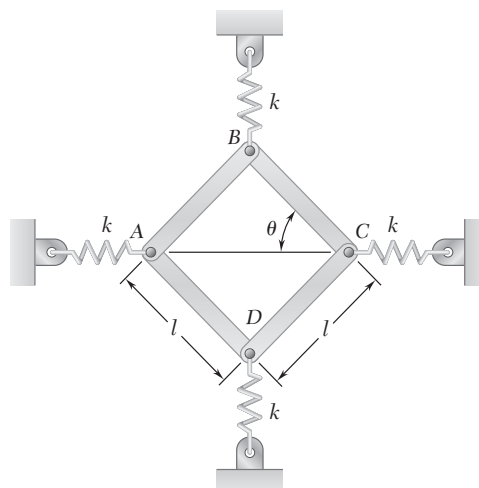



Figura P19.89

19.90 A barra AB de 10 kg é presa a dois discos de 4 kg como mostra a figura. Sabendo que os discos rolam sem deslizar, determine a frequência de pequenas oscilações do sistema.

Figura P19.90

19.91 Um pêndulo invertido constituído de uma esfera de peso W e uma barra rígida ABC de comprimento l e peso desprezível é suportado por um pino e suporte em C. A mola de constante k está ligada a uma barra em B e não está deformada quando a barra está na posição vertical mostrada na figura. Determine (a) a frequência de pequenas oscilações, (b) o menor valor de a para o qual ocorrerão oscilações.

Figura P19.91 e P19.92

19.92 Para o pêndulo invertido do Problema 19.91 e para os valores dados de k, a e l, observa-se que $f = 1{,}5$ Hz quando $m = 1$ kg e que $f = 0{,}8$ Hz quando $m = 2$ kg. Determine o maior valor de m para o qual as pequenas oscilações ocorrerão.

19.93 Uma barra uniforme de comprimento L é suportada por um suporte esférico em A e por um fio vertical CD. Deduza uma expressão para o período de oscilação da barra se a extremidade B recebe um pequeno deslocamento no plano horizontal e então é liberado.

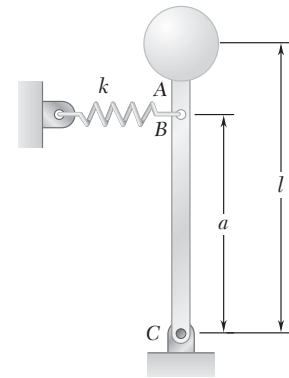
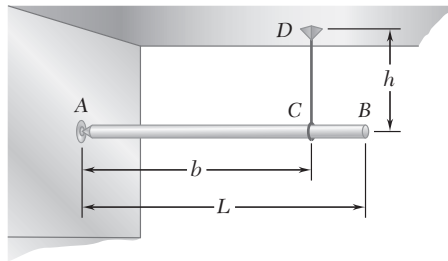



Figura *P19.93*

19.94 Uma barra uniforme ABC de 2 kg é sustentada por um pino em B e está ligada a uma mola em C. A barra está unida em A a um bloco DE de 2 kg que está ligado a uma mola e pode rodar sem atrito. Sabendo que cada mola pode atuar em tração ou compressão, determine a frequência de pequenas oscilações do sistema quando a barra é girada por meio de um pequeno ângulo e liberada.

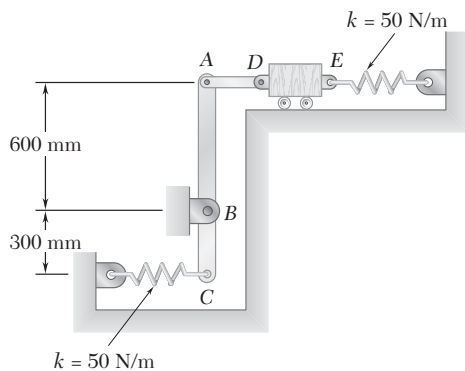



Figura P19.94

19.95 Um braço uniforme ABC de 750 g é sustentada por um pino em B e está ligada a uma mola em A. O braço está unido em C a uma massa m de 1,5 kg que está ligado a uma mola. Sabendo que cada mola pode atuar em tração ou compressão, determine a frequência de pequenas oscilações do sistema quando o peso recebe um pequeno deslocamento vertical e é liberado.

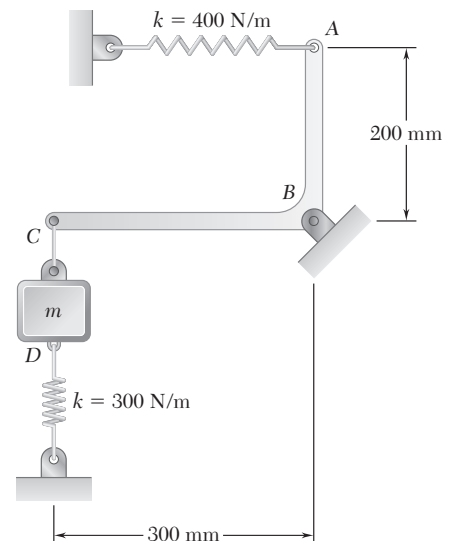



Figura *P19.95*

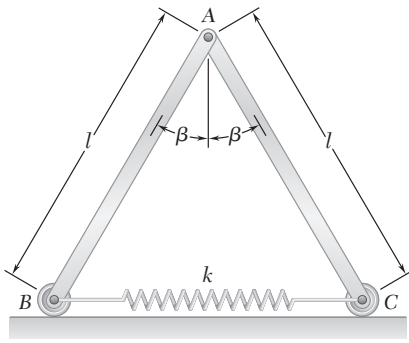



Figura P19.96

***19.96** As barras uniformes AB e AC, cada uma com massa m e comprimento l, são parafusadas juntas em A e conectadas por pinos em pequenos roletes em B e C. Uma mola de constante k é presa aos pinos em B e C e observa-se que o sistema está equilíbrio quando cada barra forma um ângulo β com a vertical. Determine o período de pequenas oscilações quando o ponto A recebe uma pequena deflexão para baixo e é liberado.

***19.97** Quando um corpo submerso se move em um fluido, as partículas deste fluido circulam em torno do corpo e adquirem energia cinética. No caso de uma esfera movendo-se em um fluido ideal, a energia cinética total adquirida pelo fluido é $\frac{1}{4}\rho V v^2$, onde ρ é o peso específico do fluido, V é o volume da esfera e v é a velocidade da esfera. Considere uma cápsula esférica oca de 500 g e raio de 80 mm que é mantida submersa em um tanque de água por uma mola de constante 500 N/m. (*a*) Desprezando o atrito do fluido, determine o período de vibração da cápsula quando ela é deslocada verticalmente e então liberada. (*b*) Resolva a parte *a* considerando que o tanque é acelerado para cima à taxa constante de 8 m/s^2.

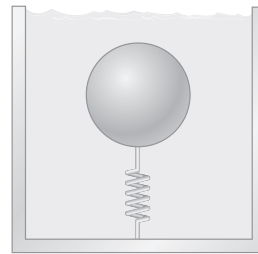



Figura P19.97

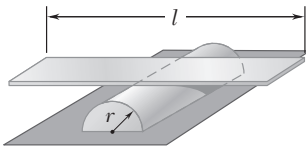
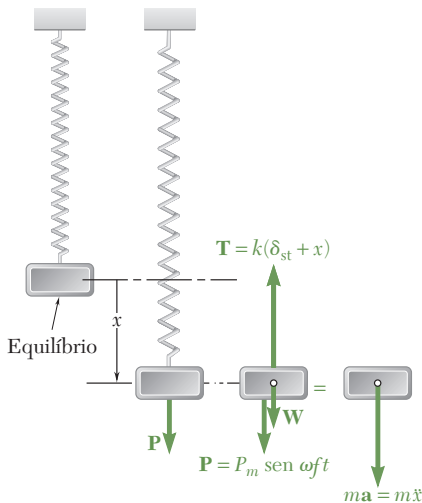



Figura P19.98

***19.98** Uma placa fina de comprimento l repousa sobre um semicilindro de raio r. Deduza uma expressão para o período de pequenas oscilações da placa.

19.7 Vibrações forçadas

As vibrações mais importantes do ponto de vista de aplicações da engenharia são as *vibrações forçadas* de um sistema. Essas vibrações ocorrem quando um sistema está sujeito a uma força periódica ou quando ele está elasticamente conectado a um suporte que tem um movimento alternado.

Considere primeiramente o caso de um corpo de massa m suspenso por uma mola e sujeito a uma força periódica $\mathbf{P}$ de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$, onde ω_f é a frequência circular de $\mathbf{P}$ e é referenciada como a *frequência forçada circular* do movimento (Fig. 19.7). Essa força pode ser uma força real externa aplicada ao corpo, ou pode ser uma força centrífuga produzida pela rotação de alguma parte desbalanceada do corpo (veja o Problema Resolvido 19.5). Representando por x o deslocamento do corpo medido a partir de sua posição de equilíbrio, escrevemos a equação de movimento

Figura 19.7

$$+\downarrow\Sigma F = ma: \qquad P_m \text{ sen } \omega_f t + W - k(\delta_{est} + x) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, temos

$$m\ddot{x} + kx = P_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.30}$$

A seguir, consideramos o caso de um corpo de massa m suspenso por uma mola ligada a um suporte móvel cujo deslocamento δ é igual a δ_m sen $\omega_f t$ (Fig. 19.8). Medindo o deslocamento x do corpo a partir da posição de equilíbrio estático correspondente a $\omega_f t = 0$, encontramos que o elongamento total da mola no instante t é $\delta_{est} + x - \delta_m$ sen $\omega_f t$. A equação do movimento é, então,

$$+\downarrow\Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{est} + x - \delta_m \text{ sen } \omega_f t) = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, temos

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.31}$$

Figura 19.8

Observamos que as Eqs. (19.30) e (19.31) são da mesma forma e que a solução da primeira equação vai satisfazer a segunda se colocarmos $P_m = k\delta_m$.

Uma equação diferencial tal como (19.30) ou (19.31), que tem um segundo membro diferente de zero, é chamada *não homogênea*. Sua solução geral é obtida adicionando-se uma solução particular da equação dada à solução geral da correspondente equação *homogênea* (com o segundo membro igual a zero). Uma *solução particular* de (19.30) ou (19.31) pode ser obtida tentando-se uma solução da forma

$$x_{part} = x_m \text{ sen } \omega_f t \tag{19.32}$$

Substituindo x_{part} por x em (19.30), encontramos

$$-m\omega_f^2 x_m \text{ sen } \omega_f t + kx_m \text{ sen } \omega_f t = P_m \text{ sen } \omega_f t$$

que pode ser resolvida para a amplitude

$$x_m = \frac{P_m}{k - m\omega_f^2}$$

Recordando de (19.4) que $k/m = \omega_n^2$, onde ω_n é a frequência natural circular do sistema, escrevemos

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33}$$

Substituindo (19.32) em (19.31), obtemos de modo semelhante

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33'}$$

A equação homogênea correspondente a (19.30) ou (19.31) é a Eq. (19.2), que define a vibração livre do corpo. Sua solução geral, chamada *função complementar*, foi encontrada na Seção 19.2:

$$x_{comp} = C_1 \text{ sen } \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t \tag{19.34}$$

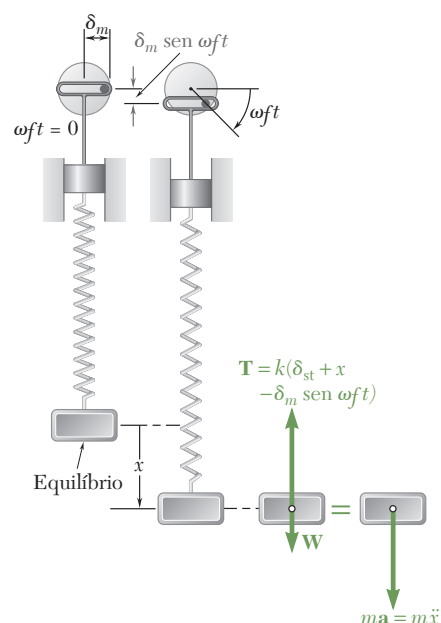
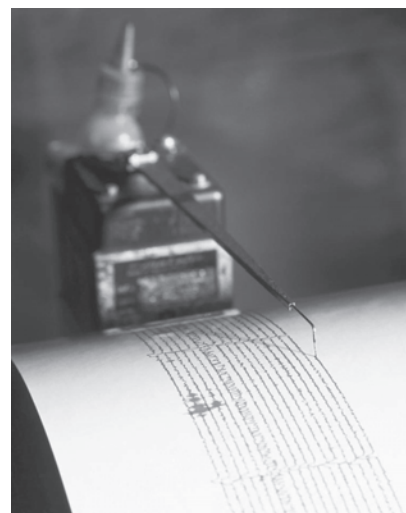



Foto 19.1 Um sismômetro opera medindo a quantidade de energia elétrica necessária para manter uma massa centrada em seu alojamento na presença de um forte tremor do solo.

Somando a solução particular (19.32) à função complementar (19.34), obtemos *a solução geral* das Eqs. (19.30) e (19.31):

$$x = C_1 \operatorname{sen} \omega_n t + C_2 \cos \omega_n t + x_m \operatorname{sen} \omega_f t \qquad (19.35)$$

Observamos que a vibração obtida consiste em duas vibrações superpostas. Os dois primeiros termos da Eq. (19.35) representam uma vibração livre do sistema. A frequência desta vibração é a *frequência natural* do sistema, que depende somente da constante k da mola e da massa m do corpo, e as constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas a partir das condições iniciais. Esta vibração livre também é chamada vibração *transiente,* pois, na prática, ela é rapidamente amortecida pelas forças de atrito (Seção 19.9).

O último termo da Eq. (19.35) representa a vibração *em regime permanente* produzida e mantida pela força imprimida ou pelo movimento forçado do suporte. Sua frequência é a *frequência forçada* imposta por essa força ou movimento, e sua amplitude x_m, definida por (19.33) ou (19.33′), depende da *razão de frequência* ω_f/ω_n. A razão da amplitude x_m, da vibração em regime permanente para a deflexão estática P_m/k causada por uma força P_m, ou para a amplitude δ_m do movimento do suporte, é chamada *fator de ampliação.* De (19.33) e (19.33′), obtemos

$$\text{Fator de ampliação} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \qquad (19.36)$$

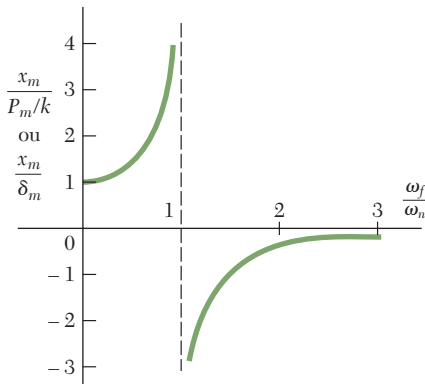
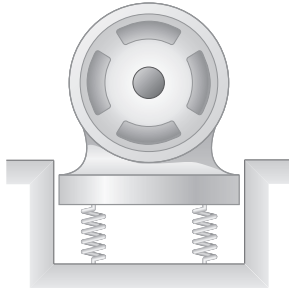



Figura 19.9

O gráfico do fator de ampliação *versus* a razão das frequências ω_f/ω_n foi traçado na Fig. 19.9. Observamos que, quando $\omega_f = \omega_n$, a amplitude da vibração forçada torna-se infinita. A força imprimida ou o movimento forçado do suporte é dito estar em *ressonância* com o sistema dado. Na realidade, a amplitude da vibração permanece finita por causa das forças de amortecimento (Seção 19.9); todavia, tal situação deve ser evitada, e a frequência forçada não deve ser escolhida muito próxima da frequência natural do sistema. Observamos também que, para $\omega_f < \omega_n$, o coeficiente de sen $\omega_f t$ em (19.35) é positivo, enquanto para $\omega_f > \omega_n$, esse coeficiente é negativo. No primeiro caso, a vibração forçada está *em fase* com a força imprimida ou o com movimento forçado do suporte, enquanto, no segundo caso, ela está *defasada* em 180°.

Finalmente, observemos que a velocidade e a aceleração na vibração em regime permanente podem ser obtidas diferenciando duas vezes em relação a t o último termo da Eq. (19.35). Seus valores máximos são dados por expressões similares àquelas das Eqs. (19.15) da Seção 19.2, exceto que essas expressões envolvem agora a amplitude e a frequência circular da vibração forçada:

$$v_m = x_m\omega_f \qquad a_m = x_m\omega_f^2 \qquad (19.37)$$

PROBLEMA RESOLVIDO 19.5

Um motor que pesa 200 kg é suportado por quatro molas, cada uma tendo uma constante de 150 kN/m. O desbalanceamento do rotor é equivalente a um peso de 30 g localizado a 15 cm do eixo de rotação. Sabendo que o motor é restringido a mover-se verticalmente, determine (*a*) a rotação em rpm na qual ocorrerá ressonância, (*b*) a amplitude da vibração do motor a uma rotação de 1.200 rpm.

SOLUÇÃO

a. Rotação de ressonância. A rotação de ressonância é igual à frequência natural circular ω_n (em rpm) da vibração livre do motor. A massa do motor e a constante equivalente das molas de sustentação são

$$m = 200 \text{ kg}$$

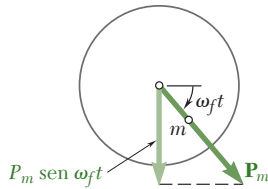
$$k = 4(150 \text{ kN/m}) = 600.000 \text{ N/m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{600.000}{200}} = 54{,}8 \text{ rad/s} = 523 \text{ rpm}$$

Rotação de ressonância = 523 rpm ◀

b. Amplitude de vibração a 1.200 rpm. A velocidade angular do motor e a massa equivalente ao peso de 0,28 N são

$$\omega_n = 1.200 \text{ rpm} = 125{,}7 \text{ rad/s}$$

$$m = 0{,}03 \text{ kg}$$

A intensidade da força centrífuga causada pelo desbalanceamento do rotor é

$$P_m = ma_n = mr\omega^2 = (0{,}03 \text{ kg})(0{,}15 \text{ m})(125{,}7 \text{ rad/s})^2 = 71{,}1 \text{ N}$$

A deflexão estática que seria causada por uma carga constante P_m é

$$\frac{P_m}{k} = \frac{71{,}1 \text{ N}}{600.000 \text{ N/m}} = \times 1.000 \text{ mm} = 0{,}1185 \text{ mm}$$

A frequência forçada circular ω_f do movimento é a velocidade angular do motor,

$$\omega_f = \omega = 125{,}7 \text{ rad/s}$$

Substituindo os valores de P_m/k, ω_f e ω_n na Eq. (19.33), obtemos

$$x_m = \frac{P_m/k}{1-(\omega_f/\omega_n)^2} = \frac{0{,}1185 \text{ mm}}{1-(125{,}7/54{,}8)^2} = -\ 0{,}0278 \text{ mm}$$

$x_m = 0{,}0278$ mm (defasado) ◀

Nota. Como $\omega_f > \omega_n$, a vibração está defasada 180° em relação à força centrífuga causada pelo desbalanceamento do rotor. Por exemplo, quando a massa desbalanceada está diretamente abaixo do eixo de rotação, a posição do motor é $x_m = 0{,}0278$ mm acima da posição de equilíbrio.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Esta seção foi dedicada à análise das *vibrações forçadas* de um sistema mecânico. Essas vibrações ocorrem quando o sistema está sujeito a uma força periódica **P** (Fig. 19.7), ou quando o sistema está elasticamente acoplado a um suporte que tem um movimento alternado (Fig. 19.8). No primeiro caso, o movimento do sistema é definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.30}$$

onde o membro à direita representa a intensidade da força **P** em um dado instante. No segundo caso, o movimento é definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.31}$$

onde o membro à direita é o produto da constante de mola k pelo deslocamento do suporte em um dado instante. Você só estará interessado no movimento em *regime permanente* do sistema, que é definido por uma *solução particular* dessas equações, da forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.32}$$

1. Se a vibração forçada é causada por uma força periódica P, de amplitude P_m e frequência circular ω_f, a amplitude da vibração é

$$x_m = \frac{P_m/k}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33}$$

onde ω_n é a *frequência natural circular* do sistema $\omega_n = \sqrt{k/m}$ e k é a constante de mola. Observe que a frequência circular da vibração é ω_f e que a amplitude x_m não depende das condições iniciais. Para $\omega_f = \omega_n$ o denominador da Eq. (19.33) é zero e x_m é infinito (Fig. 19.9); a força imprimida **P** é dita estar em *ressonância* com o sistema. Também, para $\omega_f < \omega_n$, x_m é positivo e a vibração está *em fase* com **P**, enquanto, para $\omega_f > \omega_n$, x_m é negativo e a vibração está *defasada*.

a. Nos problemas que se seguem, você pode ser solicitado a determinar um dos parâmetros da Eq. (19.33) quando os outros são conhecidos. Sugerimos que mantenha a Fig. 19.9 à sua frente quando estiver resolvendo esses problemas. Por exemplo, se você for solicitado a encontrar a frequência na qual a amplitude de uma vibração forçada tenha um dado valor, mas não sabe se a vibração está em fase ou não em relação à força imprimida, você deve verificar a partir da Fig. 19.9 que podem existir duas frequências que satisfazem esse requisito, uma correspondendo a um valor positivo de x_m e a uma vibração em fase com a força imprimida, e a outra correspondendo a um valor negativo de x_m e a uma vibração defasada com a força imprimida.

b. Uma vez que você tenha obtido a amplitude x_m do movimento de um componente do sistema a partir da Eq. (19.33), poderá usar as Eqs. (19.37) para determinar os valores máximos da velocidade e da aceleração daquele componente:

$$v_m = x_m \omega_f \qquad a_m = x_m \omega_f^2 \tag{19.37}$$

c. Quando a força imprimida P é causada pelo desbalanceamento do rotor de um motor, seu valor máximo é $P_m = mr\omega_f^2$, onde m é a massa do rotor, r é a distância entre seu centro de massa e o eixo de rotação e ω_f é igual à velocidade angular ω do rotor expressa em rad/s [Problema Resolvido 19.5].

2. Se a vibração forçada é causada pelo movimento harmônico simples de um suporte, de amplitude δ_m e frequência circular ω_f, a amplitude de vibração é

$$x_m = \frac{\delta_m}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.33$'$}$$

onde ω_n é a *frequência natural circular* do sistema, $\omega_n = \sqrt{k/m}$. Novamente, observe que a frequência circular da vibração é ω_f e que a amplitude x_m não depende das condições iniciais.

a. Certifique-se de ler nossos comentários nos parágrafos 1, 1a e 1b, pois eles se aplicam igualmente bem a uma vibração causada pelo movimento de um suporte.

b. Se a aceleração máxima a_m do suporte é especificada em vez de seu deslocamento máximo δ_m, lembre-se de que, como o movimento do suporte é um movimento harmônico simples, você pode usar a relação $a_m = \delta_m \omega_f^2$ para determinar δ_m; o valor obtido é então substituído na Eq. (19.33′).

PROBLEMAS

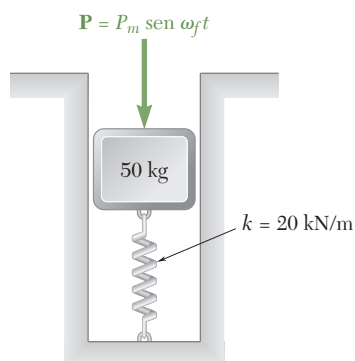
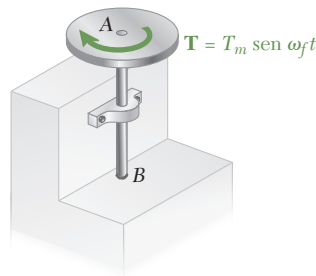
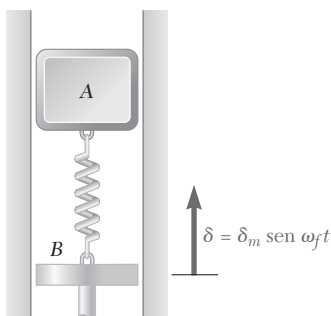



Figura P19.99

19.99 Um bloco de 50 kg está ligado a uma mola de constante $k = 20$ kN/m e pode se mover sem atrito em uma fenda vertical como mostrado na figura. Sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$, onde $\omega_f = 18$ rad/s. Sabendo que a amplitude do movimento é 3 mm, determine P_m.

19.100 Um cursor de 5 kg pode deslizar sobre uma barra horizontal sem atrito e está ligado a uma mola de constante 550 N/m. Sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$, onde $P_m = 15$ N. Determine a amplitude do movimento do cursor se (*a*) $\omega_f = 5$ rad/s, (*b*) $\omega_f = 10$ rad/s.

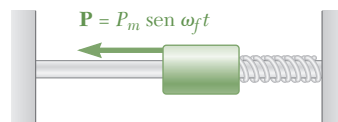



Figura P19.100, P19.101 e P10.102

19.101 Um cursor de 5 kg pode deslizar sobre uma barra horizontal sem atrito e está ligado a uma mola de constante k. Sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$, onde $P_m = 10$ N e $\omega_f = 5$ rad/s. Determine o valor da constante de mola k sabendo que o movimento do cursor tem uma amplitude de 150 mm e está (*a*) em fase com a força aplicada, (*b*) defasado com a força aplicada.

Figura *P19.103* e *P19.104*

19.102 Um cursor de massa m que desliza sobre uma barra horizontal sem atrito está ligado a uma mola de constante k e sobre ele atua uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$. Determine o intervalo de valores de ω_f para o qual a amplitude da vibração excede três vezes a deflexão estática causada por uma força constante de intensidade P_m.

19.103 Um disco uniforme de 8 kg e raio de 200 mm é soldado a um eixo vertical com uma ponta engastada em B. O disco gira em um ângulo de 3° quando um binário estático de intensidade de 50 N · m lhe é aplicado. Se sobre o disco atua um binário torcional periódico de intensidade $T = T_m$ sen $\omega_f t$, onde $T_m = 60$ N · m, determine o intervalo de valores de ω_f para os quais a amplitude da vibração é menor que o ângulo de rotação causado por um binário estático de intensidade T_m.

19.104 Para o disco do Problema 19.104, determine o intervalo de valores de ω_f para os quais a amplitude da vibração é menor que 3,5°.

Figura P19.105

19.105 Um bloco A de 8 kg desliza em uma fenda vertical sem atrito e está ligado a um suporte móvel B por meio de uma mola AB de constante $k = 1{,}6$ kN/m. Sabendo que o deslocamento do suporte é $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$, onde $\delta_m = 150$ mm, determine o intervalo de valores de ω_f nos quais a amplitude da força oscilante exercida pela mola no bloco é menor que 120 N.

19.106 A barra AB é rigidamente presa à estrutura de um motor em funcionamento com velocidade constante. Quando um cursor de massa m é colocado sobre a mola, observa-se que ele tem amplitude de 15 mm. Quando dois cursores, cada um com massa m, são colocados sobre a mola, a amplitude de vibração observada é 18 mm. Qual a amplitude de vibração esperada quando três cursores, cada um com massa m, são colocados sobre a mola? (Obter duas respostas.)

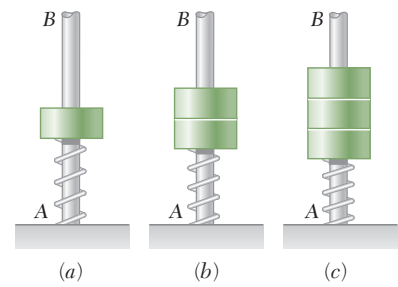



Figura P19.106

19.107 Uma viga engastada AB suporta um bloco que causa uma deflexão estática de 50 mm em B. Considerando que o suporte em A sofre um deslocamento vertical periódico $\delta = \delta_m \text{ sen } \omega_f t$, onde $\delta_m = 12$ mm, determine o intervalo de valores de ω_f nos quais a amplitude do movimento do bloco será menor que 25 mm. Despreze a massa da viga e considere que o bloco não deixa a viga.

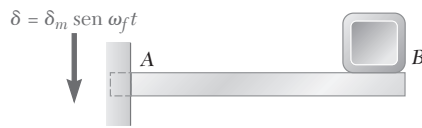



Figura P19.107

19.108 Um motor de velocidade variável é rigidamente preso a uma viga BC. Quando a velocidade do motor é menor que 600 rpm ou mais que 1.200 rpm, observa-se que um pequeno objeto em A permanece em contato com a viga. Para velocidades entre 600 e 1.200 rpm observa-se que o objeto "dança" e realmente perde o contato com a viga. Determine a velocidade para a qual ocorrerá ressonância.

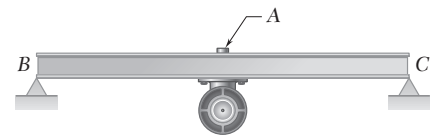



Figura P19.108

19.109 Um bloco A de 8 kg desliza em uma fenda vertical sem atrito e está ligado a um suporte móvel B por meio de uma mola de constante $k = 120$ N/m. Sabendo que a aceleração do suporte é $a = a_m \text{ sen } \omega_f t$, onde $a_m = 1{,}5 \text{ m/s}^2$ e $\omega_f = 5$ rad/s, determine (a) o deslocamento máximo do bloco A, (b) a amplitude da força oscilante exercida pela mola no bloco.

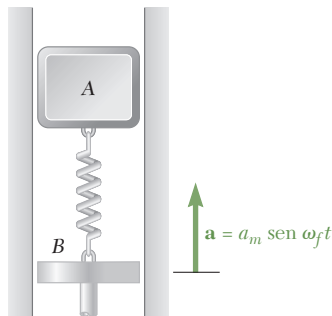



Figura P19.109

19.110 Uma bola de 20 g está ligada a uma raquete por meio de uma corda elástica AB de constante $k = 7{,}5$ N/m. Sabendo que a raquete é movida verticalmente de acordo com a relação $\delta = \delta_m \text{ sen } \omega_f t$ com uma amplitude $\delta_m = 200$ mm, determine a frequência circular máxima ω_f admissível para a corda não ficar frouxa.

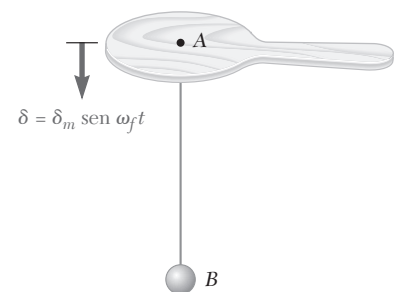



Figura *P19.110*

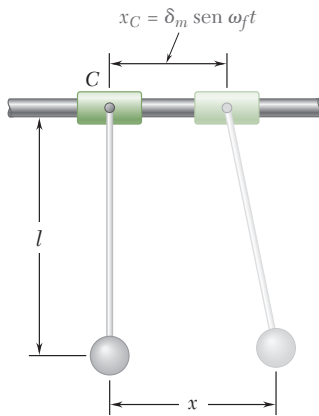



Figura *P19.111* e P19.112

19.111 Um pêndulo simples de comprimento l é suspenso de um cursor C que é forçado a mover-se horizontalmente de acordo com a relação $x_C = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Determine o intervalo de valores de ω_f para o qual o movimento do peso seja menor que δ_m. (Considere que δ_m é pequeno comparado com o comprimento l do pêndulo.)

19.112 Um peso de 1,2 kg de um pêndulo simples de comprimento $l = 600$ mm é suspenso de um cursor C de 1,4 kg. O cursor que é forçado a mover--se horizontalmente de acordo com a relação $x_C = \delta_m$ sen $\omega_f t$, com uma amplitude $\delta_m = 10$ mm e uma frequência $f_f = 0{,}5$ Hz. Determine (*a*) a amplitude do movimento do pêndulo, (*b*) a força que deve ser aplicada ao cursor C para manter o movimento.

19.113 Um motor de massa M é suportado por molas com uma constante de mola equivalente k. O desbalanceamento de seu rotor é equivalente a uma massa m localizada a uma distância r do eixo de rotação. Mostre que quando a velocidade angular do rotor é ω_f, a amplitude x_m do movimento do motor é

$$x_m = \frac{r(m/M)(\omega_f/\omega_n)^2}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2}$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/M}$.

19.114 À medida que a velocidade de rotação de um motor de 100 kg apoiado por molas é aumentada, a amplitude da vibração, causada pelo desbalanceamento do seu rotor de 15 kg, primeiro aumenta e depois diminui. Observa-se que quando velocidades muito altas são alcançadas, a amplitude da vibração se aproxima de 3,3 mm. Determine a distância entre o centro de massa do rotor e seu eixo de rotação. (*Dica:* use a fórmula deduzida no Problema 19.113.)

19.115 Um motor de 200 kg é suportado por molas que têm uma constante total de 240 kN/m. O desbalanceamento do rotor é equivalente a uma massa de 30 g localizada a 200 mm do eixo de rotação. Determine o intervalo de valores admissíveis da velocidade do motor se a amplitude da vibração não exceder 1,5 mm.

19.116 À medida que a velocidade de rotação de um motor apoiado por molas é lentamente aumentada de 300 para 500 rpm, a amplitude da vibração causada pelo desbalanceamento do seu rotor é observada aumentando continuamente de 1,5 para 6 mm. Determine a velocidade de rotação em que ocorrerá ressonância.

19.117 Um motor de 100 kg é parafusado a uma viga horizontal leve. O desbalanceamento do seu rotor é equivalente a uma massa de 60 g localizada a 100 mm do eixo de rotação. Sabendo que a ressonância ocorre na velocidade do motor de 400 rpm, determine a amplitude da vibração em regime permanente em (*a*) 800 rpm, (*b*) 200 rpm, (*c*) 425 rpm.

19.118 Um motor de 180 kg é parafusado a uma viga horizontal leve. O desbalanceamento do seu rotor é equivalente a uma massa de 28 g localizada a 150 mm do eixo de rotação e a deflexão estática da viga decorrente do peso do motor é de 12 mm. A amplitude da vibração decorrente do desbalanceamento pode ser diminuída pela adição de uma placa na base do motor. Se a amplitude de vibração deve ser menor que 60 μm para velocidades do motor acima de 300 rpm, determine a massa necessária da placa.

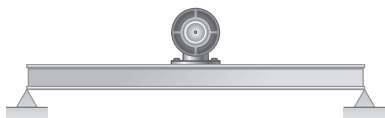



Figura *P19.117* e P19.118

19.119 O desbalanceamento do rotor de um motor de 200 kg é equivalente a uma massa de 100 g localizada a 150 mm do eixo de rotação. A fim de limitar para 1 N a intensidade da força oscilante exercida na fundação quando o motor gira a velocidades de 100 rpm ou acima, uma base amortecedora é colocada entre o motor e a fundação. Determine (*a*) a constante máxima admissível da mola k da base, (*b*) a amplitude correspondente da força oscilante exercida na fundação quando o motor está girando a 200 rpm.

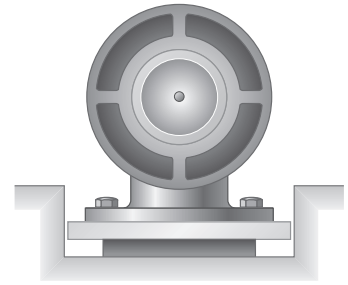



Figura *P19.119*

19.120 Um motor de 180 kg é suportado por molas de constante total 150 kN/m. O desbalanceamento do rotor é equivalente a uma massa de 28 g localizado a 150 mm do eixo de rotação. Determine o intervalo de velocidades do motor para o qual a amplitude da força oscilante exercida na fundação é menor que 20 N.

19.121 Um medidor de vibração, usado para medir a amplitude das vibrações, consiste de uma caixa contendo um sistema massa-mola com frequência natural conhecida de 120 Hz. A caixa está rigidamente ligada a uma superfície que está se movendo de acordo com a equação $y = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Se a amplitude z_m do movimento da massa relativo à caixa é usada como uma medida da amplitude δ_m da vibração da superfície, determine (*a*) o erro percentual quando a frequência da vibração é de 600 Hz, (*b*) a frequência na qual o erro é zero.

19.122 Um certo acelerômetro consiste essencialmente de uma caixa contendo um sistema massa-mola com uma frequência natural conhecida de 2.200 Hz. A caixa é rigidamente ligada a uma superfície que está se movendo de acordo com a equação $y = \delta_m$ sen $\omega_f t$. Se a amplitude z_m do movimento da massa relativo à caixa, vezes um fator de escala ω_n^2, é usada como uma medida da aceleração máxima $\alpha_m = \delta_m \omega_f^2$ da superfície que está vibrando, determine o erro percentual quando a frequência da vibração é 600 Hz.

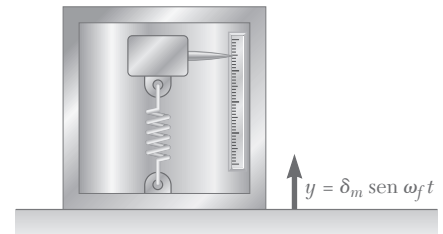



Figura P19.121 e P19.122

19.123 As Figuras (1) e (2) mostram como molas podem ser usadas para suportar um bloco em duas situações diferentes. Na Fig. (1), elas ajudam a diminuir a amplitude da força oscilante transmitida pelo bloco à fundação. Na Fig. (2), elas ajudam a diminuir a amplitude do deslocamento oscilante transmitido pela fundação ao bloco. A razão da força transmitida pela força imprimida ou a razão do deslocamento transmitido pelo deslocamento forçado é chamada de *transmissibilidade.* Deduza uma equação para a transmissibilidade em cada situação. Dê sua resposta em termos da razão ω_f/ω_n da frequência ω_f da força imprimida ou do deslocamento forçado pela frequência natural ω_n do sistema massa-mola. Mostre que, para causar qualquer redução na transmissibilidade, a razão ω_f/ω_n deve ser maior que $\sqrt{2}$.

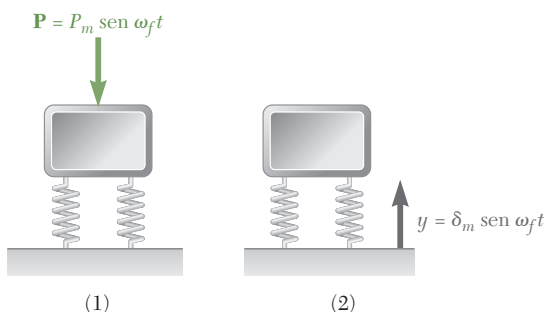



Figura P19.123

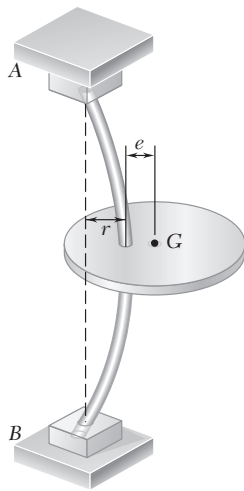
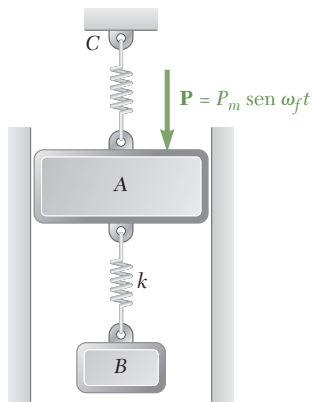



Figura P19.124

19.124 Um disco de 30 kg é fixado, com uma excentricidade $e = 0{,}15$ mm, ao ponto médio de um eixo vertical AB que gira com uma velocidade angular ω_f constante. Sabendo que a constante de mola k para o movimento horizontal do disco é de 650 kN/m, determine (a) a velocidade angular ω_f na qual a ressonância vai ocorrer, (b) a deflexão r do eixo quando $\omega_f = 1.200$ rpm.

19.125 Um pequeno reboque e sua carga têm uma massa total de 250 kg. O reboque é suportado por duas molas, cada uma de constante 10 kN/m, e puxado sobre uma estrada cuja superfície pode ser aproximada por uma curva senoidal com amplitude de 40 mm e comprimento de onda de 5 m (ou seja, a distância entre cristas sucessivas é de 5 m e a distância vertical da crista para a depressão é de 80 mm). Determine (a) a velocidade em que ocorrerá ressonância, (b) a amplitude da vibração do reboque a uma velocidade de 50 km/h.

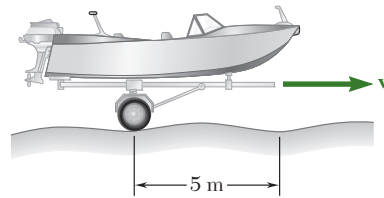



Figura *P19.125*

Figura *P19.126*

19.126 O bloco A pode se mover sem atrito na fenda como mostrado na figura e sobre ele atuar uma força vertical periódica de intensidade $P = P_m \text{ sen } \omega_f t$, onde $\omega_f = 2$ rad/s e $P_m = 20$ N. Uma mola de constante k está ligada à superfície inferior do bloco A e ao bloco B de 22 kg. Determine (a) o valor da constante k que vai evitar a vibração em regime permanente do bloco A, (b) a correspondente amplitude da vibração do bloco B.

VIBRAÇÕES AMORTECIDAS

*19.8 Vibrações livres amortecidas

Os sistemas vibratórios dados na primeira parte deste capítulo foram considerados livres de amortecimento. Na realidade, todas as vibrações são amortecidas em algum grau pelas forças de atrito. Essas forças podem ser causadas pelo *atrito seco,* ou *atrito de Coulomb,* entre corpos rígidos, por *atrito fluido,* quando um corpo rígido se move em um fluido, ou por *atrito interno,* entre as moléculas de um corpo aparentemente elástico.

Um tipo de amortecimento de especial interesse é o *amortecimento viscoso* causado pelo atrito fluido a velocidades baixas e moderadas. O amortecimento viscoso é caracterizado pelo fato de que a força de atrito é *diretamente proporcional e oposta à velocidade* do corpo móvel.

Como um exemplo, vamos novamente considerar um corpo de massa m suspenso por uma mola de constante k, considerando que o corpo está ligado ao êmbolo de um amortecedor (Fig. 19.10). A intensidade da força de atrito exercida sobre o êmbolo pelo fluido que o envolve é igual a $c\dot{x}$; onde a constante c, expressa em N · s/m e conhecida como o *coeficiente de amortecimento viscoso*, depende das propriedades físicas do fluido e da construção do amortecedor. A equação de movimento é

$$+\downarrow\Sigma F = ma: \qquad W - k(\delta_{est} + x) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

Recordando que $W = k\delta_{est}$, escrevemos

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{19.38}$$

Substituindo $x = e^{\lambda t}$ em (19.38) e dividindo por $e^{\lambda t}$, escrevemos a *equação característica*

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0 \tag{19.39}$$

e obtemos as raízes

$$\lambda = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{19.40}$$

Definindo o *coeficiente de amortecimento crucial* c_c como o valor de c que torna o radical da Eq. (19.40) nulo, escrevemos

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0 \qquad c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \tag{19.41}$$

onde ω_n é a frequência natural circular do sistema na ausência de amortecimento. Podemos distinguir três casos diferentes de amortecimento, dependendo do valor do coeficiente c:

1. *Amortecimento supercrucial;* $c > c_c$. As raízes λ_1 e λ_2 da equação característica (19.39) são reais e distintas e a solução geral da equação diferencial (19.38) é

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{19.42}$$

Essa solução corresponde a um movimento não vibratório. Como λ_1 e λ_2 são negativos, x tende a zero quando t aumenta indefinidamente. Contudo, o sistema na realidade retorna à sua posição de equilíbrio após um tempo finito.

2. *Amortecimento crucial:* $c = c_c$. A equação característica tem uma raiz dupla $\lambda = -c_c/2m = -\omega_n$ e a solução geral de (19.38) é

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{19.43}$$

O movimento obtido é novamente não vibratório. Sistemas criticamente amortecidos são de interesse especial em aplicações de engenharia, pois eles retornam à sua posição de equilíbrio no menor tempo possível sem oscilação.

3. *Amortecimento subcrucial:* $c < c_c$. As raízes da Eq. (19.39) são complexas e conjugadas, e a solução geral de (19.38) é da forma

$$x = e^{-(c/2m)t}(C_1 \operatorname{sen} \omega_d t + C_2 \cos \omega_d t) \tag{19.44}$$

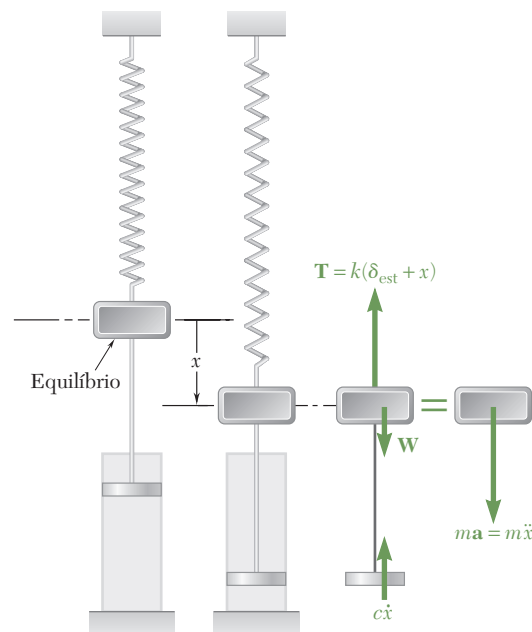



Figura 19.10

onde ω_d é definido pela relação

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2$$

Substituindo $k/m = \omega_n^2$ e recordando (19.41), escrevemos

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \qquad (19.45)$$

onde a constante c/c_c é conhecida como *fator de amortecimento.* Apesar de que o movimento na realidade não se repete, a constante ω_d é geralmente referenciada como a *frequência circular* da vibração amortecida. Uma substituição semelhante à utilizada na Seção 19.2 permite-nos escrever a solução geral da Eq. (19.38) na forma

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \qquad (19.46)$$

O movimento definido pela Eq. (19.46) é vibratório com amplitude decrescente (Fig. 19.11) e o intervalo de tempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ que separa dois pontos sucessivos, onde a curva definida pela Eq. (19.46) toca uma das curvas limites mostradas na Fig. 19.11, é comumente referenciado como o *período da vibração amortecida.* Recordando a Eq. (19.45), observamos que $\omega_d < \omega_n$ e, assim, que τ_d é maior que o período de vibração τ_n do sistema não amortecido correspondente.

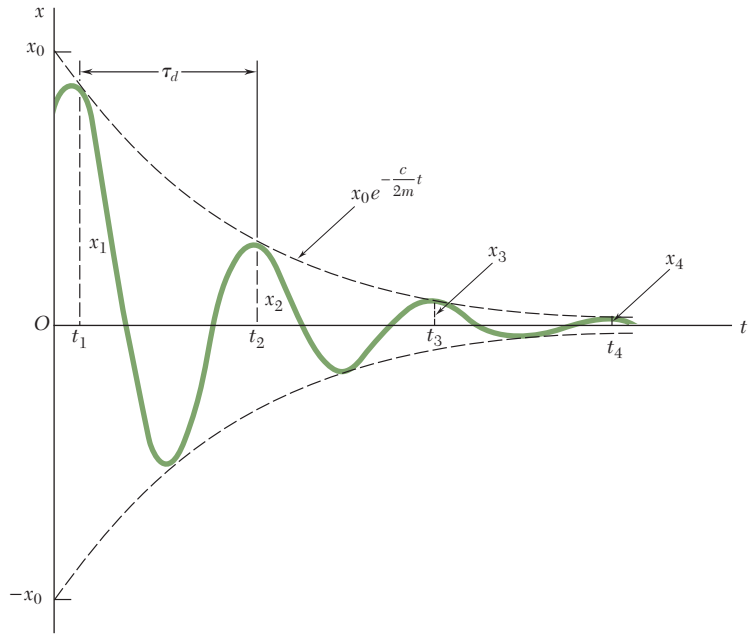



Figura 19.11

*19.9 Vibrações forçadas amortecidas

Foto 19.2 A suspensão de automóvel mostrada consiste essencialmente de uma mola e um absorvedor de choque, que vão fazer com que o corpo do carro sofra *vibrações forçadas amortecidas* quando ele é dirigido sobre uma estrada irregular.

Se o sistema considerado na seção precedente é submetido a uma força periódica **P** de intensidade $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$, a equação do movimento se torna

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.47}$$

A solução geral de (19.47) é obtida adicionando-se uma solução particular de (19.47) à função complementar ou uma solução geral da equação homogênea (19.38). A função complementar é dada por (19.42), (19.43) ou (19.44), dependendo do tipo de amortecimento considerado. Ela representa um movimento *transiente* que é, no final das contas, completamente amortecido.

Nosso interesse nesta seção está centrado nas vibrações em regime permanente representadas por uma solução particular de (19.47) da forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \tag{19.48}$$

Substituindo x_{part} por x em (19.47), obtemos

$$-m\omega_f^2 x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) + c\omega_f x_m \cos (\omega_f t - \varphi) + kx_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$$

Fazendo $\omega_f t - \varphi$ sucessivamente igual a 0 e a $\pi/2$, escrevemos

$$c\omega_f x_m = P_m \operatorname{sen} \varphi \tag{19.49}$$

$$(k - m\omega_f^2)\, x_m = P_m \cos \varphi \tag{19.50}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros de (19.49) e (19.50) e somando, temos

$$[(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2]\, x_m^2 = P_m^2 \tag{19.51}$$

Resolvendo (19.51) para x_m e dividindo (19.49) e (19.50), membro a membro, obtemos, respectivamente,

$$x_m = \frac{P_m}{\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{c\omega_f}{k - m\omega_f^2} \tag{19.52}$$

Recordando de (19.4) que $k/m = \omega_n^2$, onde ω_n é a frequência circular da vibração livre não amortecida, e de (19.41) que $2m\omega_n = c_c$, onde c_c é o coeficiente de amortecimento crucial do sistema, escrevemos

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \tag{19.53}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.54}$$

Foto 19.3 Esta camioneta está passando por vibração forçada amortecida no ensaio dinâmico de veículo mostrado.

A equação (19.53) representa o fator de ampliação em termos da razão de frequências ω_f/ω_n e do fator de amortecimento c/c_c. Ela pode ser usada para determinar a amplitude de vibração em regime permanente produzida por uma força imprimida de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$ ou pelo movimento forçado do suporte $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$. A equação (19.54) define, em termos dos mesmos parâmetros, a *diferença de fase* φ entre a força imprimida ou o movimento forçado do suporte e a resultante vibração em regime permanente do sistema amortecido. O fator de ampliação foi traçado em função da razão de frequências na Fig. 19.12 para vários valores do fator de amortecimento. Observamos que a amplitude de uma vibração forçada pode ser mantida pequena pela escolha de um coeficiente de amortecimento viscoso c grande ou mantendo a frequência natural e a forçada bem distanciadas entre si.

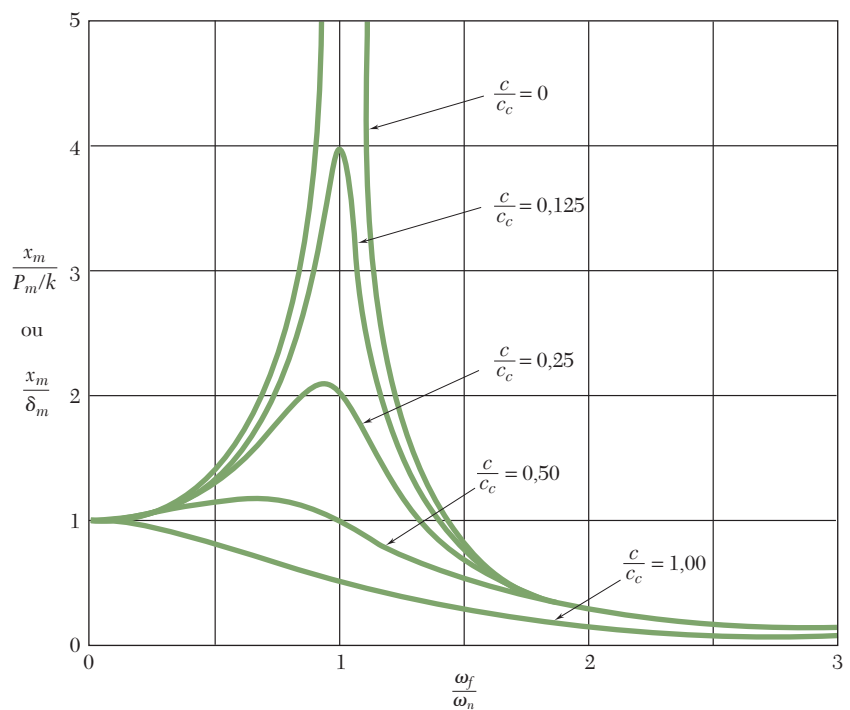



Figura 19.12

*19.10 Análogos elétricos

Circuitos elétricos oscilantes são caracterizados por equações diferenciais do mesmo tipo que as obtidas nas seções precedentes. Sua análise é, portanto, similar àquela de um sistema mecânico, e os resultados obtidos para um dado sistema vibratório podem ser prontamente estendi-

dos ao circuito equivalente. Reciprocamente, qualquer resultado obtido para um circuito elétrico também se aplicará ao sistema mecânico correspondente.

Considere um circuito elétrico que consiste em um indutor de indutância L, um resistor de resistência R e um capacitor de capacitância C, ligados em série com uma fonte de tensão alternada $E = E_m \text{ sen } \omega_f t$ (Fig. 19.13). Recordamos a partir da teoria elementar de circuitos* que, se i representa a corrente do circuito e q representa a carga elétrica do capacitor, a queda de potencial é $L(di/dt)$ por meio do indutor, Ri por meio do resistor e q/C por meio do capacitor. Expressando que a soma algébrica da tensão aplicada e das quedas de potencial ao longo do circuito fechado é nula, escrevemos

Figura 19.13

$$E_m \text{ sen } \omega_f t - L\frac{di}{dt} - Ri - \frac{q}{C} = 0 \qquad (19.55)$$

Reordenando os termos e recordando que em qualquer instante a corrente i é igual à taxa de variação $\dot{q}$ da carga q, temos

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.56)$$

Verificamos que a Eq. (19.56), que define as oscilações do circuito elétrico da Fig. 19.13, é do mesmo tipo da Eq. (19.47), que caracteriza as vibrações forçadas amortecidas do sistema mecânico da Fig. 19.10. Comparando as duas equações, podemos construir uma tabela de expressões mecânicas e elétricas análogas.

A Tabela 19.2 pode ser usada para estender os resultados obtidos nas seções precedentes para vários sistemas mecânicos aos seus análogos elétricos. Por exemplo, a amplitude i_m da corrente no circuito da Fig. 19.13 pode ser obtida observando que ela corresponde ao valor máximo v_m da velocidade no sistema mecânico análogo. Recordando a partir da

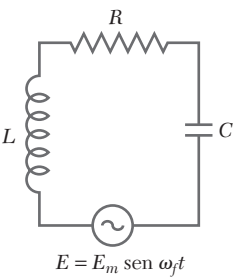



Tabela 19.2 Características de um sistema mecânico e de seu análogo elétrico

Sistema mecânico		Circuito elétrico	
m	Massa	L	Indutância
c	Coeficiente de amortecimento viscoso	R	Resistência
k	Constante de mola	$1/C$	Inverso da capacitância
x	Deslocamento	q	Carga
v	Velocidade	i	Corrente
P	Força aplicada	E	Voltagem aplicada

* Ver C. R. Paul, S. A. Nasar e L. E. Unnewehr, *Introduction to Electrical Engineering*, 2ª ed., McGraw-Hill, Nova York, 1992.

primeira das Eqs. (19.37), que $v_m = x_m\omega_f$, substituindo o valor de x_m da Eq. (19.52) e trocando as constantes do sistema mecânico pelas correspondentes expressões elétricas, temos

$$i_m = \frac{\omega_f E_m}{\sqrt{\left(\frac{1}{C} - L\omega_f^2\right)^2 + (R\omega_f)^2}}$$

$$i_m = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega_f - \frac{1}{C\omega_f}\right)^2}} \tag{19.57}$$

O radical na expressão obtida é conhecido como *impedância* do circuito elétrico.

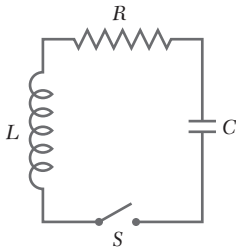



Figura 19.14

A analogia entre sistemas mecânicos e circuitos elétricos é válida tanto para oscilações transitórias como para oscilações em regime permanente. As oscilações do circuito mostrado na Fig. 19.14, por exemplo, são análogas às vibrações livres amortecidas do sistema da Fig. 19.10. No que diz respeito às condições iniciais, devemos notar que fechar a chave S quando a carga no capacitor é $q = q_0$ equivale à liberação da massa do sistema mecânico com velocidade inicial nula da posição $x = x_0$. Devemos observar também que se uma bateria de tensão constante E é introduzida no circuito elétrico da Fig. 19.14, fechar a chave S será equivalente à aplicação repentina de uma força de intensidade constante P à massa do sistema mecânico da Fig. 19.10.

A discussão anterior seria de valor questionável se seu único resultado fosse tornar possível para os estudantes de mecânica analisar circuitos elétricos sem aprender os elementos da teoria de circuitos. Espera-se que essa discussão vá, ao contrário, encorajá-los a aplicarem, na resolução de problemas de vibrações mecânicas, as técnicas matemáticas que possam aprender em cursos posteriores de teoria de circuitos elétricos. O principal valor do conceito de análogos elétricos, no entanto, reside em sua aplicação a *métodos experimentais* para a determinação das características de um dado sistema mecânico. De fato, um circuito elétrico é muito mais facilmente montado que um modelo mecânico, e o fato de que suas características podem ser modificadas variando a indutância, a resistência ou a capacitância de seus vários componentes torna o uso do análogo elétrico particularmente conveniente.

Para determinar o análogo elétrico de um dado sistema mecânico, concentraremos nossa atenção sobre cada massa móvel no sistema, observando quais molas, amortecedores ou forças externas estão direta-

mente aplicados sobre ela. Uma malha, ou circuito elétrico, equivalente pode, então, ser montada para combinar cada uma das unidades mecânicas assim definidas; as várias malhas obtidas desse modo formarão, no seu conjunto, o circuito desejado. Considere, por exemplo, o sistema mecânico da Fig. 19.15. Observamos que a massa m_1, em está sob a ação de duas molas de constantes k_1 e k_2 e de dois amortecedores caracterizados pelos coeficientes de amortecimento viscoso c_1 e c_2. O circuito elétrico deveria, portanto, incluir uma malha consistindo em um indutor de indutância L_1 proporcional a m_1 em dois capacitores de capacitâncias C_1 e C_2 inversamente proporcionais a k_1 e k_2, respectivamente, e em dois resistores de resistência R_1 e R_2, proporcionais a c_1 e c_2, respectivamente. Como a massa m_2 está sob a ação da mola k_2 e do amortecedor c_2, bem como da força $P = P_m$ sen $\omega_f t$, o circuito também deveria incluir uma malha contendo o capacitor C_2, o resistor R_2, o novo indutor L_2 e a fonte de tensão $E = E_m$ sen $\omega_f t$ (Fig. 19.16).

Figura 19.15

Figura 19.16

Para verificar se o sistema mecânico da Fig. 19.15 e o circuito elétrico da Fig. 19.16 realmente satisfazem as mesmas equações diferenciais, as equações de movimento para m_1 e m_2 serão deduzidas primeiro. Representando, respectivamente, por x_1 e x_2 os deslocamentos de m_1 e m_2 de suas posições de equilíbrio, observamos que o elongamento da mola k_1 (medida de sua posição de equilíbrio) é igual a x_1, enquanto o elongamento da mola k_2 é igual ao deslocamento relativo $x_2 - x_1$ de m_2 em relação a m_1. As equações de movimento para m_1 e m_2 são, portanto,

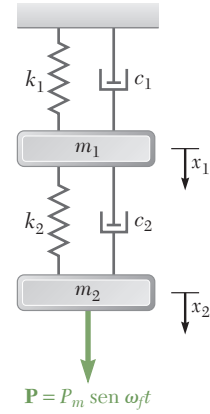
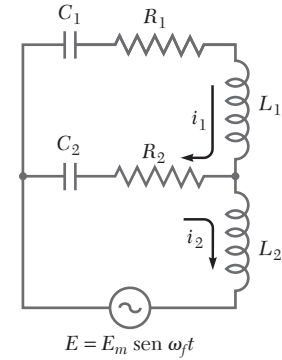
$$m_1\ddot{x}_1 + c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (19.58)$$

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2(x_2 - x_1) = P_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.59)$$

Considere, agora, o circuito elétrico da Fig. 19.16; representamos, respectivamente por i_1 e i_2, as correntes da primeira e segunda malhas, e por q_1 e q_2 as integrais $\int i_1\,dt$ e $\int i_2\,dt$. Observando que a carga no capacitor C_1 é q_1, enquanto a carga em C_2 é $q_1 - q_2$, expressamos que a soma das diferenças de potencial em cada malha é zero e obtemos as seguintes equações

$$L_1\ddot{q}_1 + R_1\dot{q}_1 + R_2(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_2} = 0 \qquad (19.60)$$

$$L_2\ddot{q}_2 + R_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + \frac{q_2 - q_1}{C_2} = E_m \text{ sen } \omega_f t \qquad (19.61)$$

Verificamos facilmente que as Eqs. (19.60) e (19.61) se reduzem a (19.58) e a (19.59), respectivamente, quando as substituições indicadas na Tabela 19.2 são efetuadas.

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, um modelo mais realístico de sistema vibratório foi desenvolvido, incluindo-se o efeito do *amortecimento viscoso* causado pelo atrito fluido. O amortecimento viscoso foi representado na Fig. 19.10 pela força exercida sobre o corpo em movimento por um êmbolo movendo-se em um amortecedor. Essa força é igual em intensidade a $c\dot{x}$, onde a constante c, expressa em N · s/m, é conhecida como o *coeficiente de amortecimento viscoso*. Tenha em mente que a mesma convenção de sinal deve ser usada para x, $\dot{x}$ e $\ddot{x}$.

1. Vibrações livres amortecidas. A equação diferencial que define este movimento foi encontrada como sendo

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{19.38}$$

Para obter a solução dessa equação, calcule o *coeficiente de amortecimento crucial* c_c usando a equação

$$c_c = 2m\sqrt{k/m} = 2m\omega_n \tag{19.41}$$

onde ω_n é a frequência natural circular do sistema *não amortecido*.

a. Se $c > c_c$ (amortecimento supercrucial), a solução da Eq. (19.38) é

$$x = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} \tag{19.42}$$

onde

$$\lambda_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \tag{19.40}$$

e onde as constantes C_1 e C_2 podem ser determinadas a partir das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Essa solução corresponde a um movimento não vibratório.

b. Se $c = c_c$ (amortecimento crucial), a solução da Eq. (19.38) é

$$x = (C_1 + C_2 t)e^{-\omega_n t} \tag{19.43}$$

que também corresponde a um movimento não vibratório.

c. Se $c < c_c$ (amortecimento subcrucial), a solução da Eq. (19.38) é

$$x = x_0 e^{-(c/2m)t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi) \tag{19.46}$$

onde

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \tag{19.45}$$

e onde x_0 e ϕ podem ser determinados a partir das condições iniciais $x(0)$ e $\dot{x}(0)$. Essa solução corresponde a oscilações de amplitude decrescente e de período $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ (Fig. 19.11).

2. Vibrações forçadas amortecidas. Essas vibrações ocorrem quando um sistema com amortecimento viscoso está sujeito a uma força periódica **P** de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$ ou quando ele está elasticamente ligado a um suporte com um movimento alternado $\delta = \delta_m$ sen $\omega_f t$. No primeiro caso, o movimento é definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.47}$$

e, no segundo caso, por uma equação similar obtida pela substituição de P_m por $k\delta_m$. Você se preocupará somente com o movimento em *regime permanente* do sistema, que é definido por uma solução particular dessas equações, da forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \tag{19.48}$$

onde

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \tag{19.53}$$

e

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{18.54}$$

A expressão dada na Eq. (19.53) é referida como o *fator de ampliação* e foi traçada em um gráfico em função da razão de frequências ω_f/ω_n da Fig. 19.12 para vários valores do fator de amortecimento c/c_c. Nos problemas que se seguem, você poderá ser solicitado a determinar um dos parâmetros das Eqs. (19.53) e (19.54) onde os outros parâmetros são conhecidos.

PROBLEMAS

19.127 Mostre que, no caso de amortecimento supercrucial ($c > c_c$), um corpo nunca passa pela sua posição de equilíbrio O (*a*) se ele é liberado sem velocidade inicial de uma posição arbitrária, ou (*b*) se ele parte de O com uma velocidade inicial arbitrária.

19.128 Mostre que, no caso de amortecimento supercrucial ($c > c_c$), um corpo liberado de uma posição arbitrária com uma velocidade inicial arbitrária não pode passar mais de uma vez pela sua posição de equilíbrio.

19.129 No caso de amortecimento subcrucial, os deslocamentos x_1, x_2, x_3 mostrados na Fig. 19.11 podem ser considerados iguais aos deslocamentos máximos. Mostre que a razão de dois deslocamentos máximos sucessivos x_n e x_{n+1} é constante e que o logaritmo natural dessa razão, chamado de *decremento logarítmico*, é

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{2\pi (c/c_{cr})}{\sqrt{1 - (c/c_{cr})^2}}$$

19.130 Na prática, é frequentemente difícil determinar o decremento logarítmico de um sistema com o amortecimento subcrucial definido no Problema 19.129 pela medida de dois deslocamentos máximos sucessivos. Mostre que o decremento logarítmico também pode ser expresso como $(1/k)\ \ln(x_n/x_{n+k})$, onde k é o número de ciclos entre leituras do deslocamento máximo.

19.131 Em um sistema com amortecimento subcrucial ($c < c_c$), o período de vibração é usualmente definido como o intervalo de tempo $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ correspondente a dois pontos sucessivos onde a curva deslocamento-tempo toca uma das curvas limitantes mostradas na Fig. 19.11. Mostre que o intervalo de tempo (*a*) entre o deslocamento positivo e o deslocamento negativo seguinte máximos é $\frac{1}{2}\tau_d$, (*b*) entre dois deslocamentos nulos sucessivos é $\frac{1}{2}\tau_d$, (*c*) entre um deslocamento positivo máximo e o deslocamento nulo seguinte é maior que $\frac{1}{4}\tau_d$.

19.132 O bloco mostrado na figura é abaixado em 30 mm da sua posição de equilíbrio e então liberado. Sabendo que depois de 10 ciclos o deslocamento máximo do bloco é de 12,5 mm, determine (*a*) o fator de amortecimento c/c_c, (*b*) o valor do coeficiente de amortecimento viscoso. (*Dica:* veja os Problemas 19.129 e 19.130.)

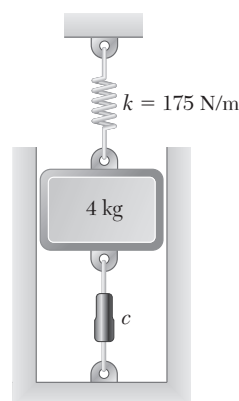



Figura P19.132

19.133 Um vagão de trem carregado de massa 15.000 kg está circulando a uma velocidade constante $\mathbf{v}_0$, quando é acoplado com uma mola e um sistema amortecedor (Fig. 1). O registro da curva deslocamento-tempo do vagão de trem carregado é mostrado (Fig. 2). Determine (*a*) a constante de amortecimento, (*b*) a constante da mola. (*Dica:* Use a definição de decremento logarítmico dado em 19.129.)

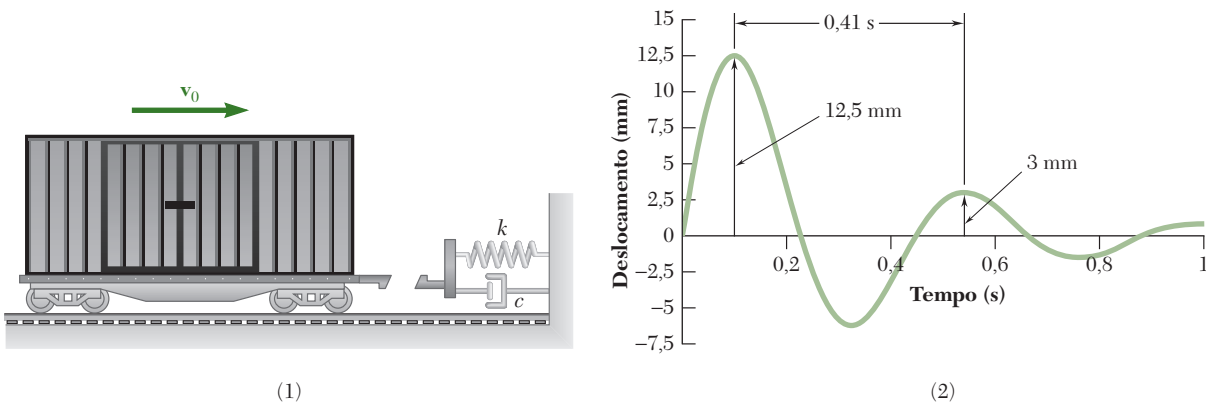



Figura P19.133

19.134 Um bloco *A* de 4 kg é solto de uma altura de 800 mm sobre um bloco *B* de 9 kg que está em repouso. O bloco *B* é suportado por uma mola de constante $k = 1.500$ N/m e está unido a um amortecedor de coeficiente de amortecimento $c = 230$ N · s/m. Sabendo que não há rebote, determine a distância máxima a que os blocos vão se mover após o impacto.

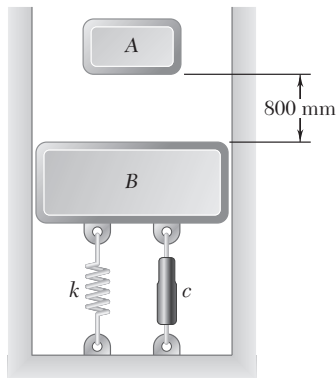



Figura P19.134

19.135 Solucione o Problema 19.134 considerando que o coeficiente de amortecimento do amortecedor é de $c = 300$ N · s/m.

19.136 O cano da arma de caça tem massa de 750 g e é retornado para a posição de tiro após o recuo de um recuperador de constante $c = 18$ kN · s/m. Determine (*a*) a constante k que deveria ser usada para o recuperador retornar o cano para a posição de tiro no menor tempo possível sem qualquer oscilação, (*b*) o tempo necessário para o cano voltar dois terços do caminho de sua posição de recuo máximo para a sua posição de tiro.

19.137 Uma barra uniforme de massa m é suportada por um pino em A e uma mola de constante k em B e está ligada em D a um amortecedor de coeficiente de amortecimento c. Determine, em termos de m, k e c, para pequenas oscilações, (a) a equação diferencial de movimento, (b) o coeficiente de amortecimento crucial c_c.

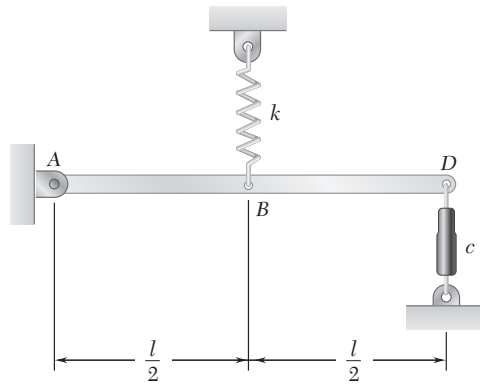



Figura P19.137

19.138 Uma barra uniforme de 2 kg é suportada por um pino em O e por uma mola em A e está ligada a um amortecedor em B. Determine (a) a equação diferencial do movimento para pequenas oscilações, (b) o ângulo que a barra formará com a horizontal 1,5 s após a extremidade B ter sido empurrada 25 mm para baixo e liberada.

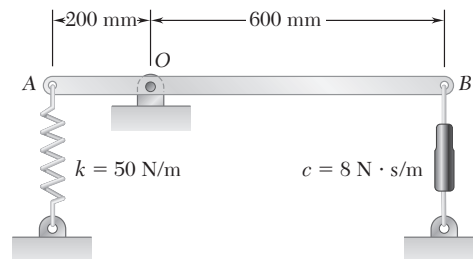



Figura P19.138

19.139 Um elemento de máquina de 500 kg é suportado por duas molas, cada uma de constante 50 kN/m. Uma força periódica de 150 N de amplitude é aplicada ao elemento com uma frequência de 2,8 Hz. Sabendo que o coeficiente de amortecimento é de 1,8 kN · s/m, determine a amplitude da vibração em regime permanente do elemento.

19.140 No Problema 19.139, determine o valor necessário da constante de cada mola se a amplitude da vibração em regime permanente deve ser de 0,4 mm.

19.141 No caso da vibração forçada de um sistema, determine o intervalo de valores do fator de amortecimento c/c_c para o qual o fator de ampliação sempre diminuirá quando a razão de frequência ω_f/ω_n aumentar.

19.142 Mostre que, para um fator de amortecimento c/c_c pequeno, a amplitude máxima de uma vibração forçada ocorre quando $\omega_f \approx \omega_n$ e que o valor correspondente do fator de ampliação é $\frac{1}{2}(c/c_c)$.

Figura P19.143

19.143 Um motor de 50 kg é parafusado a uma viga leve horizontal que tem uma deflexão estática de 6 mm devido ao peso do motor. O desbalanceamento do motor é equivalente a uma massa de 100 g localizado a 75 mm do eixo de rotação. Sabendo que a amplitude da vibração do motor é 0,8 mm a uma velocidade de 400 rpm, determine (a) o fator de amortecimento c/c_c, (b) o fator de amortecimento c.

19.144 Um motor de 15 kg é suportado por quatro molas, cada uma de constante 45 kN/m. O desbalanceamento do motor é equivalente a uma massa de 20 g localizada a 125 mm do eixo de rotação. Sabendo que o motor é restringido a mover-se verticalmente, determine a amplitude da vibração em regime permanente do motor a uma velocidade de 1.500 rpm, considerando (a) que nenhum amortecimento está presente, (b) que o fator de amortecimento c/c_c é igual a 1,3.

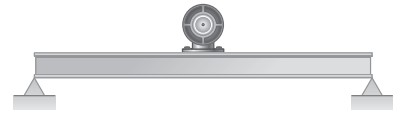
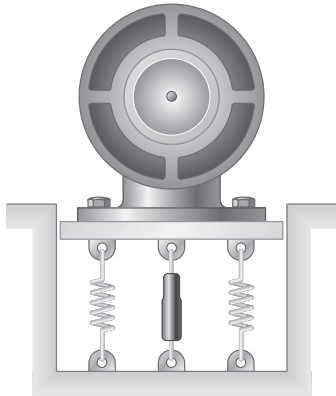



Figura P19.144 e P19.145

19.145 Um motor de 100 kg é suportado por quatro molas, cada uma de constante $k = 90$ kN/m, e está ligado ao chão por um amortecedor que tem coeficiente de amortecimento $c = 6.500$ N · s/m. O motor é restringido a mover-se verticalmente, e a amplitude observada de seu movimento é de 2,1 mm a uma velocidade de 1.200 rpm. Sabendo que a massa do rotor é de 15 kg, determine a distância entre o centro de massa do rotor e o eixo da haste.

19.146 Um excitador de massa excêntrica contrarotativo consiste de duas massas rotativas de 400 g que descrevem círculos de raio 150 mm com a mesma velocidade, mas em sentidos opostos, e é colocado em um elemento de máquina para induzir uma vibração em regime permanente nesse elemento e para determinar algumas características dinâmicas do elemento. A uma velocidade de 1.200 rpm, um estroboscópio mostra as massas excêntricas exatamente abaixo de seus respectivos eixos de rotação e o elemento passa a ter a sua posição de equilíbrio estático. Sabendo que a amplitude de movimento do elemento a essa velocidade é 15 mm e que a massa total do sistema é 140 kg, determine (a) a constante de mola combinada k, (b) o fator de amortecimento c/c_c.

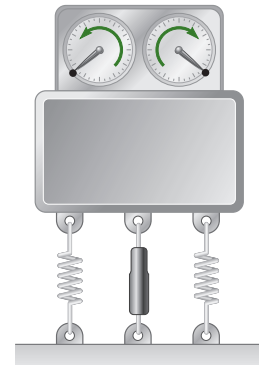



Figura P19.146

19.147 Um modelo simplificado de uma máquina de lavar é mostrada na figura. Uma trouxa de roupa molhada forma uma massa m_b de 10 kg na máquina e causa um desbalanceamento rotativo. A massa rotativa é 20 kg (incluindo m_b) e o raio da cesta de lavar e é 25 cm. Sabendo que a máquina de lavar tem uma constante de mola equivalente a $k = 1.000$ N/m e fator de amortecimento $\zeta = c/c_c = 0{,}05$, e durante o ciclo de centrifugação a cesta gira 250 rpm, determine a amplitude do movimento e a intensidade da força transmitida para os lados da máquina de lavar.

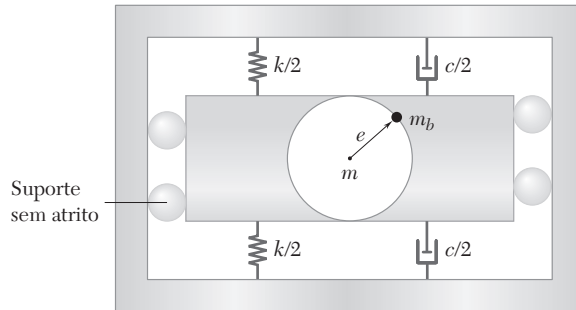



Figura P19.147

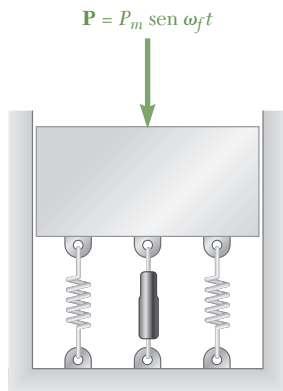



Figura *P19.148* e P19.149

19.148 Um elemento de máquina é suportado por molas e está ligado a um amortecedor como mostrado na figura. Mostre que, se uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$ é aplicada ao elemento, a amplitude da força oscilante transmitida à fundação é

$$F_m = P_m \sqrt{\frac{1 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}}$$

19.149 Um elemento de máquina de 100 kg suportado por quatro molas, cada uma de constante $k = 200$ N/m, está sujeito a uma força periódica de frequência de 0,8 Hz e amplitude de 100 N. Determine a amplitude da força oscilante transmitida à fundação se (*a*) um amortecedor com um coeficiente de amortecimento $c = 420$ N · s/m está ligado à máquina e ao chão, (*b*) o amortecedor é removido.

19.150 Para uma vibração em regime permanente com amortecimento sob uma força harmônica, mostre que a energia mecânica dissipada por ciclo pelo amortecedor é $E = \pi c x_m^2 \omega_f$, onde c é o coeficiente de amortecimento, x_m a amplitude do movimento e ω_f a frequência circular da força harmônica.

***19.151** A suspensão de um automóvel pode ser aproximada pelo sistema simplificado mola-amortecedor mostrado na figura. (*a*) Escreva a equação diferencial que define o deslocamento vertical da massa m quando o sistema se move com uma velocidade v por uma estrada com uma seção longitudinal senoidal de amplitude δ_m e comprimento de onda L. (*b*) Deduza uma expressão para a amplitude do deslocamento vertical da massa m.

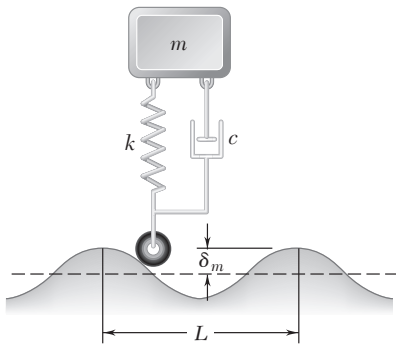



Figura P19.151

***19.152** Dois blocos A e B, cada um de massa m, são suportados, como mostrado na figura, por três molas de mesma constante k. Os blocos A e B estão ligados por um amortecedor e o bloco B está ligado ao chão por dois amortecedores, cada um tendo o mesmo coeficiente de amortecimento c. O bloco A é submetido a uma força de intensidade $P = P_m \text{ sen } \omega_f t$. Escreva as equações diferenciais que definem os deslocamentos x_A e x_B dos dois blocos, a partir de suas posições de equilíbrio.

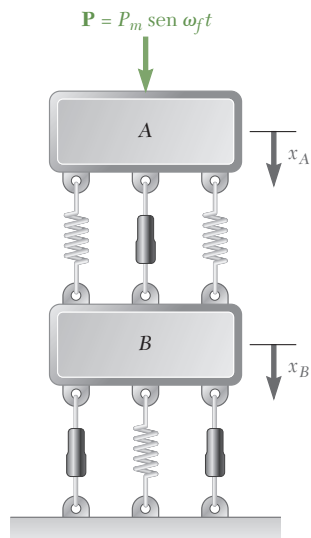



Figura *P19.152*

19.153 Expresse em termos de L, C e E o intervalo de valores da resistência R no qual ocorrerão oscilações no circuito mostrado na figura quando a chave S for fechada.

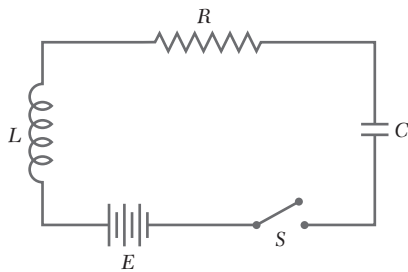



Figura P19.153

19.154 Considere o circuito do Problema 19.153 quando o capacitor C é removido. Se a chave S for fechada no instante $t = 0$, determine (*a*) o valor final da corrente no circuito, (*b*) o instante t no qual a corrente alcançará $(1 - 1/e)$ vezes o valor final. (O valor desejado de t é conhecido como a constante de tempo do circuito.)

19.155 e 19.156 Desenhe o análogo elétrico do sistema mecânico mostrado na figura. (*Dica:* desenhe as malhas correspondentes para os corpos livres m e A.)

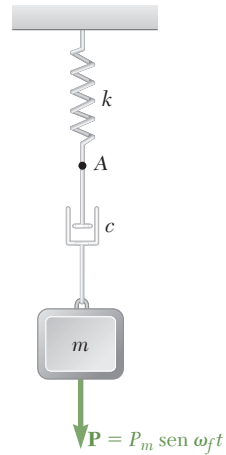



Figura P19.155 e P19.157

19.157 e *19.158* Escreva as equações diferenciais definindo (a) os deslocamentos da massa m e do ponto A, (b) as cargas nos capacitores do análogo elétrico.

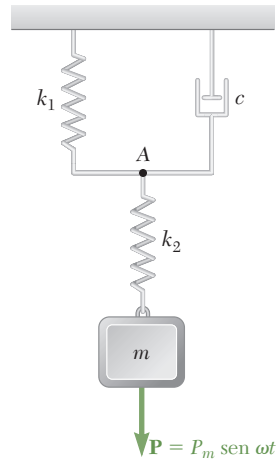



Figura P19.156 e *P19.158*

REVISÃO E RESUMO

Este capítulo foi dedicado ao estudo de *vibrações mecânicas,* ou seja, a análise do movimento de partículas e corpos rígidos que oscilam em torno de uma posição de equilíbrio. Na primeira parte do capítulo [Seções de 19.2 a 19.7], consideramos *vibrações sem amortecimento,* enquanto a segunda parte foi dedicada às *vibrações amortecidas* [Seções de 19.8 a 19.10].

Vibrações livres de uma partícula

Na Seção 19.2, consideramos as *vibrações livres de uma partícula,* isto é, o movimento de uma partícula P sujeita a uma força restauradora proporcional ao deslocamento da partícula – tal como a força exercida por uma mola. Se o deslocamento x da partícula P é medido a partir de sua posição de equilíbrio O (Fig. 19.17), a resultante $\mathbf{F}$ das forças que atuam em P (incluindo seu peso) tem uma intensidade kx e está dirigida para O. Aplicando a segunda lei de Newton, $F = ma$, e lembrando que $a = \ddot{x}$, escrevemos a equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{19.2}$$

ou, estabelecendo que $\omega_n^2 = k/m$

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \tag{19.6}$$

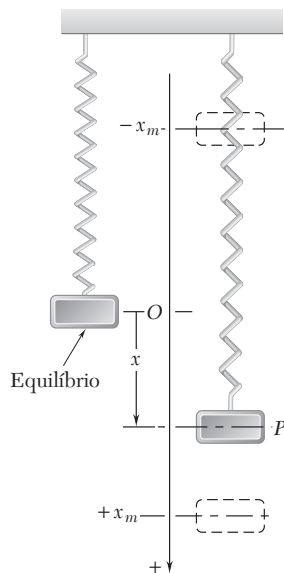



Figura 19.17

O movimento definido por essa equação é chamado *movimento harmônico simples.*

A solução da Eq. (19.6), que representa o deslocamento da partícula P, foi expressa como

$$x = x_m \text{ sen } (\omega_n t + \phi) \tag{19.10}$$

onde x_m = amplitude da vibração
$\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frequência circular natural
ϕ = ângulo da fase

O *período da vibração* (isto é, o tempo necessário para um ciclo completo) e sua *frequência natural* (isto é, o número de ciclos por segundo) foram expressos como

$$\text{Período} = \tau_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \tag{19.13}$$

$$\text{Frequência natural} = f_n = \frac{1}{\tau_n} = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{19.14}$$

A velocidade e aceleração da partícula foram obtidas diferenciando-se a Eq. (19.10), e seus valores máximos foram encontrados como sendo

$$v_m = x_m\omega_n \qquad a_m = x_m\omega_n^2 \tag{19.15}$$

Como todos os parâmetros anteriores dependem diretamente da frequência natural circular ω_n e, portanto, da razão k/m, é essencial em qualquer problema dado calcular o valor da constante k; isto pode ser feito determinando-se a relação entre a força restauradora e o deslocamento correspondente da partícula [Problema Resolvido 19.1].

Foi também mostrado que o movimento oscilatório da partícula P pode ser representado pela projeção no eixo x do movimento de um ponto Q que descreve um círculo auxiliar de raio x_m com a velocidade angular constante ω_n (Fig. 19.18). Os valores instantâneos da velocidade e aceleração de P podem, então, ser obtidos projetando-se no eixo x os vetores $\mathbf{v}_m$ e $\mathbf{a}_m$ que representam, respectivamente, a velocidade e aceleração de Q.

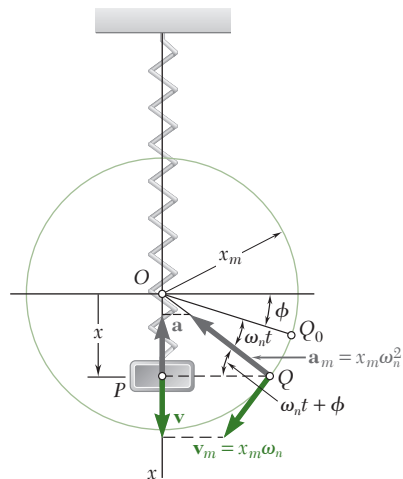



Figura 19.18

Pêndulo simples

Apesar de o movimento de um *pêndulo simples* não ser realmente um movimento harmônico simples, as fórmulas dadas anteriormente podem ser usadas, com $\omega_n^2 = g/l$, para calcular o período e a frequência natural das *pequenas oscilações* de um pêndulo simples [Seção 19.3]. Oscilações de grande amplitude de um pêndulo simples foram discutidas na Seção 19.4.

Vibrações livres de um corpo rígido

As *vibrações livres de um corpo rígido* podem ser analisadas escolhendo-se uma variável apropriada, como uma distância x ou um ângulo θ, para definir a posição do corpo, desenhando uma equação de diagrama de corpo livre para expressar a equivalência entre forças externas e forças efetivas e escrevendo uma equação relacionando a variável escolhida e sua segunda derivada [Seção 19.5]. Se a equação obtida for da forma

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ddot{\theta} + \omega_n^2 \theta = 0 \tag{19.21}$$

a vibração considerada é um movimento harmônico simples e seu período e frequência natural podem ser obtidos *identificando-se* ω_n e substituindo seu valor nas Eqs. (19.13) e (19.14) [Problemas Resolvidos 19.2 e 19.3].

Usando o princípio de conservação da energia

O *princípio de conservação de energia* pode ser usado como um método alternativo para a determinação do período e da frequência natural do movimento harmônico simples de uma partícula ou de um corpo rígido [Seção 19.6]. Escolhendo novamente uma variável apropriada, tal como θ, para definir a posição do sistema, expressamos que a energia total do sistema é conservada, $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$, entre a posição de deslocamento máximo ($\theta_1 = \theta_m$) e a posição de velocidade máxima ($\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_m$). Se o movimento considerado é harmônico simples, os dois membros da equação obtida consistem de expressões quadráticas homogêneas em θ_m e $\dot{\theta}_m$, respectivamente*. Substituindo $\dot{\theta}_m = \theta_m \omega_n$ nessa equação, podemos faturar θ_m^2 solucionar para a frequência circular ω_n [Problema Resolvido 19.4].

Vibrações forçadas

Na Seção 19.7, consideramos as *vibrações forçadas* de um sistema mecânico. Essas vibrações ocorrem quando o sistema está submetido a uma força periódica (Fig. 19.19) ou está preso elasticamente a um suporte em movimento alternado (Fig. 19.20). Representando por ω_f a frequência forçada circular, encontramos que, no primeiro caso, o movimento do sistema foi definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.30}$$

e que, no segundo caso, ele foi definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + kx = k\delta_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.31}$$

A solução geral dessas equações é obtida adicionando-se uma solução particular da forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.32}$$

* Se o movimento considerado pode apenas ser *aproximado* por um movimento harmônico simples, como no caso das pequenas oscilações de um corpo sob a ação da gravidade, a energia potencial deve ser aproximada por uma expressão quadrática em θ_m.

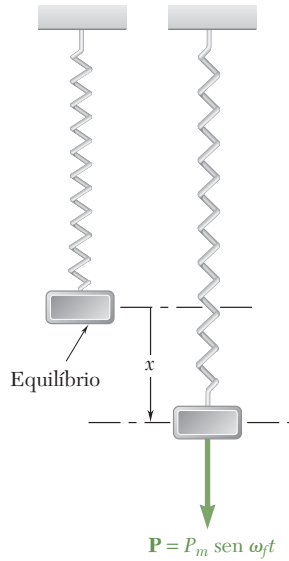
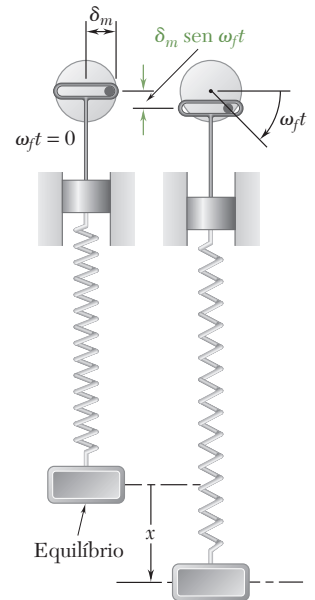



Figura 19.19

Figura 19.20

à solução geral da equação homogênea correspondente. A solução particular (19.32) representa uma *vibração em regime permanente* do sistema, enquanto a solução da equação homogênea representa uma *vibração livre transitória* que pode normalmente ser desprezada.

Dividindo a amplitude x_m da vibração em regime permanente por P_m/k no caso de uma força periódica, ou por δ_m no caso de um suporte oscilante, definimos *o fator de ampliação* da vibração e encontramos que

$$\text{Fator de ampliação} = \frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \qquad (19.36)$$

De acordo com a Eq. (19.36), a amplitude x_m da vibração forçada *se torna infinita quando* $\omega_f = \omega_n$ quer dizer, *quando a frequência forçada é igual à frequência natural do sistema.* A força imprimida ou o movimento forçado do suporte são, então, ditos a estarem em *ressonância* com o sistema [Problema Resolvido 19.5]. Na verdade, a amplitude da vibração permanece finita por causa das forças amortecedoras.

Vibrações livres amortecidas

Na última parte do capítulo, consideramos as *vibrações amortecidas* de um sistema mecânico. Primeiramente, analisamos as *vibrações livres amortecidas* de um sistema com *amortecimento viscoso* [Seção 19.8]. Constatamos que o movimento de tal sistema foi definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \qquad (19.38)$$

onde c é uma constante chamada de *coeficiente de amortecimento viscoso.* Definindo o *coeficiente de amortecimento crucial* c_c como

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (19.41)$$

onde ω_n é a frequência natural circular do sistema na ausência de amortecimento, distinguimos os três casos diferentes de amortecimento, a saber: (1) *amortecimento supercrucial,* quando $c > c_c$; (2) *amortecimento crucial,* quando $c = c_c$; e (3) *amortecimento subcrucial,* quando $c < c_c$. Nos dois primeiros casos, o sistema, quando perturbado, tende a restaurar sua posição de equilíbrio sem nenhuma oscilação. No terceiro caso, o movimento é vibratório com amplitude decrescente.

Vibrações forçadas amortecidas

Na Seção 19.9, consideramos as *vibrações forçadas amortecidas* de um sistema mecânico. Essas vibrações ocorrem quando um sistema com amortecimento viscoso é sujeito a uma força periódica **P** de intensidade $P = P_m \operatorname{sen} \omega_f t$ ou quando ele está elasticamente ligado a um suporte com um movimento alternado $\delta = \delta_m \operatorname{sen} \omega_f t$. No primeiro caso, o movimento do sistema foi definido pela equação diferencial

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P_m \operatorname{sen} \omega_f t \tag{19.47}$$

e, no segundo caso, por uma equação análoga obtida substituindo P_m por $k\delta_m$ em (19.47).

A *vibração em regime permanente* do sistema é representada por uma solução particular da Eq. (19.47), sob a forma

$$x_{\text{part}} = x_m \operatorname{sen} (\omega_f t - \varphi) \tag{19.48}$$

Dividindo a amplitude x_m da vibração em regime permanente por P_m/k no caso de uma força periódica, ou por δ_m, no caso de um suporte oscilante, obtivemos a seguinte expressão para o fator de ampliação:

$$\frac{x_m}{P_m/k} = \frac{x_m}{\delta_m} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega_f/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)]^2}} \tag{19.53}$$

onde $\omega_n = \sqrt{k/m}$ = frequência natural circular de sistema não amortecido
$c_c = 2m\omega_n$ = coeficiente de amortecimento crítico
c/c_c = fator de amortecimento

Também verificamos que a *diferença de fase* φ entre a força imprimida ou o movimento do suporte e a vibração em regime permanente resultante do sistema amortecido foi definida pela relação

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2(c/c_c)(\omega_f/\omega_n)}{1 - (\omega_f/\omega_n)^2} \tag{19.54}$$

Análogos elétricos

O capítulo terminou com uma discussão sobre *análogos elétricos* [Seção 19.10], na qual mostrou-se que as vibrações de sistemas mecânicos e as oscilações de circuitos elétricos são definidas pelas mesmas equações diferenciais. Análogos elétricos de sistemas mecânicos podem, portanto, ser usados para estudar ou prever o comportamento desses sistemas.

PROBLEMAS DE REVISÃO

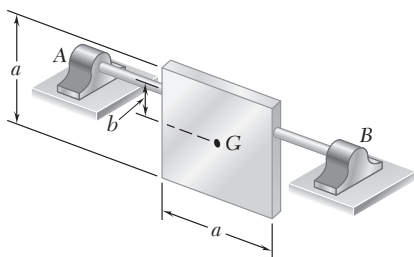



Figura P19.159

19.159 Uma placa quadrada fina de lado a pode oscilar sobre um eixo AB localizado a uma distância b de seu centro de massa G. (a) Determine o período de pequenas oscilações se $b = \frac{1}{2}a$. (b) Determine um segundo valor de b para o qual o período de pequenas oscilações é o mesmo encontrado na parte a.

19.160 Um eletroímã de 150 kg, em repouso, mantém uma sucata de aço de 100 kg; quando a corrente é desativada, o aço cai. Sabendo que o cabo e a corrente de suporte têm uma rigidez total equivalente a uma constante de mola de 200 kN/m, determine (a) a frequência, a amplitude e a velocidade máxima do movimento resultante, (b) a tração mínima que ocorrerá no cabo durante o movimento, (c) a velocidade do eletroímã 0,03 s após a corrente ser desativada.

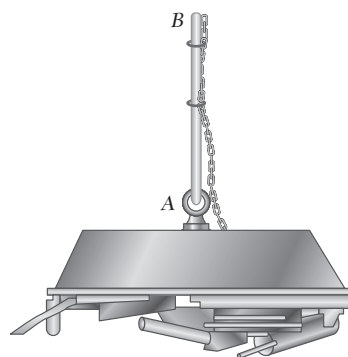



Figura P19.160

19.161 Os discos A e B têm massas de 15 kg e 6 kg, respectivamente, e um pequeno bloco C de 2,5 kg é preso no aro do disco B. Considerando que não ocorre deslizamento entre os discos, determine o período de pequenas oscilações do sistema.

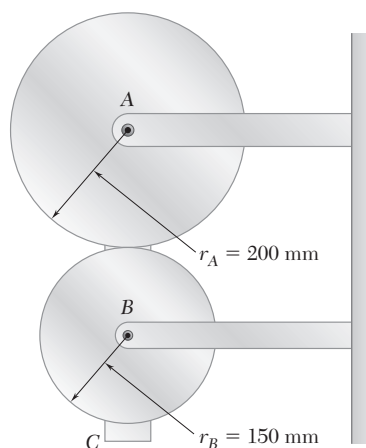



Figura P19.161

19.162 Um período de 6,00 s é observado para as oscilações angulares de um rotor de giroscópio de 120 g suspenso por um fio como mostrado na figura. Sabendo que o período de 3,80 s é obtido quando uma esfera de aço de 30 mm de diâmetro é suspensa da mesma forma, determine o raio de giração centroidal do rotor. (Densidade do aço = 7.800 kg/m^3.)

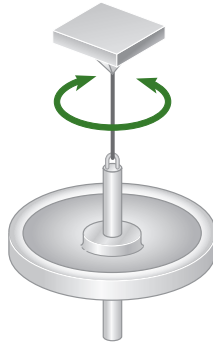



Figura P19.162

19.163 Um bloco B de 1,5 kg é conectado por uma corda ao bloco A de 2 kg, que é suspenso por uma mola de constante 3 kN/m. Sabendo que o sistema está em repouso quando a corda é cortada, determine (a) a frequência, a amplitude e a máxima velocidade do movimento resultante, (b) a tração mínima que ocorrerá na mola durante o movimento, (c) a velocidade do bloco A 0,3 s após a corda ser cortada.

Figura P19.163

19.164 Duas barras, cada uma de massa m e comprimento L, são soldadas juntas para formar a montagem mostrada na figura. Determine (a) a distância b para que a frequência de pequenas oscilações da montagem seja máxima, (b) a frequência máxima correspondente.

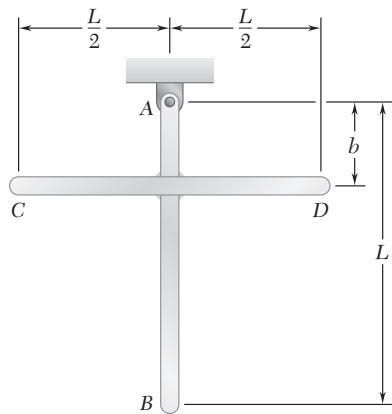



Figura P19.164

19.165 Como a velocidade de giro de um motor suportado por molas é lentamente aumentada de 200 para 500 rpm, observa-se que a amplitude da vibração do desbalanceamento do rotor decresce continuamente de 8 mm para 2,5 mm. Determine (*a*) a velocidade na qual ocorrerá ressonância, (*b*) a amplitude da vibração em regime permanente a uma velocidade de 100 rpm.

19.166 O compressor mostrado tem massa de 250 kg e opera em 2.000 rpm. Para essa condição de operação ocorre vibração indesejável quando o compressor é preso diretamente no chão. Para reduzir a vibração do piso de concreto que repousa em solo argiloso, propõe-se isolar o compressor montado em um bloco quadrado de concreto que repousa no chão como mostrado na figura. A densidade do concreto é 2.400 kg/m^3 e a constante de mola para o solo é estabelecido em 80×10^6 N/m. A geometria do compressor leva a escolher um bloco de concreto de 1,5 m por 1,5 m. Determine a profundidade h que reduzirá a força transmitida para o chão em 75%.

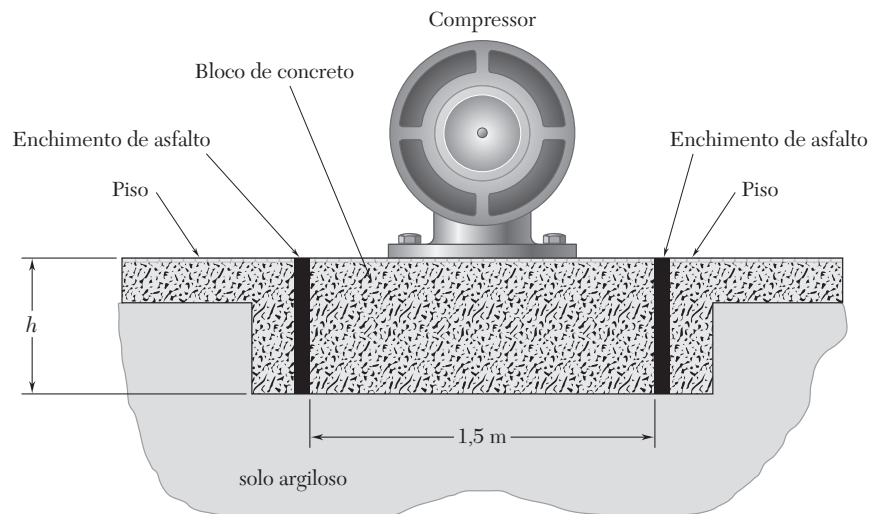



Figura P19.166

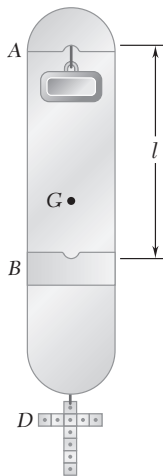



Figura P19.167

19.167 Dificuldades são encontradas se for usado um pêndulo simples ou um composto para determinar experimentalmente a aceleração da gravidade g. No caso de um pêndulo simples, a corda não é suficientemente pesada, enquanto no caso de um pêndulo composto, a localização exata do centro de massa é difícil de estabelecer. No caso de um pêndulo composto, a dificuldade pode ser eliminada usando um pêndulo reversível ou um pêndulo de Kater. Duas arestas pontiagudas A e B são dispostas tal que elas não estão, obviamente, à mesma distância do centro de massa G, e a distância l é medida com grande precisão. A posição do contrapeso D é, então, ajustada tal que o período de oscilação τ seja o mesmo quando qualquer aresta pontiaguda é usada. Mostre que o período τ obtido é igual a de um verdadeiro pêndulo simples de comprimento l e que $g = 4\pi^2 l/\tau^2$.

19.168 Um motor de 400 kg é suportado por quatro molas, cada uma de constante $k = 150$ kN/m, e é restringido de mover-se verticalmente. Sabendo que o desbalanceamento do rotor é equivalente a uma massa 23 g localizada a uma distância de 100 mm do eixo de rotação, determine, para a velocidade de 800 rpm, (*a*) a amplitude da força oscilante transmitida para a fundação, (*b*) a amplitude do movimento vertical do motor.

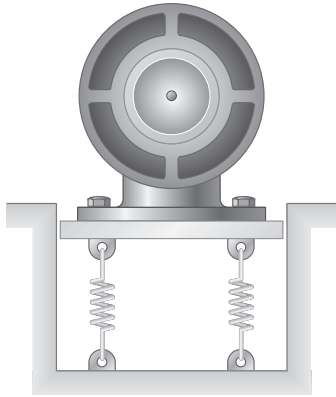



Figura P19.168

19.169 Resolva o Problema 19.168, considerando que a constante de amortecimento $c = 6.500$ N · s/m é introduzida entre o motor e o chão.

19.170 Uma pequena bola de massa m presa ao ponto médio de uma corda elástica bem esticada de comprimento l pode deslizar no plano horizontal. A bola recebe um pequeno deslocamento na direção perpendicular à corda e é liberada. Considerando que a tração T na corda permanece constante, (*a*) escreva a equação diferencial de movimento da bola, (*b*) determine o período de vibração.

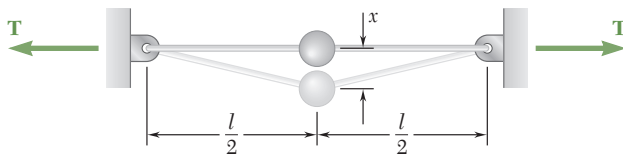



Figura P19.170

PROBLEMAS PARA RESOLVER NO COMPUTADOR

19.C1 Expandindo o integrando da Eq. (19.19) em uma série de potências de sen ϕ e fazendo a integração, é possível mostrar que o período de um pêndulo simples de comprimento l pode ser aproximado pela expressão

$$\tau_n = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 c^2 + \left(\frac{1 \times 3}{2 \times 4}\right)^2 c^4 + \left(\frac{1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 6}\right)^2 c^6 + \cdots\right]$$

onde $c = \text{sen}\,\frac{1}{2}\theta_m$ e θ_m é a amplitude de oscilação. Use um programa de computador para calcular a soma das séries entre colchetes usando sucessivamente 1, 2, 4, 8 e 16 termos, para valores de θ_m de 30° a 120° usando incrementos de 30°.

19.C2 A equação de força-deflexão para uma classe de molas não lineares presas em uma extremidade é $F = 5x^{1/n}$, onde F é a intensidade, expressa em newtons, da força aplicada na outra extremidade da mola e x é a deflexão expressa em metros. Sabendo que um bloco de massa m é suspenso pela mola e recebe um pequeno deslocamento para baixo a partir de sua posição de equilíbrio, use um programa de computador para calcular e traçar em um gráfico a frequência de vibração do bloco para valores de m iguais a 0,2, 0,6 e 1,0 kg e valores de n de 1 a 2. Considere que a declividade da curva de força-deflexão no ponto correspondente a $F = mg$ pode ser usada como uma constante equivalente de mola.

19.C3 Um elemento de uma máquina suportado por molas e preso a um amortecedor está sujeito a uma força periódica de intensidade $P = P_m$ sen $\omega_f t$. A *transmissibilidade* T_m do sistema é definida pela razão F_m/P_m do valor máximo F_m da força periódica oscilante transmitida à fundação pelo valor máximo P_m da força periódica aplicada ao elemento da máquina. Use um programa de computador para calcular e traçar em um gráfico o valor de T_m para razões de frequência ω_f/ω_n iguais a 0,8, 1,4, e 2,0 e para fatores de amortecimento c/c_c iguais a 0, 1 e 2. (*Dica:* Use a fórmula dada no Problema 19.148.)

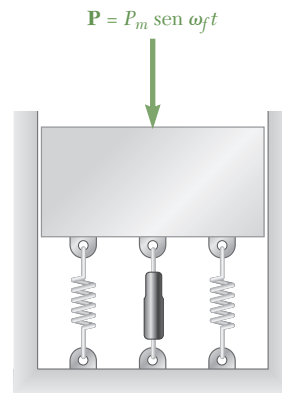



Figura P19.C3

19.C4 Um motor de 15 kg é suportado por quatro molas, cada uma de constante 60 kN/m. O desbalanceamento do motor é equivalente a uma massa de 20 g localizada a 125 mm do eixo de rotação. Sabendo que o motor está restringido a se mover verticalmente, use um programa de computador para calcular e traçar em um gráfico a amplitude da vibração e a aceleração máxima do motor para velocidades do motor de 1.000 a 2.500 rpm.

19.C5 Resolva o Problema 19.C4 considerando um amortecedor, que tem o coeficiente de amortecimento $c = 2{,}5$ kN · s/m, foi preso à base do motor e ao chão.

19.C6 Um pequeno reboque e sua carga têm massa total de 250 kg. O reboque é suportado por duas molas, cada uma de constante 10 kN/m, e é puxado sobre uma estrada cuja superfície pode ser aproximada por uma curva senoidal com amplitude de 40 mm e comprimento de onda de 5 m (ou seja, a distância entre cristas sucessivas é de 5 m e a distância vertical da crista para a depressão é de 80 mm). (*a*) Desprezando a massa das rodas e considerando que as rodas permanecem em contato com o chão, use um programa de computador para calcular e traçar um gráfico da amplitude de vibração e a máxima aceleração vertical do reboque para velocidades de 10 a 80 km/h. (*b*) Determine a faixa de valores da velocidade do reboque para os quais as rodas perderão o contato com o chão.

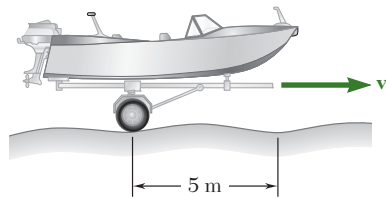



Figura P19.C6

APÊNDICE A

Algumas definições úteis e propriedades de álgebra vetorial

As seguintes definições e propriedades de álgebra vetorial foram discutidas detalhadamente nos Capítulos 2 e 3 do livro *Mecânica vetorial para engenheiros: Estática.* Elas estão resumidas aqui para conveniência do leitor, com referências às seções apropriadas do volume de *Estática.* Os números das equações e ilustrações são aqueles usados na apresentação original.

A.1 Adição de vetores (Seções 2.3 e 2.4)

Vetores são definidos como *expressões matemáticas possuindo intensidade, direção e sentido, que se somam de acordo com a lei do paralelogramo.* Portanto, a soma dos dois vetores **P** e **Q** é obtida aplicando-se os dois vetores no mesmo ponto *A* e construindo-se um paralelogramo, usando **P** e **Q** como dois lados desse paralelogramo (Fig. A.2). A diagonal que passa por meio de *A* representa a soma dos vetores **P** e **Q**, e essa soma é representada por **P** + **Q**. A adição vetorial é *associativa* e *comutativa.*

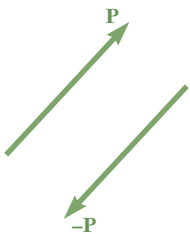



Figura A.1

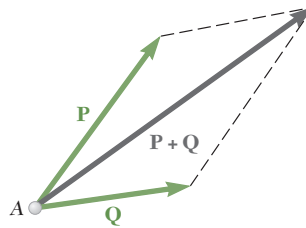



Figura A.2

O *vetor negativo* de um dado vetor **P** é definido como um vetor tendo a mesma intensidade *P* e direção e sentido opostos ao de **P** (Fig. A.l); o negativo do vetor **P** é representado por −**P**. Claramente, temos

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

A.2 Produto de um escalar e um vetor (Seção 2.4)

O produto $k\mathbf{P}$ de um escalar k e um vetor $\mathbf{P}$ é definido como um vetor tendo a mesma direção e sentido que $\mathbf{P}$ (se k é positivo), ou direção e sentido oposto ao de $\mathbf{P}$ (se k é negativo), e uma intensidade igual ao produto da intensidade P pelo valor absoluto de k (Fig. A.3).

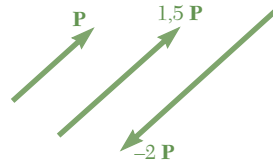



Figura A.3

A.3 Vetores unitários. Decomposição de um vetor em componentes retangulares (Seções 2.7 e 2.12)

Os vetores **i, j** e **k**, chamados de *vetores unitários,* são definidos como vetores de intensidade 1, dirigidos, respectivamente, ao longo dos eixos x, y e z positivos (Fig. A.4).

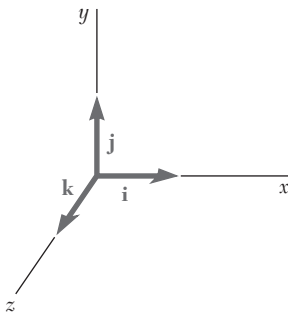



Figura A.4

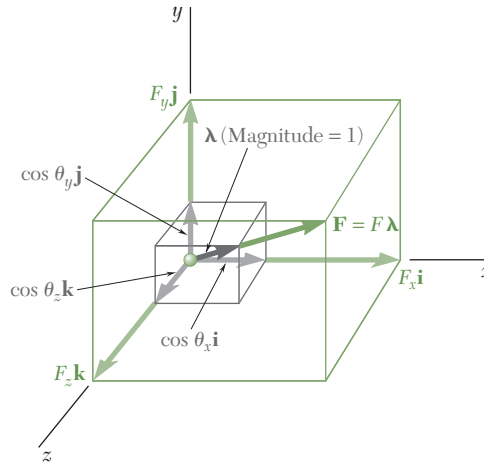



Figura A.5

Representando por F_x, F_y e F_z os componentes escalares de um vetor **F**, temos (Fig. A.5)

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \tag{2.20}$$

No caso particular de um vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ dirigido ao longo de uma reta formando ângulos θ_x, θ_y e θ_z com os eixos coordenados, temos

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k} \tag{2.22}$$

A.4 Produto vetorial de dois vetores (Seções 3.4 e 3.5)

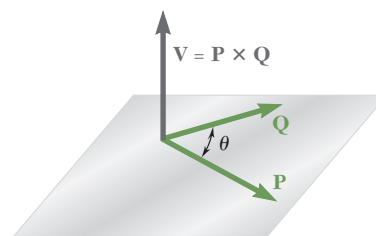
O produto vetorial de dois vetores **P** e **Q** é definido como o vetor

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

que satisfaz as seguintes condições:

1. A linha de ação de **V** é perpendicular ao plano contendo **P** e **Q** (Fig. A.6).
2. A intensidade de **V** é o produto das intensidades de **P** e **Q** pelo seno do ângulo θ formado por **P** e **Q** (cujo valor é sempre menor ou igual a 180°); temos, então

$$V = PQ \operatorname{sen} \theta \tag{3.1}$$

3. A direção e o sentido de **V** são obtidos pela *regra da mão direita.* Feche sua mão direita e posicione-a de modo que seus dedos se curvem no mesmo sentido da rotação em θ que leva o vetor **P** a ficar alinhado com o vetor **Q**; seu polegar irá então indicar a direção e o sentido do vetor **V** (Fig. A.6*b*). Note que, se **P** e **Q** não tiverem um ponto comum de aplicação, eles deverão primeiramente ser redesenhados com a origem no mesmo ponto. Os três vetores **P**, **Q** e **V** – tomados nessa ordem – formam uma *tríade da mão direita.*

(*a*)

(*b*)

Figura A.6

Os produtos vetoriais são *distributivos,* mas *não comutativos.* Temos

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.4}$$

Produtos vetoriais de vetores unitários. Segue-se da definição do produto vetorial de dois vetores que

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = 0 & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0 \end{array} \tag{3.7}$$

Componentes retangulares de produto vetorial. Decompondo os vetores **P** e **Q** em componentes retangulares, obtemos as seguintes expressões para os componentes de seu produto vetorial **V**:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \tag{3.9}$$

Na forma de determinante, temos

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

A.5 Momento de uma força em relação a um ponto (Seções 3.6 e 3.8)

O momento de uma força **F** (ou, mais geralmente, de um vetor **F**) em relação a um ponto O é definido como o produto vetorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \tag{3.11}$$

onde **r** representa o *vetor de posição* do ponto de aplicação A de **F** (Fig. A.7*a*).

De acordo com a definição do produto vetorial de dois vetores, dada na Seção A.4, o momento $\mathbf{M}_O$ deve ser perpendicular ao plano contendo O e a força **F**. Sua intensidade é igual a

$$M_O = rF \operatorname{sen} \theta = Fd \tag{3.12}$$

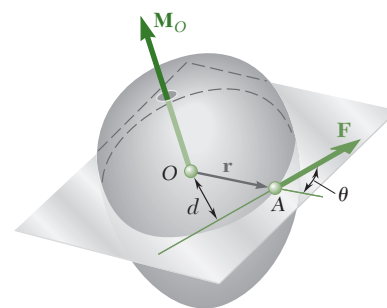



Figura A.7

onde d é a distância perpendicular de O à linha de ação de **F** e seu sentido é definido pelo sentido da rotação que traria o vetor **r** alinhado com o vetor **F**; essa rotação deve ser vista como no sentido *anti-horário* por um observador localizado na ponta de $\mathbf{M}_O$. Outra maneira de definir o sentido de $\mathbf{M}_O$ é fornecida por uma variação da *regra da mão direita:* feche sua mão direita e mantenha-a de modo que seus dedos fiquem curvados no sentido da rotação que **F** imprimiria ao corpo rígido cm relação ao eixo fixo dirigido ao longo da linha de ação de $\mathbf{M}_O$; seu polegar irá indicar o sentido do momento $\mathbf{M}_O$ (Fig. A.7*b*).

Componentes retangulares do momento de uma força. Representando por x, y e z coordenadas do ponto de aplicação A de **F**, obtemos as seguintes expressões para os componentes do momento $\mathbf{M}_O$ de **F**:

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

Na forma de determinante, temos

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.19}$$

Para calcular o momento $\mathbf{M}_B$ em relação a um ponto arbitrário B de uma força **F** aplicada em A, devemos usar o vetor $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ desenhado de B para A em vez do vetor **r**. Escrevemos

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \tag{3.20}$$

ou, usando a forma de determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.21}$$

onde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ e $z_{A/B}$ são componentes do vetor $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \qquad y_{A/B} = y_A - y_B \qquad z_{A/B} = z_A - z_B$$

A.6 Produto escalar de dois vetores (Seção 3.9)

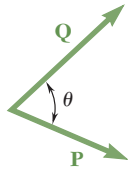
Figura A.8

O produto escalar de dois vetores **P** e **Q** é definido como o produto das intensidades de **P** e **Q** e do cosseno do ângulo θ formado por **P** e **Q** (Fig. A.8). O produto escalar de **P** e **Q** é representado por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$. Escrevemos

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \tag{3.24}$$

Produtos escalares são *comutativos* e *distributivos.*

Produtos escalares de vetores unitários. Segue-se da definição de produto escalar de dois vetores que

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 \qquad & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 \qquad & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 \qquad & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 \qquad & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Produto escalar expresso em termos de componentes retangulares. Decompondo os vetores **P** e **Q** em coordenadas retangulares, obtemos

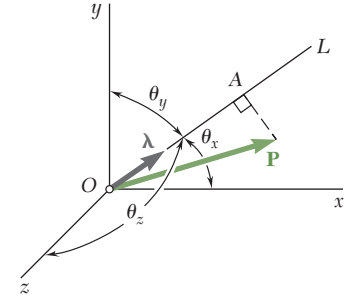
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \tag{3.30}$$

Ângulo formado por dois vetores. Segue-se de (3.24) e (3.29) que

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{PQ} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \tag{3.32}$$

Figura A.9

Projeção de um vetor em um dado eixo. A projeção de um vetor **P** sobre o eixo OL definido pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ (Fig. A.9) é

$$P_{OL} = OA = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{3.36}$$

A.7 Produto triplo misto de três vetores (Seção 3.10)

O produto triplo misto dos três vetores **S**, **P** e **Q** é definido como a expressão escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \tag{3.38}$$

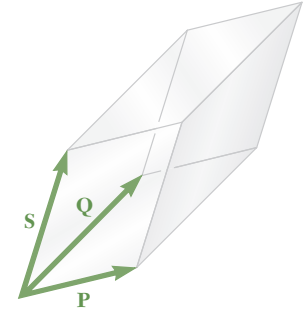
obtida formando-se o produto escalar de **S** com o produto vetorial de **P** e **Q**. Produtos triplos mistos são invariantes por *permutações cíclicas,* mas mudam de sinal com qualquer outra permutação:

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{S}) = \mathbf{Q} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{P}) = \\ = -\mathbf{S} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{P}) = -\mathbf{P} \cdot (\mathbf{S} \times \mathbf{Q}) = -\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{S}) \tag{3.39}$$

Produto triplo misto expresso em termos de componentes retangulares. O produto triplo misto de **S**, **P** e **Q** pode ser expresso na forma de um determinante

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \tag{3.41}$$

Figura A.10

O produto triplo misto $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$ mede o volume do paralelepípedo que tem os vetores **S**, **P** e **Q** como lados (Fig. A.10).

A.8 Momento de uma força em relação a um dado eixo (Seção 3.11)

O momento M_{OL} de uma força **F** (ou, de modo mais geral, de um vetor **F**) em relação a um eixo OL é definido como a projeção OC sobre o eixo OL do momento $\mathbf{M}_O$ de **F** em relação a O (Fig. A.11). Representando por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de OL, temos

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \tag{3.42}$$

ou, em forma de determinante,

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.43}$$

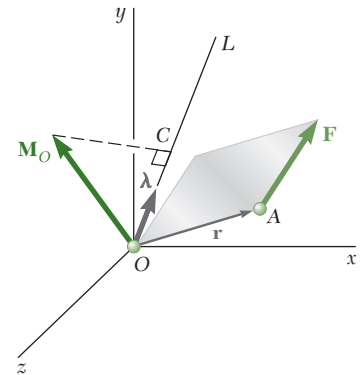



Figura A.11

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cossenos diretores do eixo OL
x, y, z = coordenadas do ponto de aplicação de **F**
F_x, F_y, F_z = componentes da força **F**

Os momentos da força **F** em relação aos três eixos coordenados são dados pelas expressões (3.18) obtidas anteriormente para os componentes retangulares do momento $\mathbf{M}_O$ de **F** em relação a O

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \tag{3.18}$$

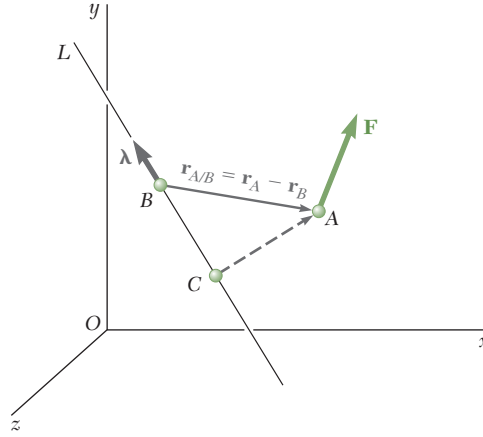



Figura A.12

De modo mais geral, o momento de uma força **F** aplicada em A em relação a um eixo que não passa pela origem é obtido escolhendo-se um ponto arbitrário B sobre o eixo (Fig. A.12) e determinando a projeção sobre o eixo BL do momento $\mathbf{M}_B$ de **F** em relação a B. Escrevemos

$$M_{BL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_B = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \tag{3.45}$$

onde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa o vetor desenhado de B para A. Expressando M_{BL} forma de um determinante, temos

$$M_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

onde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z$ = cossenos diretores do eixo BL

$x_{A/B} = x_A - x_B, y_{A/B} = y_A - y_B, z_{A/B} = z_A - z_B$
F_x, F_y, F_z = componentes da força **F**

Deve-se observar que o resultado obtido é independente da escolha do ponto B no eixo dado; o mesmo resultado teria sido obtido se o ponto C tivesse sido escolhido em vez de B.

APÊNDICE B

Momentos de inércia de massas

B.1 Momento de inércia de uma massa

Considere um pequeno corpo de massa Δm fixado em uma barra de massa desprezível que pode girar livremente em torno de um eixo AA' (Fig. B.1*a*). Se um binário é aplicado ao sistema, a barra e o corpo, considerados inicialmente em repouso, começarão a girar em torno de AA'. Os detalhes desse movimento serão estudados posteriormente. No momento, queremos apenas indicar que o tempo necessário para que o sistema alcance uma dada velocidade de rotação é proporcional à massa Δm e ao quadrado da distância r. O produto $r^2 \Delta m$ fornece, portanto, uma medida da *inércia* do sistema, ou seja, uma medida da resistência que o sistema oferece quando tentamos colocá-lo em movimento. Por essa razão, o produto $r^2 \Delta m$ é denominado *momento de inércia* do corpo de massa Δm em relação ao eixo AA'.

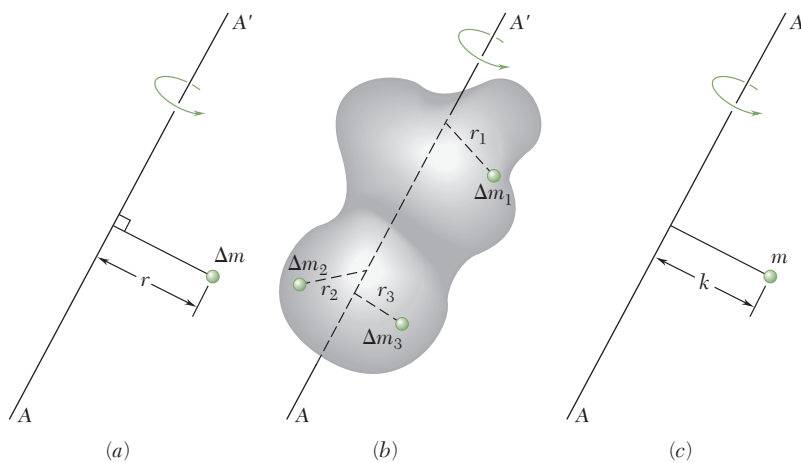



Figura B.1

Considere agora um corpo de massa m que deve ser posto para girar em torno de um eixo AA' (Fig. B.1*b*). Dividindo o corpo em elementos de massa Δm_1, Δm_2, etc., verificamos que a resistência do corpo ao movimento de rotação é medida pela soma $r_1^2 \Delta m_1 + r_2^2 \Delta m_2 + \cdots$. Essa soma define, portanto, o momento de inércia do corpo em relação ao eixo AA'. Aumentando o número de elementos, concluímos que o momento de inércia é igual, no limite, à integral

$$I = \int r^2 \, dm \tag{B.1}$$

O *raio de giração* k do corpo em relação ao eixo AA' é definido pela relação

$$I = k^2 m \qquad \text{ou} \qquad k = \sqrt{\frac{1}{m}} \tag{B.2}$$

Logo, o raio de giração k representa a distância a que toda massa do corpo deve ser concentrada para que seu momento de inércia em relação a AA' permaneça inalterado (Fig. B.1*c*). Seja mantido em seu formato original (Fig. B.1*b*), seja concentrado da maneira mostrada na Fig. B.1*c*, o corpo de massa m reagirá do mesmo modo a uma rotação, ou *giração,* em torno de AA'.

No Sistema Internacional de Unidades, o raio de giração k é expresso em metros e a massa m em quilogramas, e assim a unidade usada para o momento de inércia de um corpo é $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

O momento de inércia de um corpo em relação a um eixo de coordenadas pode ser facilmente expresso em termos das coordenadas x, y, z do elemento de massa dm (Fig. B.2). Observando, por exemplo, que o quadrado da distância r do elemento dm ao eixo y é $z^2 + x^2$, escrevemos o momento de inércia do corpo em relação ao eixo y como

$$I_y = \int r^2\, dm = \int (z^2 + x^2)\, dm$$

Figura B.2

Expressões similares podem ser obtidas para os momentos de inércia em relação aos eixos x e z. Escrevemos

$$I_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$I_y = \int (z^2 + x^2)\, dm \tag{B.3}$$
$$I_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

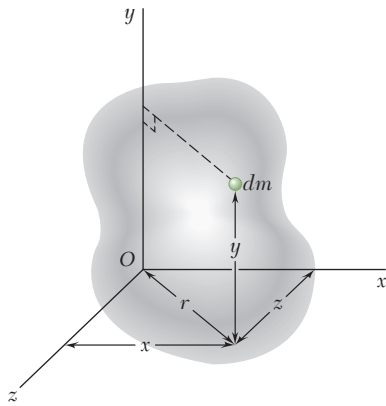



Foto B.1 Como você analisará no curso de dinâmica, o comportamento rotacional de uma árvore de comando de válvulas depende do seu momento de inércia do corpo em relação ao eixo de rotação.

B.2 Teorema dos eixos paralelos

Considere um corpo de massa m. Seja $Oxyz$ um sistema de coordenadas retangulares cuja origem está em um ponto arbitrário O, e $Gx'y'z'$ um sistema de *eixos centroidais* paralelos, ou seja, um sistema cuja origem está no centro de gravidade G do corpo* e cujos eixos x', y', z' são pa-

* Observe que o termo *centroidal* é usado aqui para definir um eixo que passa pelo centro de gravidade G do corpo, seja G coincidente ou não com o centroide do sólido representativo do corpo.

ralelos aos eixos x, y, z, respectivamente (Fig. B.3). Representando por $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ as coordenadas de G em relação a $Oxyz$, escrevemos as seguintes relações entre as coordenadas x, y, z do elemento dm em relação a $Oxyz$ e suas coordenadas x', y', z' em relação aos eixos centroidais $Gx'y'z'$:

$$x = x' + \bar{x} \qquad y = y' + \bar{y} \qquad z = z' + \bar{z} \tag{B.4}$$

Figura B.3

Voltando às Eqs. (B.3), podemos expressar o momento de inércia do corpo em relação ao eixo x da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\, dm = \int [(y' + \bar{y})^2 + (z' + \bar{z})^2]\, dm \\ &= \int (y'^2 + z'^2)\, dm + 2\bar{y}\int y'\, dm + 2\bar{z}\int z'\, dm + (\bar{y}^2 + \bar{z}^2)\int dm \end{aligned}$$

A primeira integral nessa expressão representa o momento de inércia $\bar{I}_{x'}$ do corpo em relação ao eixo centroidal x'; a segunda e a terceira integrais representam o momento de primeira ordem do corpo em relação aos planos $z'x'$ e $x'y'$, respectivamente, e, como ambos os planos contêm G, as duas integrais são *nulas;* a última integral é igual à massa total m do corpo. Escrevemos, então,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) \tag{B.5}$$

e, de modo análogo,

$$I_y = \bar{I}_{y'} + m(\bar{z}^2 + \bar{x}^2) \qquad I_z = \bar{I}_{z'} + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \tag{B.5'}$$

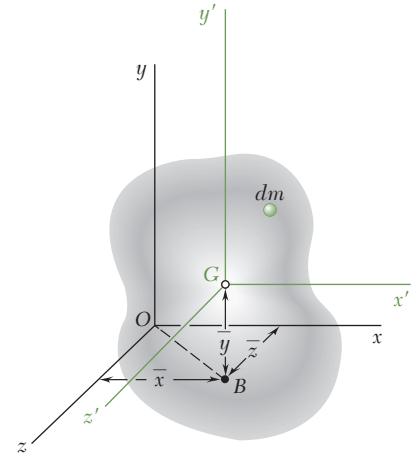
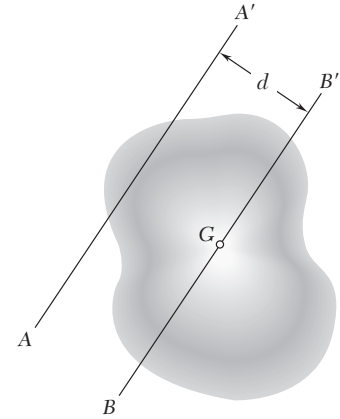
Pela Fig. B.3 verificamos facilmente que a soma $\bar{z}^2 + \bar{x}^2$ representa o quadrado da distância OB, entre os eixos y e y'. Analogamente, $\bar{y}^2 + \bar{z}^2$ e $\bar{x}^2 + \bar{y}^2$ representam os quadrados da distância entre os eixos x e x' e os eixos z e z', respectivamente. Portanto, representando por d a distância entre um eixo arbitrário AA' e um eixo centroidal paralelo BB' (Fig. B.4), podemos escrever a seguinte relação geral entre o momento de inércia I do corpo em relação a AA' e seu momento de inércia $\bar{I}$ em relação a BB':

Figura B.4

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{B.6}$$

Expressando os momentos de inércia em termos dos raios de giração correspondentes, podemos escrever também

$$k^2 = \bar{k}^2 + d^2 \tag{B.7}$$

onde k e $\bar{k}$ representam os raios de giração do corpo em relação a AA' e BB', respectivamente.

B.3 Momentos de inércia de placas delgadas

Considere uma placa delgada de espessura uniforme t, feita de um material homogêneo de massa específica ρ (massa específica = massa por unidade de volume). O momento de inércia de massa da placa* em relação a um eixo AA' *contido no plano* da placa (Fig. B.5*a*) é

$$I_{AA',\text{ massa}} = \int r^2\, dm$$

Uma vez que $dm = \rho t\, dA$, escrevemos

$$I_{AA',\text{ massa}} = \rho t \int r^2\, dA$$

Mas r representa a distância do elemento de área dA ao eixo AA'; logo, a integral é igual ao momento de inércia da superfície da placa em relação a AA'. Escrevemos então:

$$I_{AA',\text{ massa}} = \rho t I_{AA',\text{ área}} \qquad \text{(B.8)}$$

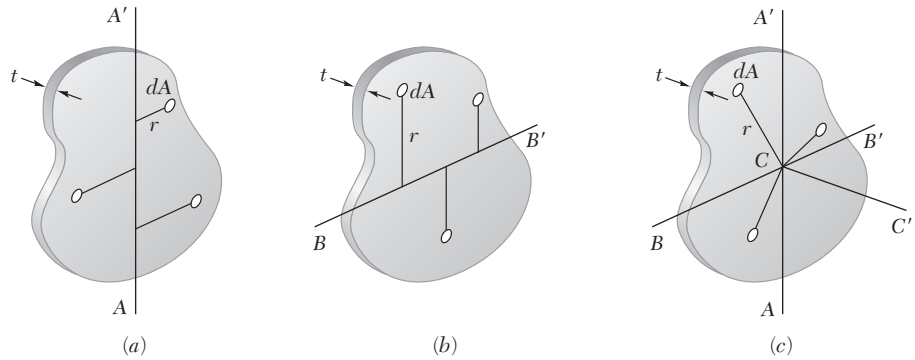



Figura B.5

De modo semelhante, para um eixo BB' contido no plano da placa e perpendicular a AA' (Fig. B.5*b*), temos

$$I_{BB',\text{ massa}} = \rho t I_{BB',\text{ área}} \qquad \text{(B.9)}$$

Considerando agora o eixo CC', *perpendicular* ao plano da placa e que passa pelo ponto de interseção C de AA' e BB' (Fig. B.5*c*), escrevemos

$$I_{CC',\text{ massa}} = \rho t J_{C,\text{ área}} \qquad \text{(B.10)}$$

sendo J_C o momento de inércia *polar* da superfície da placa em relação ao ponto C.

Recordando a relação $J_C = I_{AA'} + I_{BB'}$ que existe entre os momentos de inércia retangular e polar de uma superfície, escrevemos a seguinte relação entre os momentos de inércia de corpo de uma placa delgada:

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} \qquad \text{(B.11)}$$

* Os momentos de inércia do corpo e da superfície foram subscritos por "massa" e "área", respectivamente.

Placa retangular. No caso de uma placa retangular de lados a e b (Fig. B.6), obtemos os seguintes momentos de inércia de massa em relação a eixos que passam pelo centro de gravidade da placa:

$$I_{AA',\,\text{massa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}a^3 b)$$
$$I_{BB',\,\text{massa}} = \rho t I_{BB',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{12}ab^3)$$

Observando que o produto ρabt é igual à massa m da placa, escrevemos os momentos de inércia de corpo de uma placa retangular delgada da seguinte maneira:

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \qquad \text{(B.12)}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \qquad \text{(B.13)}$$

Figura B.6

Placa circular. No caso de uma placa circular, ou disco, de raio r (Fig. B.7), escrevemos

$$I_{AA',\,\text{massa}} = \rho t I_{AA',\,\text{área}} = \rho t(\tfrac{1}{4}\pi r^4)$$

Observando que o produto $\rho\pi r^2 t$ é igual à massa m da placa e que $I_{AA'} = I_{BB'}$, escrevemos os momentos de inércia de corpo de uma placa circular delgada da seguinte maneira:

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \qquad \text{(B.14)}$$
$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad \text{(B.15)}$$

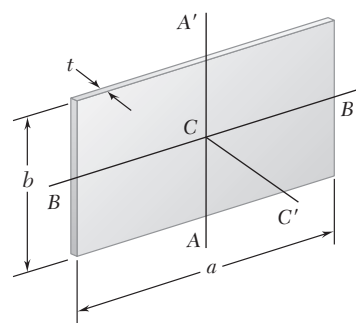
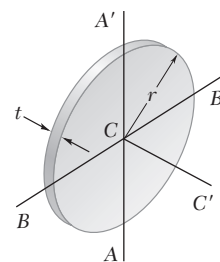



Figura B.7

B.4 Determinação do momento de inércia de um corpo tridimensional por integração

O momento de inércia de um corpo tridimensional é obtido pelo cálculo da integral $I = \int r^2\,dm$. Se o corpo é feito de um material homogêneo de densidade ρ, o elemento de massa dm é igual a ρdV e podemos escrever $I = \rho \int r^2\,dV$. Essa integral depende somente do formato do corpo. Logo, para se calcular o momento de inércia de um corpo tridimensional, em geral será preciso efetuar uma integração tripla ou, pelo menos, uma integração dupla.

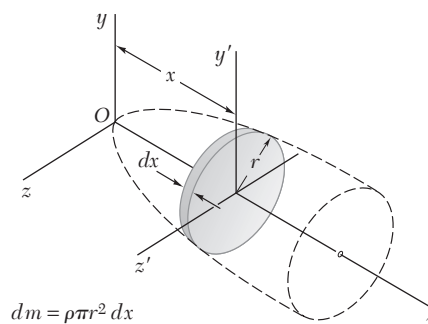
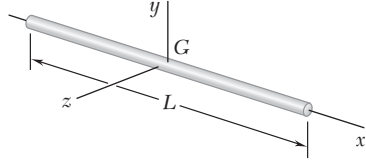
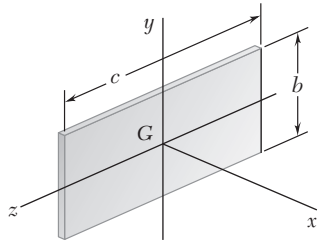
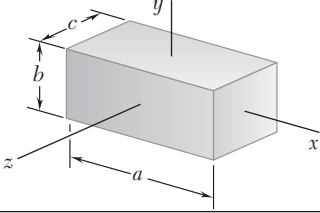
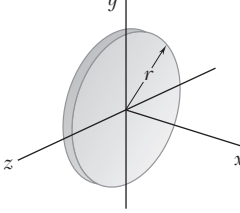
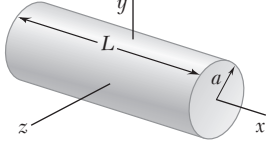
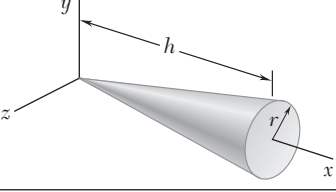
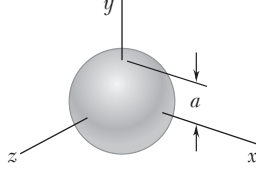
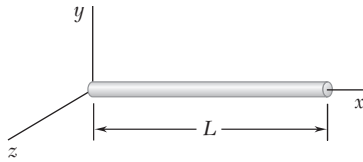
Todavia, se o corpo tiver dois planos de simetria, em geral será possível determinar o momento de inércia do corpo com uma integração simples, escolhendo como elemento de massa dm uma fatia delgada perpendicular aos planos de simetria. No caso de corpos de revolução, por exemplo, o elemento de massa seria um disco delgado (Fig. B.8). Usando a equação (B.15), o momento de inércia do disco em relação ao eixo de revolução pode ser expresso do modo indicado na Fig. B.8. Seu momento de inércia em relação a cada um dos outros dois eixos de coordenadas é obtido pela equação (B.14) e pelo teorema dos eixos paralelos. A integração das expressões assim obtidas conduz aos momentos de inércia do corpo.

$$dm = \rho\pi r^2\,dx$$
$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \left(\tfrac{1}{4}r^2 + x^2\right)dm$$

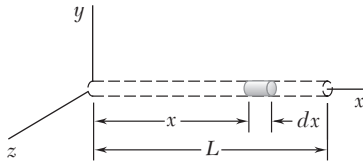
Figura B.8 Determinação do momento de inércia de um corpo de revolução.

B.5 Momentos de inércia de corpos compostos

Os momentos de inércia de alguns formatos simples estão mostrados na Fig. B.9. Para um corpo constituído de vários desses formatos simples, pode-se obter o momento de inércia do corpo em relação a um dado eixo calculando-se primeiro os momentos de inércia de suas partes componentes em relação ao eixo desejado e adicionando-os em seguida. Tal como no caso de superfícies, o raio de giração de um corpo composto *não pode* ser obtido pela adição dos raios de giração de suas partes componentes.

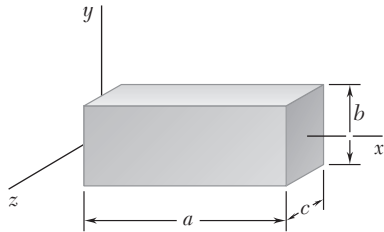
Barra esbelta		$I_y = I_z = \frac{1}{12} mL^2$
Placa retangular delgada		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} mc^2$ $I_z = \frac{1}{12} mb^2$
Prisma retangular		$I_x = \frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12} m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
Disco delgado		$I_x = \frac{1}{2} mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4} mr^2$
Cilindro circular		$I_x = \frac{1}{2} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12} m(3a^2 + L^2)$
Cone circular		$I_x = \frac{3}{10} ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5} m(\frac{1}{4} a^2 + h^2)$
Esfera		$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} ma^2$

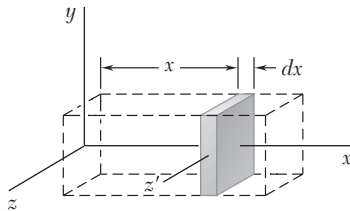
Figura B.9 Momentos de inércia de massa de formas geométricas simples.

PROBLEMA RESOLVIDO B.1

Determine o momento de inércia de uma barra esbelta de comprimento L e massa m em relação a um eixo perpendicular à barra passando por uma das extremidades da barra.

SOLUÇÃO

Escolhendo o elemento diferencial de massa mostrado, escrevemos

$$dm = \frac{m}{L}dx$$

$$I_y = \int x^2\,dm = \int_0^L x^2 \frac{m}{L}\,dx = \left[\frac{m}{L}\frac{x^3}{3}\right]_0^L \qquad I_y = \tfrac{1}{3}mL^2 \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO B.2

Para o prisma retangular homogêneo mostrado, determine o momento de inércia em relação ao eixo z.

SOLUÇÃO

Escolhemos como elemento diferencial de massa o elemento delgado mostrado; logo,

$$dm = \rho bc\,dx$$

Voltando à Seção B.3, verificamos que o momento de inércia do elemento em relação ao eixo z' é

$$dI_{z'} = \tfrac{1}{12}b^2\,dm$$

Aplicando o teorema dos eixos paralelos, obtemos o momento de inércia de massa do elemento em relação ao eixo z.

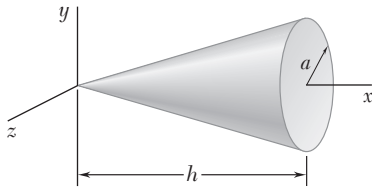
$$dI_z = dI_{z'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{12}b^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx$$

Integrando de $x = 0$ até $x = a$, obtemos

$$I_z = \int dI_z = \int_0^a (\tfrac{1}{12}b^2 + x^2)\,\rho bc\,dx = \rho abc(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2)$$

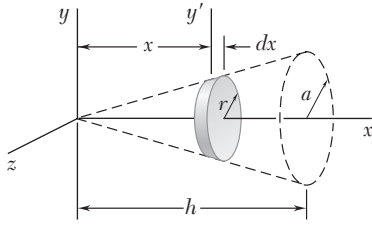
Como a massa total do prisma é $m = \rho abc$, podemos escrever

$$I_z = m(\tfrac{1}{12}b^2 + \tfrac{1}{3}a^2) \qquad I_z = \tfrac{1}{12}m(4a^2 + b^2)$$

Observamos que, se o prisma é delgado, sendo b pequeno em comparação com a, a expressão para I_z reduz-se a $\frac{1}{3}ma^2$, que é o resultado obtido no Problema Resolvido B.1 quando $L = a$.

PROBLEMA RESOLVIDO B.3

Determine o momento de inércia de um cone circular em relação a (*a*) seu eixo longitudinal, (*b*) um eixo que passa pelo vértice do cone e é perpendicular ao seu eixo longitudinal e (*c*) um eixo que passa pelo centroide do cone e é perpendicular a seu eixo longitudinal.

SOLUÇÃO

Escolhemos o elemento diferencial de massa mostrado na figura.

$$r = a\frac{x}{h} \qquad dm = \rho\pi r^2\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx$$

a. Momento de inércia I_x. Usando a expressão deduzida na Seção B.3 para um disco delgado, calculamos o momento de inércia de massa do elemento diferencial em relação ao eixo x.

$$dI_x = \tfrac{1}{2}r^2\,dm = \tfrac{1}{2}\left(a\frac{x}{h}\right)^2\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx$$

Integrando de $x = 0$ até $x = h$, obtemos

$$I_x = \int dI_x = \int_0^h \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}x^4\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\pi\frac{a^4}{h^4}\frac{h^5}{5} = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h$$

Como a massa total do cone é $m = \frac{1}{3}\rho\pi a^2 h$, podemos escrever

$$I_x = \tfrac{1}{10}\rho\pi a^4 h = \tfrac{3}{10}a^2(\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h) = \tfrac{3}{10}ma^2 \qquad I_x = \tfrac{3}{10}ma^2$$

b. Momento de inércia I_y. É usado o mesmo elemento diferencial. Aplicando o teorema dos eixos paralelos e usando a expressão deduzida na Seção B.3 para um disco delgado, escrevemos

$$dI_y = dI_{y'} + x^2\,dm = \tfrac{1}{4}r^2\,dm + x^2\,dm = (\tfrac{1}{4}r^2 + x^2)\,dm$$

Substituindo as expressões para r e dm na equação, obtemos

$$dI_y = \left(\frac{1}{4}\frac{a^2}{h^2}x^2 + x^2\right)\left(\rho\pi\frac{a^2}{h^2}x^2\,dx\right) = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx$$

$$I_y = \int dI_y = \int_0^h \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)x^4\,dx = \rho\pi\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{a^2}{4h^2} + 1\right)\frac{h^5}{5}$$

Introduzindo a massa total m do cone, reescrevemos I_y da seguinte maneira:

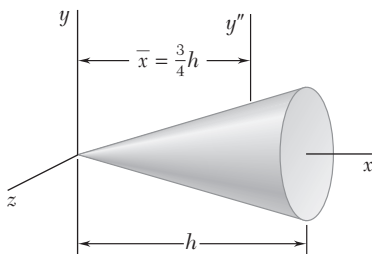
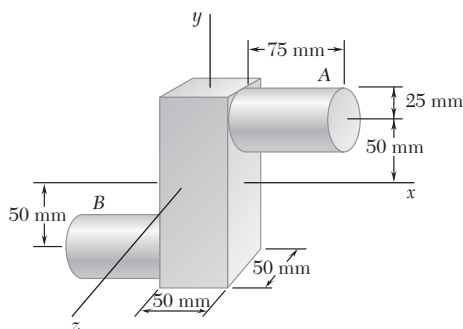
$$I_y = \tfrac{3}{5}(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2)\tfrac{1}{3}\rho\pi a^2 h \qquad I_y = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) \blacktriangleleft$$

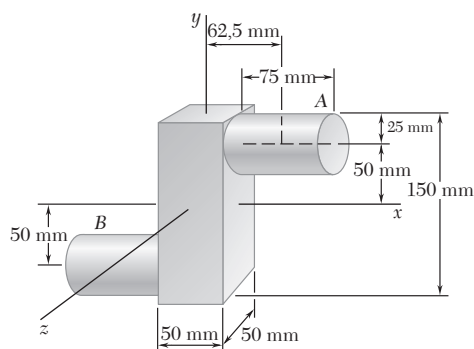
c. Momento de inércia $\bar{I}_{y''}$. Aplicamos o teorema dos eixos paralelos e escrevemos

$$I_y = \bar{I}_{y''} + m\bar{x}^2$$

Resolvendo para $\bar{I}_{y''}$ e voltando à Fig. 5.21, onde $\bar{x} = \frac{3}{4}h$, temos

$$\bar{I}_{y''} = I_y - m\bar{x}^2 = \tfrac{3}{5}m(\tfrac{1}{4}a^2 + h^2) - m(\tfrac{3}{4}h)^2$$

$$\bar{I}_{y''} = \tfrac{3}{20}m(a^2 + \tfrac{1}{4}h^2) \blacktriangleleft$$

PROBLEMA RESOLVIDO B.4

Uma peça de aço forjado consiste em um prisma retangular de 150 × 50 × 50 mm e dois cilindros de 50 mm de diâmetro e 75 mm de comprimento, tal como mostra a figura. Determine os momentos de inércia da peça em relação aos eixos de coordenadas sabendo que o peso específico do aço é 7.850 kg/m³.

SOLUÇÃO

Cálculo das massas ***Prisma***

$$V = (0{,}05\text{m})(0{,}05\text{m})(0{,}150\text{m}) = 3{,}75 \times 10^{-4}\ \text{m}^3$$
$$m = (3{,}75 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(7.850\ \text{kg/m}^3)$$
$$= 2{,}94\ \text{kg}$$

Cada cilindro

$$V = \pi(0{,}025\text{m})^2(0{,}075\text{m}) = 1{,}473 \times 10^{-4}\text{m}^3$$
$$= (1{,}473 \times 10^{-4}\ \text{m}^3)(7.850\ \text{kg/m}^3)$$
$$= 1{,}156\ \text{kg}$$

Momentos de inércia. Os momentos de inércia de cada componente são calculados a partir da Fig. B.9, usando-se o teorema dos eixos paralelos quando necessário. Observe que todos os comprimentos são expressos em centímetros.

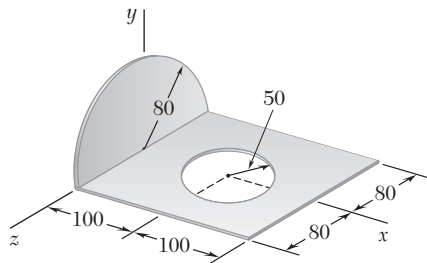
Prisma

$$I_x = I_z = \frac{1}{12}(2{,}94\ \text{kg})\left[\left(\frac{150}{1.000}\text{m}\right)^2 + \left(\frac{50}{1.000}\text{m}\right)^2\right] = 6{,}125 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \frac{1}{12}(2{,}94\ \text{kg})\left[\left(\frac{50}{1.000}\text{m}\right)^2 + \left(\frac{50}{1.000}\text{m}\right)^2\right] = 1{,}225 \times 10^{-3}\text{kg}\cdot\text{m}^2$$

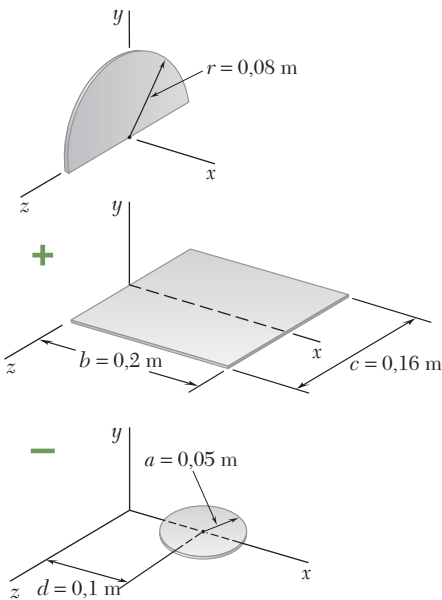
Cada cilindro

$$I_x = \tfrac{1}{2}ma^2 + m\bar{y}^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}156\ \text{kg})\left(\frac{25}{1.000}\text{m}\right)^2 + (1{,}156\ \text{kg})\left(\frac{50}{1.000}\text{m}\right)^2 = 3{,}251 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{12}m\left(3a^2 + L^2\right) + m\bar{x}^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}156\ \text{kg})\left[3 \times \left(\frac{25}{1.000}\text{m}\right)^2 + \left(\frac{75}{1.000}\text{m}\right)^2\right]$$
$$+ (1{,}156\ \text{kg})\left(\frac{62{,}5}{1.000}\text{m}\right)^2 = 5{,}238 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$
$$I_z = \frac{1}{12}m\left(3a^2 + L^2\right) + m\left(\bar{x}^2 + \bar{y}^2\right) = \tfrac{1}{12}(1{,}156\ \text{kg})\left[3 \times \left(\frac{25}{1.000}\text{m}\right)^2 + \left(\frac{75}{1.000}\text{m}\right)^2\right]$$
$$+ (1{,}156\ \text{kg})\left[\left(\frac{62{,}5}{1.000}\text{m}\right)^2 + \left(\frac{50}{1.000}\text{m}\right)^2\right] = 8{,}128 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Todo o corpo. Adicionando os valores obtidos,

$I_x = 6{,}125 \times 10^{-3} + 2(3{,}251 \times 10^{-3})$ $\quad I_x = 12{,}63 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ ◀
$I_y = 1{,}225 \times 10^{-3} + 2(5{,}238 \times 10^{-3})$ $\quad I_y = 11{,}70 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ ◀
$I_z = 6{,}125 \times 10^{-3} + 2(8{,}128 \times 10^{-3})$ $\quad I_z = 22{,}4 \times 10^{-3}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$ ◀

Dimensões em mm

PROBLEMA RESOLVIDO B.5

Uma placa de aço delgada de 4 mm de espessura é cortada e dobrada para formar o elemento de máquina mostrado na figura. Sabendo que a densidade do aço é 7.850 kg/m^3, determine os momentos de inércia do elemento de máquina em relação aos eixos de coordenadas.

SOLUÇÃO

Observemos que o elemento de máquina consiste em uma placa semicircular e uma placa retangular, da qual foi retirada uma placa circular.

Cálculo das massas. ***Placa semicircular***

$$V_1 = \tfrac{1}{2}\pi r^2 t = \tfrac{1}{2}\pi(0{,}08 \text{ m})^2(0{,}004 \text{ m}) = 40{,}21 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_1 = \rho V_1 = (7{,}85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(40{,}21 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0{,}3156 \text{ kg}$$

Placa retangular

$$V_2 = (0{,}200 \text{ m})(0{,}160 \text{ m})(0{,}004 \text{ m}) = 128 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_2 = \rho V_2 = (7{,}85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(128 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 1{,}005 \text{ kg}$$

Placa circular

$$V_3 = \pi a^2 t = \pi(0{,}050 \text{ m})^2(0{,}004 \text{ m}) = 31{,}42 \times 10^{-6} \text{ m}^3$$
$$m_3 = \rho V_3 = (7{,}85 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(31{,}42 \times 10^{-6} \text{ m}^3) = 0{,}2466 \text{ kg}$$

Momentos de inércia. Adotando o método apresentado na Seção B.3, calculamos os momentos de inércia de cada componente.

Placa semicircular. Observamos na Fig. B.9 que, para uma placa circular de massa m e raio r,

$$I_x = \tfrac{1}{2}mr^2 \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{4}mr^2$$

Devido à simetria, temos que, para uma placa semicircular,

$$I_x = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}mr^2) \qquad I_y = I_z = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{4}mr^2)$$

Como a massa de uma placa semicircular é $m_1 = \tfrac{1}{2}$m, temos

$$I_x = \tfrac{1}{2}m_1 r^2 = \tfrac{1}{2}(0{,}3156 \text{ kg})(0{,}08 \text{ m})^2 = 1{,}010 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}mr^2) = \tfrac{1}{4}m_1 r^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}3156 \text{ kg})(0{,}08 \text{ m})^2 = 0{,}505 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa retangular

$$I_x = \tfrac{1}{12}m_2 c^2 = \tfrac{1}{12}(1{,}005 \text{ kg})(0{,}16 \text{ m})^2 = 2{,}144 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{3}m_2 b^2 = \tfrac{1}{3}(1{,}005 \text{ kg})(0{,}2 \text{ m})^2 = 13{,}400 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_x + I_z = (2{,}144 + 13{,}400)(10^{-3}) = 15{,}544 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Placa circular

$$I_x = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466 \text{ kg})(0{,}05 \text{ m})^2 = 0{,}154 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}m_3 a^2 + m_3 d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(0{,}2466 \text{ kg})(0{,}05 \text{ m})^2 + (0{,}2466 \text{ kg})(0{,}1 \text{ m})^2 = 2{,}774 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_z = \tfrac{1}{4}m_3 a^2 + m_3 d^2 = \tfrac{1}{4}(0{,}2466 \text{ kg})(0{,}05 \text{ m})^2 + (0{,}2466 \text{ kg})(0{,}1 \text{ m})^2$$
$$= 2{,}620 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Todos os elementos de máquina

$I_x = (1{,}010 + 2{,}144 - 0{,}154)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $\quad I_x = 3{,}00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ◀

$I_y = (0{,}505 + 15{,}544 - 2{,}774)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $\quad I_y = 13{,}28 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ◀

$I_z = (0{,}505 + 13{,}400 - 2{,}620)(10^{-3}) \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ $\quad I_z = 11{,}29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ◀

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, apresentamos o *momento de inércia de massa* e o *raio de giração* de um corpo tridimensional em relação a um determinado eixo [Eqs. (B.1) e (B.2)]. Também deduzimos um *teorema dos eixos paralelos* referente a momentos de inércia de massa e discutimos o cálculo dos momentos de inércia de massa de placas delgadas e corpos tridimensionais.

1. Cálculo dos momentos de inércia de massa. O momento de inércia de massa I de um corpo em relação a um dado eixo pode ser calculado diretamente a partir da definição dada na Eq. (B.l) para formatos comuns [Problema Resolvido B.1]. Em muitos casos, porém, é necessário dividir o corpo em fatias delgadas, calcular o momento de inércia de uma fatia típica em relação ao eixo dado – usando o teorema dos eixos paralelos – e integrar a expressão obtida.

2. Aplicação do teorema dos eixos paralelos. Na Seção B.2, deduzimos o teorema dos eixos paralelos para momentos de inércia de massa

$$I = \bar{I} + md^2 \qquad \text{(B.6)}$$

estabelecendo que o momento de inércia I de um corpo de massa m em relação a um dado eixo é igual à soma do momento de inércia $\bar{I}$ desse corpo em relação ao *eixo centroidal paralelo* e do produto md^2, sendo d a distância entre os dois eixos. Quando o momento de inércia de um corpo tridimensional é calculado em relação a um dos eixos de coordenadas, d^2 pode ser substituído pela soma dos quadrados das distâncias medidas ao longo dos outros dois eixos de coordenadas [Eqs. (B.5) e (B.5′)].

3. Evitando erros de unidades. Para evitar erros, é essencial que você seja consistente no uso de unidades. Assim, recomendamos enfaticamente que você inclua as unidades ao efetuar seus cálculos.

4. Cálculo do momento de inércia de massa de placas delgadas. Mostramos na Seção B.3 que o momento de inércia de massa de uma placa delgada em relação a um dado eixo pode ser obtido pelo produto do momento de inércia correspondente da superfície da placa, da massa específica ρ e da espessura t da placa [Eqs. de (B.8) a (B.10)]. Observe que, sendo o eixo CC' na Fig. B.5 *perpendicular à placa*, $I_{CC', \text{massa}}$ é associado ao momento de inércia *polar* $J_{C, \text{área}}$.

Em vez de calcular diretamente o momento de inércia de uma placa delgada em relação a um eixo especificado, às vezes você pode concluir que é mais conveniente calcular primeiro seu momento de inércia em relação a um eixo paralelo ao eixo especificado e, em seguida, aplicar o teorema dos eixos paralelos. Além disso, para determinar o momento de inércia de uma placa delgada em relação a um eixo perpendicular à placa, você pode querer calcular primeiro seus momentos de inércia em relação a dois eixos perpendiculares no plano e, em seguida, usar a Eq. (B.11). Finalmente, lembre-se de que a massa de uma placa de área A, espessura t e massa específica ρ é $m = \rho t A$.

(*continua*)

5. Determinação do momento de inércia de um corpo por integração direta simples. Discutimos na Seção B.4 e exemplificamos nos Problemas Resolvidos B.2 e B.3 de que maneira se pode usar uma integração simples para calcular o momento de inércia de um corpo que pode ser dividido em uma série de elementos delgados paralelos. Nesses casos, às vezes você precisará expressar a massa do corpo em termos da densidade e das dimensões do corpo. Assim como nos Problemas Resolvidos, considerando que o corpo tenha sido dividido em elementos delgados perpendiculares ao eixo x, você precisará expressar as dimensões de cada elemento em função da variável x.

a. No caso especial de um corpo de revolução, o elemento é um disco delgado e as equações fornecidas na Fig. B.8 devem ser usadas para determinar o momento de inércia do corpo [Problema Resolvido B.3].

b. No caso geral, quando o corpo não é de revolução, o elemento diferencial não é um disco, mas um elemento delgado de formato diferente, e as equações da Fig. B.8 não podem ser usadas. Veja, por exemplo, o Problema Resolvido B.2, em que o elemento era uma placa delgada retangular. Para configurações mais complexas, você pode querer usar uma ou mais das seguintes equações, baseadas nas Eqs. (B.5) e (B.5′) da Seção B.2.

$$dI_x = dI_{x'} + (\bar{y}_{el}^2 + \bar{z}_{el}^2)\,dm$$
$$dI_y = dI_{y'} + (\bar{z}_{el}^2 + \bar{x}_{el}^2)\,dm$$
$$dI_z = dI_{z'} + (\bar{x}_{el}^2 + \bar{y}_{el}^2)\,dm$$

onde as placas indicam os eixos centroidais de cada elemento e onde $\bar{x}_{el}$, $\bar{y}_{el}$, $\bar{z}_{el}$ representam as coordenadas do seu centroide. Os momentos de inércia centroidais do elemento são determinados da maneira descrita anteriormente para uma placa delgada: voltando à Fig. 9.12, calcule os momentos de inércia correspondentes de superfície do elemento e multiplique o resultado pela densidade específica ρ e pela espessura t do elemento. Além disso, considerando que o corpo tenha sido dividido em elementos delgados perpendiculares ao eixo x, lembre-se de que você pode obter $dI_x{}'$ adicionando $dI_{y'}$ e $dI_z{}'$, em vez de calculá-lo diretamente. Finalmente, usando a geometria do corpo, expresse o resultado obtido em termos da variável única x e integre-o em x.

6. Cálculo do momento de inércia de um corpo composto. Conforme estabelecemos na Seção B.5, o momento de inércia de um corpo composto em relação a um eixo especificado é igual à soma dos momentos de inércia de seus componentes em relação ao mesmo eixo. Os Problemas Resolvidos B.4 e B.5 ilustram o método de solução adequado. Você deve se lembrar também de que o momento de inércia de um componente só será negativo se o componente estiver *removido* (como no caso de um furo).

Embora os problemas de corpos compostos desta seção sejam relativamente diretos, você precisará trabalhar com cuidado para evitar erros de cálculo. Além disso, se alguns dos momentos de inércia de que você necessitar não forem dados na Fig. B.9, você terá de deduzir suas próprias equações usando as técnicas desta seção.

PROBLEMAS

B.1 Determine o momento de inércia da massa de um anel de massa m cortado de uma placa delgada uniforme em relação (*a*) ao eixo AA', (b) ao eixo centroidal CC' que é perpendicular ao plano do anel.

Figura PB.1

B.2 Um placa delgada semielíptica tem massa m. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (*a*) ao eixo centroidal BB', (*b*) ao eixo centroidal CC' perpendicular à placa.

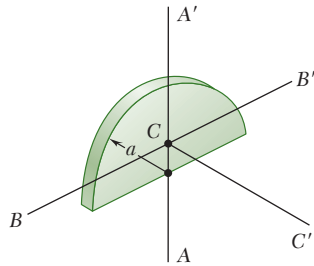



Figura PB.2

Figura PB.3

B.3 O quarto de anel mostrado na figura tem massa m e foi cortado de uma placa delgada uniforme. Sabendo que $r_1 = \frac{1}{2}r_2$ determine o momento de inércia de massa do quarto de anel em relação (*a*) ao eixo AA', (*b*) ao eixo centroidal CC' perpendicular ao plano do quarto de anel.

B.4 O *spandrel* parabólico da figura foi cortado de uma placa delgada uniforme. Denotando a massa do *spandrel* como m, determine o momento de inércia da massa em relação (*a*) ao eixo BB', (*b*) ao eixo DD' que é perpendicular ao *spandrel*.

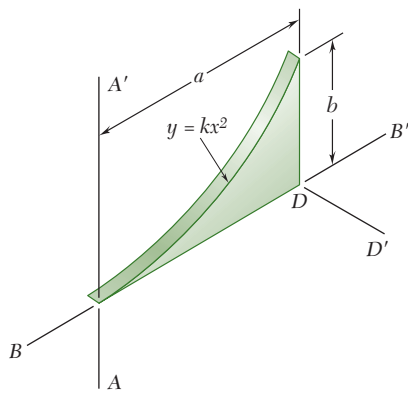
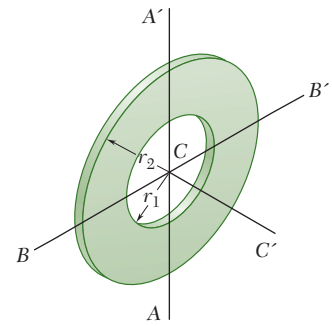
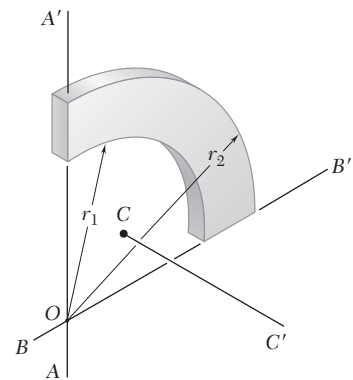
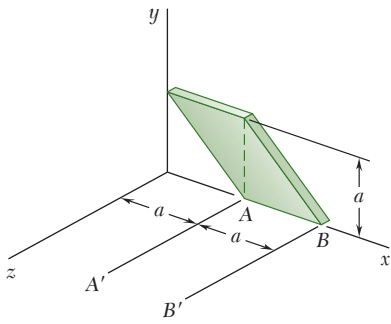
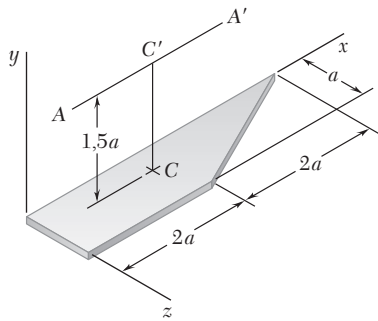



Figura PB.4

Figuras PB.5 e *PB.6*

Figuras PB.7 e PB.8

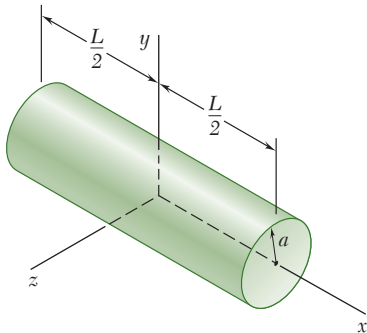



Figura *PB.10*

B.5 Uma placa delgada de massa m foi cortada em forma de um paralelogramo como mostrado na figura. Determine o momento de inércia da massa da placa em relação a (a) ao eixo x, (b) ao eixo BB', que é perpendicular à placa.

B.6 Uma placa delgada de massa m foi cortada em forma de um paralelogramo como mostrado na figura. Determine o momento de inércia da massa da placa em relação a (a) ao eixo x, (b) ao eixo y.

B.6 A thin plate of mass m was cut in the shape of a parallelogram as shown. Determine the mass moment of inertia of the plate with respect to (a) the y axis, (b) the axis AA', which is perpendicularto the plate.

B.7 Uma placa delgada de massa m tem o formato trapezoidal mostrado na figura. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (a) ao eixo x, (b) ao eixo y.

B.8 Uma placa delgada de massa m tem o formato trapezoidal mostrado na figura. Determine o momento de inércia de massa da placa em relação (a) ao eixo centroidal CC' perpendicular à placa, (b) ao eixo AA' paralelo ao eixo x e localizado a uma distância $1{,}5a$ da placa.

B.9 A área mostrada na figura é girada em torno do eixo x para formar um sólido homogêneo de revolução de massa m. Usando integração direta, expresse o momento de inércia da massa do sólido em relação ao eixo x em termos de m e h.

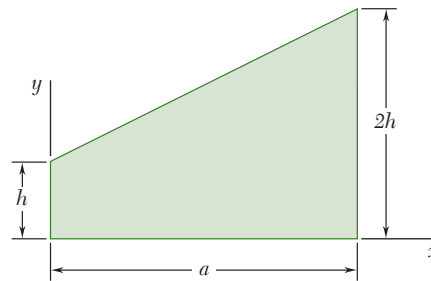



Figura PB.9

B.10 Determine por integração direta o momento de inércia da massa do cilindro circular direito mostrado na figura em relação ao eixo y, assumindo que tem densidade uniforme e massa m.

B.11 A área mostrada na figura é girada em torno do eixo x para formar um sólido homogêneo de revolução de massa m. Determine por integração direta o momento de inércia de massa do sólido em relação a (a) o eixo x; (b) o eixo y. Expresse suas respostas em termos de m e das dimensões do sólido.

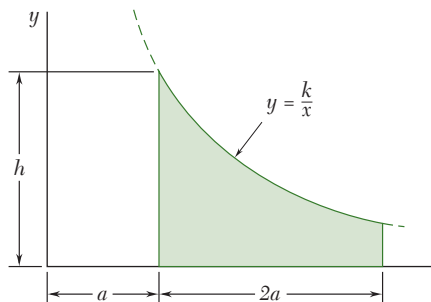
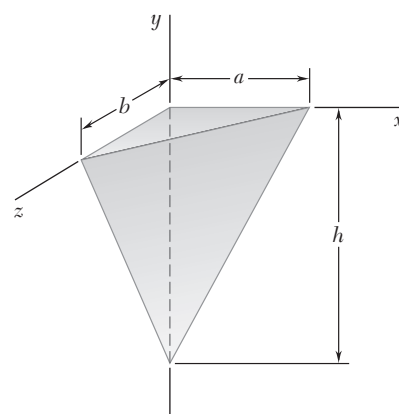



Figura PB.11

B.12 Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo x do corpo tetraédrico mostrado na figura, considerando que ele tem densidade uniforme e massa m.

B.13 Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo y do corpo tetraédrico mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

***B.14** Determine por integração direta o momento de inércia em relação ao eixo z do corpo em formato de semielipsoide mostrado na figura, considerando que ele tem massa específica uniforme e massa m.

Figuras PB.12 e *PB.13*

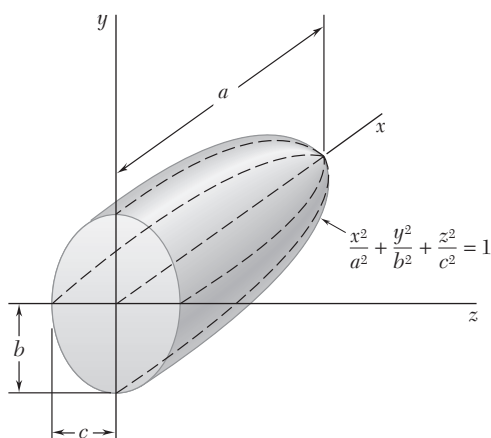



Figura PB.14

***B.15** Um arame de aço é dobrado no formato mostrado na figura. Representando por m' a massa por unidade de comprimento do arame, determine por integração direta o momento de inércia do arame em relação aos eixos coordenados.

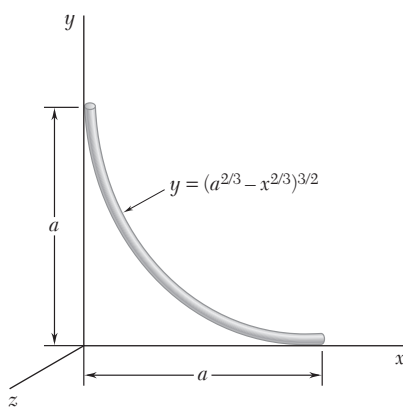



Figura PB.15

B.16 Uma placa delgada triangular de massa m é soldada ao longo de sua base AB a um bloco, tal como mostra a figura. Sabendo que a placa faz um ângulo θ com o eixo y, determine por integração direta o momento de inércia de massa da placa em relação (a) ao eixo x, (b) ao eixo y, (c) ao eixo z.

Figura *PB.16*

B.17 A figura mostra a seção transversal de uma polia plana fundida. Determine seu momento de inércia de massa e seu raio de giração em relação ao eixo AA'. (A densidade do latão é 8.650 kg/m^3 e a densidade do policarbonato reforçado em fibra é 1.250 kg/m^3.)

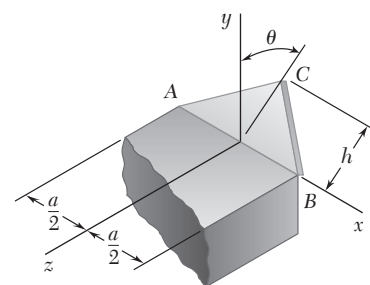
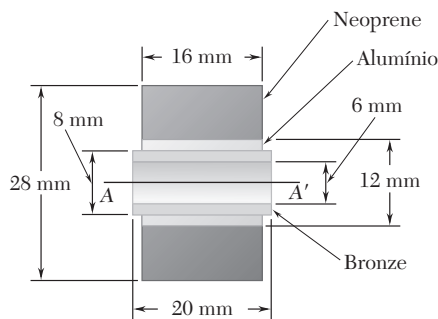
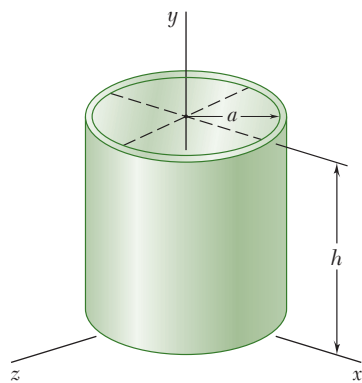
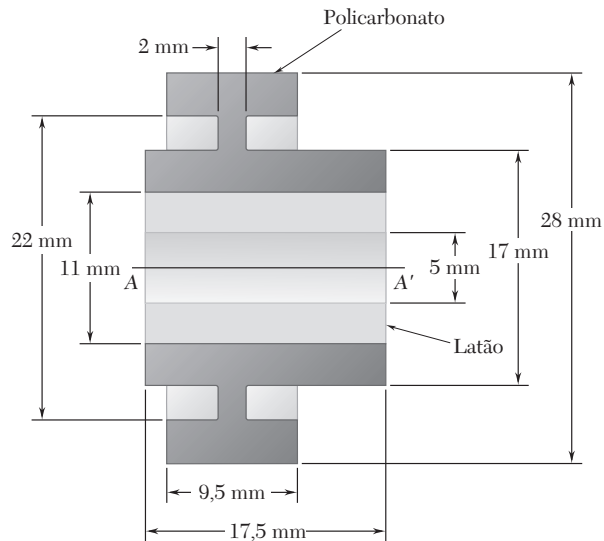



Figura PB.17

Figura PB.18

B.18 A figura mostra a seção transversal de um rolete esticador. Determine seu momento de inércia de massa e seu raio de giração em relação ao eixo AA'. (A densidade do bronze é 8.580 kg/m^3; do alumínio, 2.770 kg/m^3; do neoprene 1.250 kg/m^3.)

Figura PB.19

B.19 Sabendo que a concha cilíndrica delgada mostrada na figura tem massa m, espessura t e altura h, determine o momento de inércia de massa da concha em relação ao eixo x. (Dica: Considere que a concha é formada pela remoção de um cilindro de raio a e altura h de um cilindro de raio $a + t$ e altura h; após, despreze os termos que contêm t^2 e t^3 e conserve os termos que contêm t.)

B.20 A peça da máquina mostrada na figura é formada pela usinagem de uma superfície cônica em um cilindro circular. Para $b = \frac{1}{2}h$, determine o momento de inércia de massa e o raio de giração da peça em relação ao eixo y.

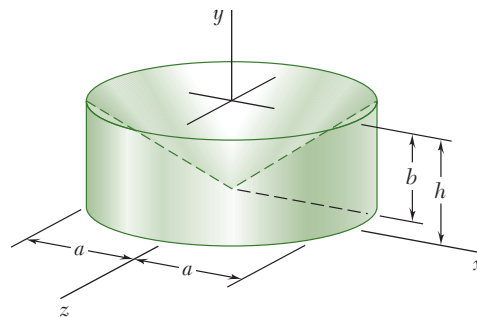



Figura PB.20

B.21 Após um período de uso, uma das lâminas de um desfibrador desgasta-se, assumindo o formato mostrado na figura e uma massa de 0,18 kg. Sabendo que os momentos de inércia da lâmina em relação aos eixos AA' e BB' são 0,320 g · m² e 0,680 g · m², respectivamente, determine (*a*) a localização do eixo centroidal GG', (*b*) o raio de giração em relação ao eixo GG'.

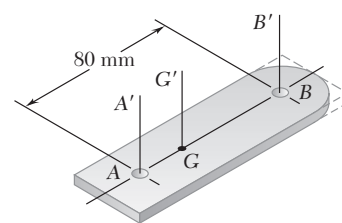



Figura ***PB.21***

B.22 Determine o momento de inércia da massa do componente de 0,5 kg mostrado na figura em relação ao eixo AA'.

Figura PB.22

B.23 O componente de alumínio de uma máquina tem um furo de seção quadrada centrado ao longo de seu comprimento. Determine (*a*) o valor de *a* para que o momento de inércia do componente em relação ao eixo AA', que intercepta a superfície superior do furo, seja máximo, (*b*) os valores correspondentes do momento de inércia de massa e do raio de giração em relação ao eixo AA'. (A densidade do alumínio é 2.770 kg/m³.)

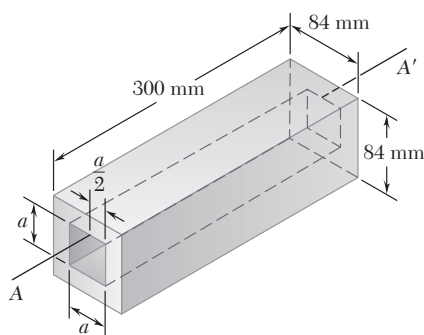
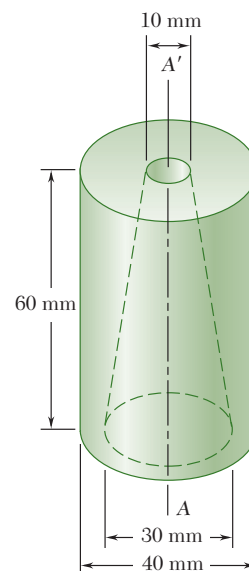



Figura PB.23

B.24 As conchas e os braços de um anemômetro são fabricados de um material de massa específica ρ. Sabendo que o momento de inércia de uma casca hemisférica delgada de massa m e espessura t em relação ao seu eixo centroidal GG' é $5ma^2/12$, determine (*a*) o momento de inércia do anemômetro em relação ao eixo AA', (*b*) a razão a por l para que o momento de inércia centroidal das conchas seja igual a 1% do momento de inércia das conchas em relação ao eixo AA'.

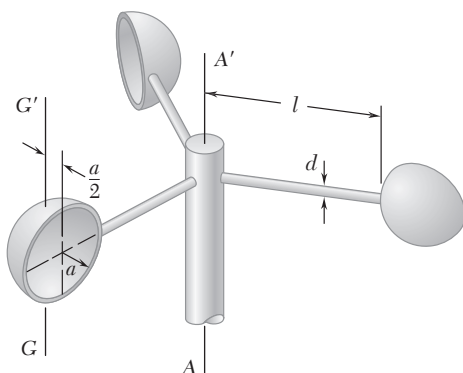



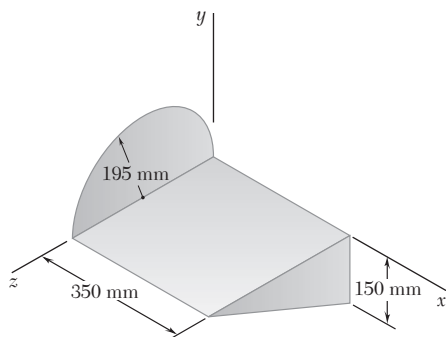
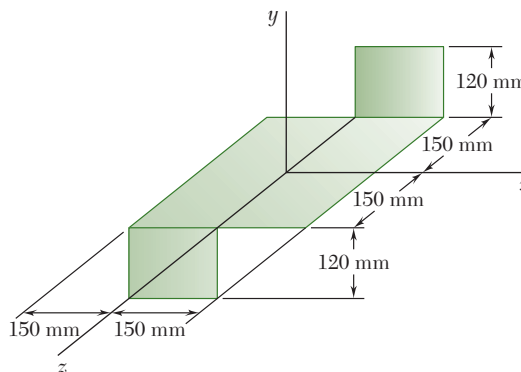
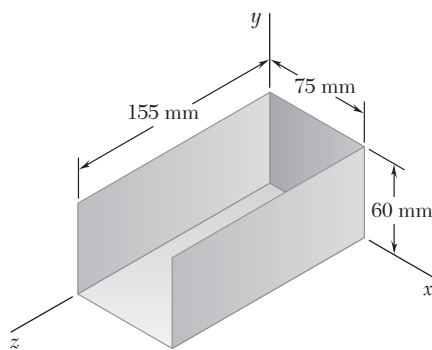
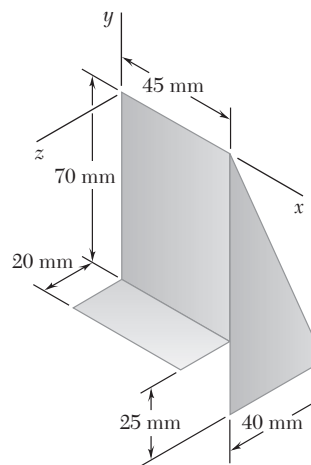
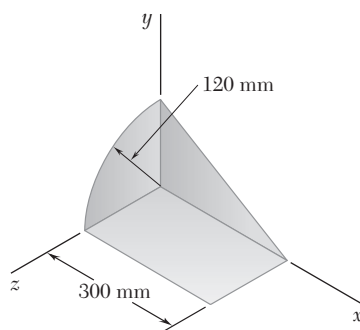
Figura ***PB.24***

B.25 e B.26 Um pedaço de chapa metálica de 2 mm de espessura é cortado e dobrado para formar o componente de máquina mostrado na figura. Sabendo que a densidade do aço é 7.850 kg/m^3, determine o momento de inércia do componente em relação a cada um dos eixos de coordenadas.

Figura PB.26

Figura PB.25

B.27 A tampa de um dispositivo eletrônico é feita com chapa de alumínio de 1,5 mm de espessura. Determine o momento de inércia de massa em relação a cada um dos eixos de coordenadas. (A densidade do alumínio é 2.770 kg/m^3.)

Figura PB.27

Figura PB.28

B.28 Um apoio estrutural é feito com chapa de aço galvanizado de 2 mm de espessura. Determine o momento de inércia de massa do apoio em relação a cada um dos eixos de coordenadas. (A densidade do aço galvanizado é 7.530 kg/m^3.)

Figura PB.29

B.29 Um subconjunto para um aeroplano é montado a partir de três peças de madeira compensada de 1,5mm. Desprezando a massa do adesivo usado para reunir as três partes, determine o momento de inércia de massa do subconjunto em relação a cada um dos eixos coordenados. (A densidade da madeira compensada é 780 kg/m^3).

***B.30** Um fazendeiro constrói um cocho pela soldagem de um pedaço retangular de uma chapa de aço de 2 mm à metade de um tambor de aço. Sabendo que a densidade do aço é de 7.850 kg/m^3 e que a densidade das paredes do tambor é de 1,8mm, determine o momento de inércia de massa do cocho em relação a cada um dos eixos coordenados. Despreze a massa das soldas.

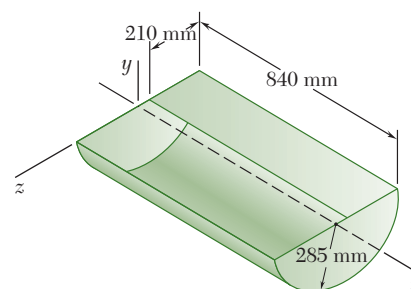



Figura PB.30

B.31 O elemento de máquina mostrado na figura é fabricado em aço. Determine o momento de inércia de massa do conjunto em relação (*a*) ao eixo *x*, (*b*) ao eixo *y*, (*c*) ao eixo *z*. (A densidade do aço é 7.850 kg/m^3.)

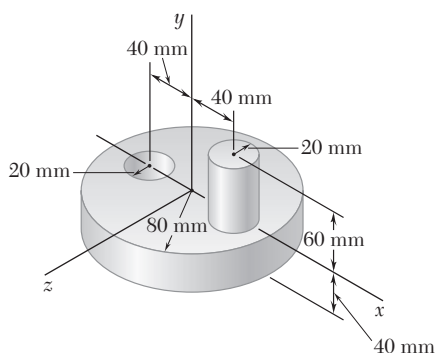



Figura PB.31

B.32 Determine o momento de inércia de massa do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo *y*. (A densidade do aço é 7.850 kg/m^3.)

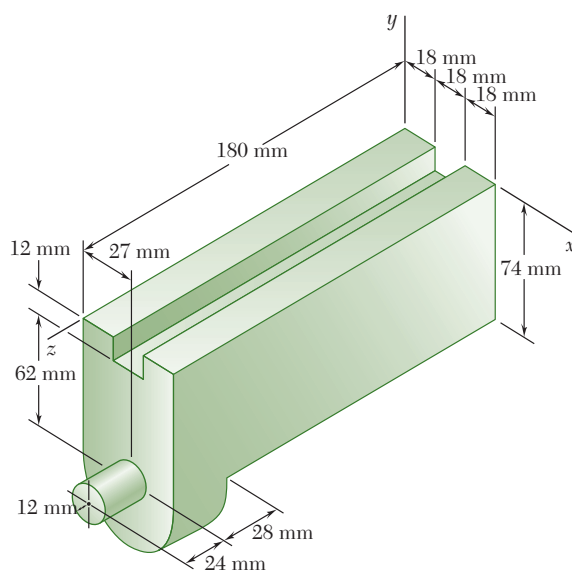



Figura PB.32 e PB.33

B.33 Determine o momento de inércia de massa do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo *z*. (A densidade do aço é 7.850 kg/m^3.)

B.34 Determine o momento de inércia da massa e o raio de giração do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação ao eixo x. (A densidade do aço é de 7.850 kg/m³.)

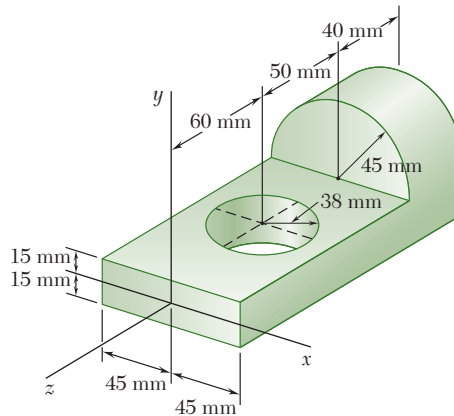



Figura PB.34

B.35 Determine o momento de inércia de massa do elemento de máquina de aço mostrado na figura em relação (*a*) ao eixo x, (*b*) ao eixo y, (*c*) ao eixo z. (A densidade do aço é 7.850 kg/m³.)

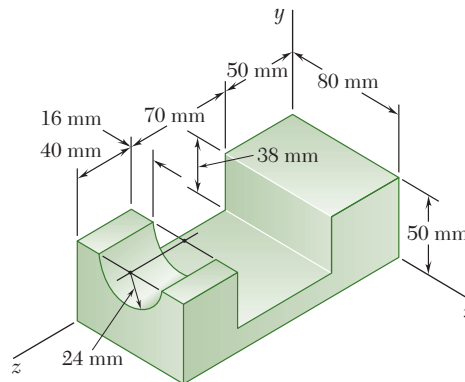



Figura PB.35

B.36 Um arame de alumínio com 0,049 kg/m de massa por unidade de comprimento é usado para formar o círculo e os membros retilíneos mostrados na figura. Determine o momento de inércia de massa do conjunto em relação a cada um dos eixos de coordenadas.

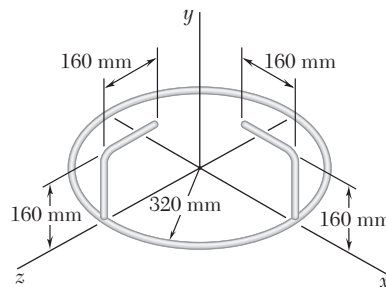



Figura PB.36

B.37 A armação mostrada na figura é formada por um arame de aço de 3 mm de diâmetro. Sabendo que a massa específica do aço é 7.850 kg/ m^3, determine o momento de inércia de massa da armação em relação a cada um dos eixos de coordenadas.

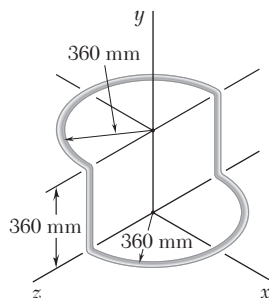



Figura PB.37

B.38 Um arame homogêneo com 0,056 kg/m de massa por unidade de comprimento é usado para formar a armação mostrada na figura. Determine o momento de inércia da armação em relação a cada um dos eixos de coordenadas.

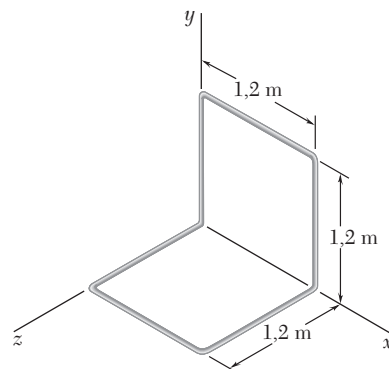



Figura *PB.38*

*B.6 Momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário que passa por O. Produtos de inércia de corpos

Nesta seção você verá que o momento de inércia de um corpo pode ser determinado em relação a um eixo arbitrário OL que passa pela origem (Fig. B.10), se já estiverem determinados os momentos de inércia em relação aos três eixos de coordenadas, bem como outras grandezas a serem definidas a seguir.

Figura B.10

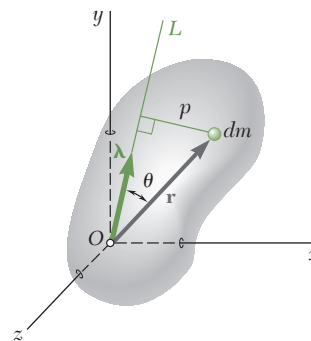
O momento de inércia I_{OL} do corpo em relação a OL é igual a $\int p^2\,dm$, em que p denota a distância perpendicular do elemento de massa dm ao eixo OL. Se representarmos por $\boldsymbol{\lambda}$ o vetor unitário ao longo de OL e por $\mathbf{r}$ o vetor-posição do elemento dm, observamos que a distância perpendicular p é igual a r sen θ, que é a intensidade do produto vetorial $\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}$. Logo, escrevemos

$$I_{OL} = \int p^2\,dm = \int |\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2\,dm \tag{B.16}$$

Expressando $|\boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{r}|^2$ em termos dos componentes retangulares do produto vetorial, temos

$$I_{OL} = \int [(\lambda_x y - \lambda_y x)^2 + (\lambda_y z - \lambda_z y)^2 + (\lambda_z x - \lambda_x z)^2]\,dm$$

onde os componentes λ_x, λ_y, λ_z do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ representam os cossenos diretores do eixo OL e os componentes x, y, z de $\mathbf{r}$ representam as coordenadas do elemento de massa dm. Expandindo os quadrados e rearranjando os termos, escrevemos

$$I_{OL} = \lambda_x^2 \int (y^2 + z^2)\,dm + \lambda_y^2 \int (z^2 + x^2)\,dm + \lambda_z^2 \int (x^2 + y^2)\,dm -$$
$$- 2\lambda_x\lambda_y \int xy\,dm - 2\lambda_y\lambda_z \int yz\,dm - 2\lambda_z\lambda_x \int zx\,dm \tag{B.17}$$

Voltando às Eqs. (B.3), notamos que as três primeiras integrais em (B.17) representam, respectivamente, os momentos de inércia I_x, I_y e I_z do corpo em relação aos eixos de coordenadas. As três últimas integrais em (B.17), que envolvem os produtos de coordenadas, são denominadas *produtos de inércia* do corpo em relação aos eixos x e y, aos eixos y e z e aos eixos z e x, respectivamente. Escrevemos

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{B.18}$$

Reescrevendo a Eq. (B.17) em termos das integrais definidas nas Eqs. (B.3) e (B.18), temos

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{B.19}$$

Observamos que a definição dos produtos de inércia de um corpo dada nas Eqs. (B.18) é uma extensão da definição do produto de inércia de uma superfície (Seção 9.8). Produtos de inércia de um corpo reduzem-se a zero nas mesmas condições de simetria em que os produtos de inércia de uma superfície se anulam, e o teorema dos eixos paralelos para produtos de inércia de um corpo é expresso por relações similares à formula derivada para o produto de inércia de uma superfície. Substituindo as expressões para x, y e z dadas nas Eqs. (B.4) nas Eqs. (B.18), concluímos que

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} \\ I_{yz} &= \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\bar{z} \\ I_{zx} &= \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\bar{x} \end{aligned} \tag{B.20}$$

sendo $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ as coordenadas do centro de gravidade G do corpo e $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$, $\bar{I}_{z'x'}$ representantes dos produtos de inércia do corpo em relação aos eixos centroidais x', y', z' (Fig. B.3).

*B.7 Elipsoide de inércia. Eixos principais de inércia

Vamos admitir que o momento de inércia do corpo considerado na seção anterior foi determinado em relação a diversos eixos OL que passam pelo ponto fixo O e que foi plotado um ponto Q sobre cada eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ de O. O lugar geométrico dos pontos Q assim obtidos forma uma superfície (Fig. B.11). A equação dessa superfície pode ser obtida substituindo-se I_{OL} por $1/(OQ)^2$ em (B.19) e depois multiplicando-se ambos os membros da equação por $(OQ)^2$. Observando que

$$(OQ_z)\lambda_x = x \qquad (OQ)\lambda_y = y \qquad (OQ)\lambda_z = z$$

onde x, y, z representam as coordenadas retangulares de Q, escrevemos

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx = 1 \tag{B.21}$$

A equação obtida é a equação de uma *superfície quádrica*. Como o momento de inércia I_{OL} é diferente de zero para cada eixo OL, nenhum ponto Q pode ficar a uma distância infinita de O. Portanto, a superfície

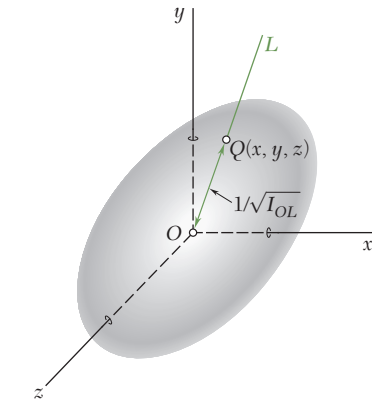



Figura B.11

quádrica obtida é um *elipsoide.* Esse elipsoide, que define o momento de inércia do corpo em relação a qualquer eixo que passe por O, é conhecido como o *elipsoide de inércia* do corpo em O.

Observamos que, se os eixos na Fig. B.11 são girados, os coeficientes da equação que define o elipsoide se alteram, pois se tornam iguais aos momentos e produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas girados. Entretanto, o *próprio elipsoide permanece inalterado,* pois sua forma depende apenas da distribuição de massa do corpo considerado. Suponha que escolhemos como eixo de coordenadas os eixos principais x', y', z' do elipsoide de inércia (Fig. B.12). Sabe-se que a equação do elipsoide em relação a esses eixos de coordenadas é da forma

$$I_{x'}x'^2 + I_{y'}y'^2 + I_{z'}z'^2 = 1 \tag{B.22}$$

Figura B.12

que não contém quaisquer produtos das coordenadas. Comparando as Eqs. (B.21) e (B.22), observamos que os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos x', y', z' precisam ser nulos. Os eixos x', y', z' são conhecidos como *eixos principais de inércia* do corpo em O e os coeficientes $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ referem-se ao *momentos principais de inércia* do corpo em O. Observe que, dado um corpo de formato arbitrário e um ponto O, sempre é possível encontrar eixos que são os principais do corpo em O, ou seja, eixos em relação aos quais os produtos de inércia do corpo são nulos. De fato, qualquer que seja o formato do corpo, os momentos e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos x, y e z que passam por O definirão um elipsoide, e este elipsoide terá eixos principais que, por definição, são os eixos principais de inércia do corpo em O.

Se os eixos principais de inércia x', y', z' são usados como eixos de coordenadas, a expressão obtida na Eq. (B.19) para o momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário que passa por O reduz-se a

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \tag{B.23}$$

Figura B.13

A determinação dos eixos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário é um tanto complexa e será discutida na próxima seção. Todavia, há muitos casos em que esses eixos podem ser revelados de imediato. Por exemplo, considere o corpo cônico homogêneo de base elíptica mostrado na Fig. B.13; esse corpo tem dois planos de simetria perpendiculares entre si, OAA' e OBB'. Observemos na definição (B.18) que, se os planos $x'y'$e $y'z'$ são escolhidos para coincidir com os dois planos de simetria, todos os produtos de inércia são nulos. Portanto, os eixos x', y', e z' assim selecionados são os eixos principais de inércia do corpo cônico em O. No caso do corpo homogêneo em forma de tetraedro regular $OABC$ mostrado na Fig. B.14, a linha que une o canto O ao centro D da face oposta é um eixo principal de inércia em O, e qualquer linha que passe por O perpendicular a OD também é um eixo principal de inércia em O. Essa propriedade fica nítida se observarmos que uma rotação de 120° do corpo em torno de OD deixa inalterados o formato e a distribuição de massa. Resulta que o elipsoide de inércia em O também permanece inalterado mediante tal rotação. Logo, o elipsoide é um corpo de revolução cujo eixo de revolução é OD, e a linha OD, assim como qualquer linha perpendicular que passe por O, deve ser um eixo principal do elipsoide.

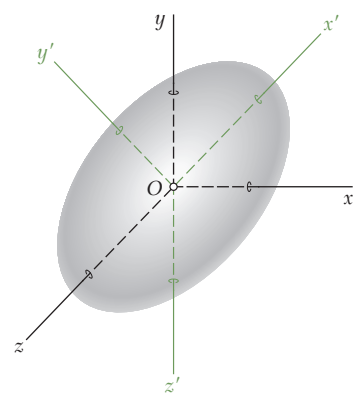
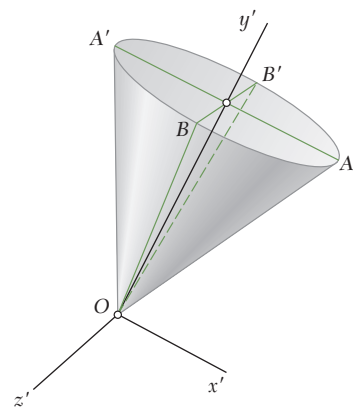
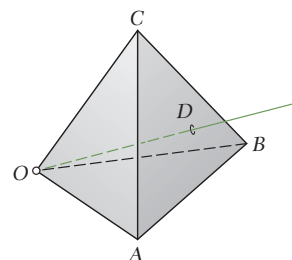



Figura B.14

*B.8 Determinação dos eixos principais e dos momentos principais de inércia de um corpo de formato arbitrário

O método de análise descrito nesta seção deve ser usado quando o corpo em consideração não apresenta uma propriedade óbvia de simetria.

Considere o elipsoide de inércia do corpo em um dado ponto O (Fig. B.15); seja $\mathbf{r}$ o vetor raio de um ponto P sobre a superfície do elipsoide e seja $\mathbf{n}$ o vetor unitário ao longo da normal a essa superfície em P. Observamos que os únicos pontos em que $\mathbf{r}$ e $\mathbf{n}$ são colineares são os pontos P_1, P_2 e P_3, onde os eixos principais interceptam a parte visível da superfície do elipsoide, e os pontos correspondentes sobre o outro lado do elipsoide.

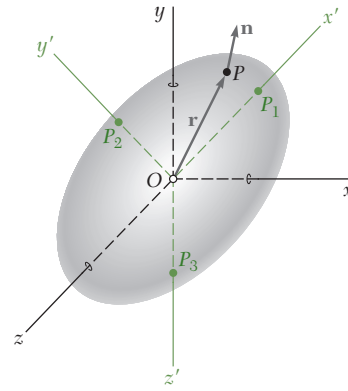



Figura B.15

Lembremos agora do cálculo em que a direção da normal a uma superfície de equação $f(x, y, z) = 0$ em um ponto $P(x, y, z)$ é definida pelo gradiente ∇f da função f nesse ponto. Para obter os pontos em que os eixos principais interceptam a superfície do elipsoide de inércia, devemos então escrever que $\mathbf{r}$ e ∇f são colineares,

$$\nabla f = (2K)\mathbf{r} \tag{B.24}$$

onde K é uma constante, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ e

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{k}$$

Retomando a Eq. (B.21), notamos que a função $f(x, y, z)$ correspondente ao elipsoide de inércia é

$$f(x, y, z) = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy}xy - 2I_{yz}yz - 2I_{zx}zx - 1$$

Substituindo $\mathbf{r}$ e ∇f na Eq. (B.24) e igualando os coeficientes dos vetores unitários, obtemos

$$\begin{aligned} I_x x - I_{xy} y - I_{zx} z &= Kx \\ -I_{xy} x + I_y y - I_{yz} z &= Ky \\ -I_{zx} x - I_{yz} y + I_z z &= Kz \end{aligned} \tag{B.25}$$

Dividindo cada termo pela distância r de O a P, obtemos equações similares que envolvem os cossenos diretores λ_x, λ_y e λ_z:

$$\begin{aligned} I_x\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= K\lambda_x \\ -I_{xy}\lambda_x + I_y\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= K\lambda_y \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + I_z\lambda_z &= K\lambda_z \end{aligned} \tag{B.26}$$

Transpondo os termos do segundo membro para o primeiro, chegamos ao seguinte sistema de equações lineares homogêneo:

$$\begin{aligned} (I_x - K)\lambda_x - I_{xy}\lambda_y - I_{zx}\lambda_z &= 0 \\ -I_{xy}\lambda_x + (I_y - K)\lambda_y - I_{yz}\lambda_z &= 0 \\ -I_{zx}\lambda_x - I_{yz}\lambda_y + (I_z - K)\lambda_z &= 0 \end{aligned} \tag{B.27}$$

Para que esse sistema de equações tenha solução diferente de $\lambda_x = \lambda_y = \lambda_z = 0$, seu determinante deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} I_x - K & -I_{xy} & -I_{zx} \\ -I_{xy} & I_y - K & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{yz} & I_z - K \end{vmatrix} = 0 \tag{B.28}$$

Expandindo esse determinante e trocando sinais, escrevemos

$$\begin{aligned} K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \end{aligned} \tag{B.29}$$

Essa é uma equação cúbica em K, que fornece três raízes reais positivas K_1, K_2 e K_3.

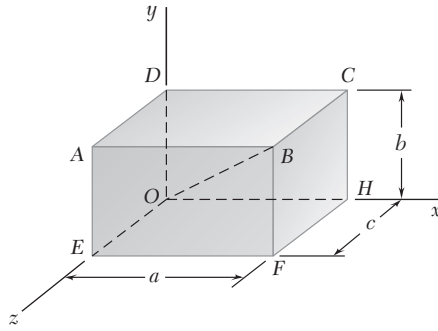
Para obter os cossenos diretores do eixo principal correspondente à raiz K_1, substituímos K por K_1 nas Eqs. (B.27). Como essas equações são agora linearmente dependentes, apenas duas delas podem ser usadas para determinar λ_x, λ_y e λ_z. Entretanto, pode-se obter uma equação adicional voltando à Seção 2.12, em que se viu que os cossenos diretores devem satisfazer a relação

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \tag{B.30}$$

Repetindo esse procedimento com K_2 e K_3, obtemos os cossenos diretores dos outros dois eixos principais.

Vamos mostrar agora que *as raízes* K_1, K_2 e K_3 *da Eq. (B.29) são os momentos principais de inércia do corpo considerado.* Vamos substituir K, nas Eqs. (B.26), pela raiz K_1 e λ_x, λ_y e λ_z pelos valores correspondentes $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ e $(\lambda_z)_1$ dos cossenos diretores; as três equações serão satisfeitas. Multipliquemos agora cada termo da primeira, segunda e terceira equações por $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$ e $(\lambda_z)_1$, respectivamente, e adicionemos as equações obtidas desse modo. Escrevemos

$$\begin{aligned} I_x^2(\lambda_x)_1^2 + I_y^2(\lambda_y)_1^2 + I_z^2(\lambda_z)_1^2 - 2I_{xy}(\lambda_x)_1(\lambda_y)_1 \\ - 2I_{yz}(\lambda_y)_1(\lambda_z)_1 - 2I_{zx}(\lambda_z)_1(\lambda_x)_1 = K_1[(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2] \end{aligned}$$

Voltando à Eq. (B.19), observamos que o membro à esquerda dessa equação representa o momento de inércia do corpo em relação ao eixo principal correspondente a K_1; logo, trata-se do momento principal de inércia correspondente a essa raiz. Por outro lado, voltando à Eq. (B.30), observamos que o membro à direita reduz-se a K_1. Portanto, K_1 é o próprio momento principal de inércia. Da mesma maneira, podemos mostrar que K_2 e K_3 são os outros momentos principais de inércia do corpo.

PROBLEMA RESOLVIDO B.6

Considere o corpo em forma de prisma retangular de massa m e lados a, b, c. Determine (a) os momentos e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas mostrados na figura e (b) o momento de inércia do corpo em relação à diagonal OB.

SOLUÇÃO

a. Momentos e produtos de inércia em relação aos eixos de coordenadas. ***Momentos de inércia.*** Apresentando os eixos centroidais x', y', z', em relação aos quais os momentos de inércia são fornecidos na Fig. B.9, aplicamos o teorema dos eixos paralelos:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + m(\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \tfrac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m(\tfrac{1}{4}b^2 + \tfrac{1}{4}c^2)$$

$$I_x = \tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2) \quad ◀$$

Analogamente, $\quad I_y = \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2) \quad I_z = \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2) \quad ◀$

Produtos de inércia. Devido à simetria, os produtos de inércia em relação aos eixos centroidais x', y', z' são nulos, e esses eixos são eixos principais de inércia. Usando o teorema dos eixos paralelos, temos

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\bar{y} = 0 + m(\tfrac{1}{2}a)(\tfrac{1}{2}b) \qquad I_{xy} = \tfrac{1}{4}mab \quad ◀$$

Analogamente, $\quad I_{yz} = \tfrac{1}{4}mbc \quad I_{zx} = \tfrac{1}{4}mca \quad ◀$

b. Momento de inércia em relação a *OB*. Referimo-nos à Eq. (B.19):

$$I_{OB} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x$$

onde os cossenos diretores de OB são

$$\lambda_x = \cos\theta_x = \frac{OH}{OB} = \frac{a}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

$$\lambda_y = \frac{b}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}} \qquad \lambda_z = \frac{c}{(a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}}$$

Substituindo os valores obtidos para os momentos e produtos de inércia e para os cossenos diretores na equação para I_{OB}, obtemos

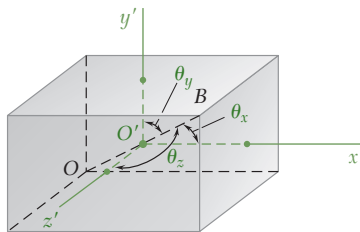
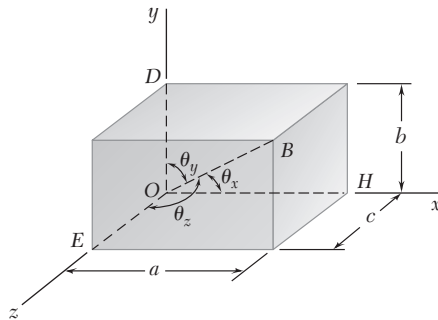
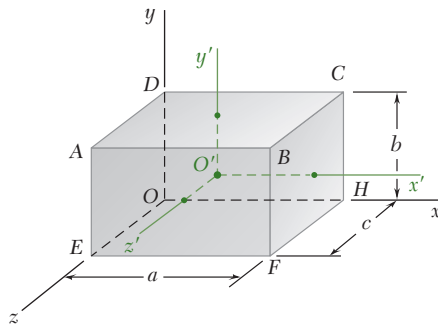
$$I_{OB} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}[\tfrac{1}{3}m(b^2 + c^2)a^2 + \tfrac{1}{3}m(c^2 + a^2)b^2 + \tfrac{1}{3}m(a^2 + b^2)c^2 - \tfrac{1}{2}ma^2b^2 - \tfrac{1}{2}mb^2c^2 - \tfrac{1}{2}mc^2a^2]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

Solução alternativa. O momento de inércia I_{OB} pode ser obtido diretamente dos momentos principais de inércia $\bar{I}_{x'}$, $\bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{z'}$, pois a linha OB passa pelo centroide O'. Sendo x', y', z' os eixos principais de inércia, usamos a Eq. (B.23) para escrever

$$I_{OB} = \bar{I}_{x'}\lambda_x^2 + \bar{I}_{y'}\lambda_y^2 + \bar{I}_{z'}\lambda_z^2$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}\left[\frac{m}{12}(b^2 + c^2)a^2 + \frac{m}{12}(c^2 + a^2)b^2 + \frac{m}{12}(a^2 + b^2)c^2\right]$$

$$I_{OB} = \frac{m}{6}\frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \quad ◀$$

PROBLEMA RESOLVIDO B.7

Se $a = 3c$ e $b = 2c$ para o prisma retangular do Problema Resolvido B.6, determine (*a*) os momentos principais de inércia na origem O e (*b*) os eixos principais de inércia em O.

SOLUÇÃO

a. Momentos principais de inércia na origem O. Substituindo $a = 3c$ e $b = 2c$ na solução do Problema Resolvido B.6, temos

$$I_x = \tfrac{5}{3}mc^2 \qquad I_y = \tfrac{10}{3}mc^2 \qquad I_z = \tfrac{13}{3}mc^2$$
$$I_{xy} = \tfrac{3}{2}mc^2 \qquad I_{yz} = \tfrac{1}{2}mc^2 \qquad I_{zx} = \tfrac{3}{4}mc^2$$

Substituindo os valores dos momentos e os produtos de inércia na Eq. (B.29) e agrupando os termos, temos

$$K^3 - (\tfrac{28}{3}mc^2)K^2 + (\tfrac{3479}{144}m^2c^4)K - \tfrac{589}{54}m^3c^6 = 0$$

Em seguida, determinamos as raízes dessa equação; pela discussão da Seção B.18, segue-se que essas raízes são os momentos principais de inércia do corpo na origem.

$$K_1 = 0{,}568867mc^2 \qquad K_2 = 4{,}20885mc^2 \qquad K_3 = 4{,}55562mc^2$$
$$K_1 = 0{,}569mc^2 \qquad K_2 = 4{,}21mc^2 \qquad K_3 = 4{,}56mc^2 \quad ◀$$

b. Eixos principais de inércia em O. Para determinar a direção de um eixo principal de inércia, primeiro substituímos o valor correspondente de K em duas das equações (B.27); as equações resultantes em conjunto com a Eq. (B.30) constituem um sistema de três equações do qual é possível determinar os cossenos diretores do eixo principal correspondente. Logo, para o primeiro momento principal de inércia K_1 temos:

$$(\tfrac{5}{3} - 0{,}568867)mc^2(\lambda_x)_1 - \tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{3}{4}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$-\tfrac{3}{2}mc^2(\lambda_x)_1 + (\tfrac{10}{3} - 0{,}568867)mc^2(\lambda_y)_1 - \tfrac{1}{2}mc^2(\lambda_z)_1 = 0$$
$$(\lambda_x)_1^2 + (\lambda_y)_1^2 + (\lambda_z)_1^2 = 1$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$(\lambda_x)_1 = 0{,}836600 \qquad (\lambda_y)_1 = 0{,}496001 \qquad (\lambda_z)_1 = 0{,}232557$$

Assim, os ângulos que os eixos principais de inércia fazem com os eixos de coordenadas são

$$(\theta_x)_1 = 33{,}2° \qquad (\theta_y)_1 = 60{,}3° \qquad (\theta_z)_1 = 76{,}6° \quad ◀$$

Usando sucessivamente o mesmo conjunto de equações com K_2 e K_3, concluímos que os ângulos associados ao segundo e terceiro momentos principais de inércia na origem são, respectivamente,

$$(\theta_x)_2 = 57{,}8° \qquad (\theta_y)_2 = 146{,}6° \qquad (\theta_z)_2 = 98{,}0° \quad ◀$$

e

$$(\theta_x)_3 = 82{,}8° \qquad (\theta_y)_3 = 76{,}1° \qquad (\theta_z)_3 = 164{,}3° \quad ◀$$

METODOLOGIA PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nesta seção, definimos os *produtos de inércia de massa* I_{xy}, I_{yz}, I_{zx} de um corpo e mostramos a você como determinar os momentos de inércia desse corpo em relação a um eixo arbitrário que passa pela origem O. Você também aprendeu como determinar na origem O os *eixos principais de inércia* de um corpo e os *momentos principais de inércia* correspondentes.

1. Determinação dos produtos de inércia de massa de um corpo composto. Os produtos de inércia de massa de um corpo composto em relação aos eixos de coordenadas podem ser expressos como as somas dos produtos de inércia de suas partes componentes em relação a esses eixos. Para cada parte componente, podemos usar o teorema dos eixos paralelos e escrever as Eqs. (B.20)

$$I_{xy} = \bar{I}_{x'y'} + m\bar{x}\,\bar{y} \qquad I_{yz} = \bar{I}_{y'z'} + m\bar{y}\,\bar{z} \qquad I_{zx} = \bar{I}_{z'x'} + m\bar{z}\,\bar{x}$$

onde as placas indicam os eixos centroidais de cada parte componente e $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$ representam as coordenadas do seu centro de gravidade. Tenha em mente que os produtos de inércia de massa de um corpo podem ser positivos, negativos ou nulos, e certifique-se de levar em conta os sinais de $\bar{x}$, $\bar{y}$ e $\bar{z}$.

a. Das propriedades de simetria de uma parte componente, pode-se deduzir que dois ou todos os três de seus produtos de inércia de massa são nulos. Por exemplo, para uma placa delgada paralela ao plano *xy;* um arame situado em um plano paralelo ao plano *xy;* um corpo com um plano de simetria paralelo ao plano *xy;* e um corpo com um eixo de simetria paralelo ao eixo *z*, pode-se verificar que *os produtos de inércia* $\bar{I}_{y'z'}$, $\bar{I}_{z'x'}$ *são nulos.*

Para placas retangulares, circulares ou semicirculares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas; arames retilíneos paralelos a um eixo de coordenadas; arames circulares e semicirculares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas; e prismas retangulares com eixos de simetria paralelos aos eixos de coordenadas, *os produtos de inércia* $\bar{I}_{x'y'}$, $\bar{I}_{y'z'}$, $\bar{I}_{z'x'}$ *são todos nulos.*

b. Produtos de inércia diferentes de zero podem ser calculados pelas Eqs. (B.18). Embora, em geral, seja necessária uma integração tripla para se determinar um produto de inércia de massa, uma integração simples poderá ser usada caso o corpo em consideração possa ser dividido em uma série de elementos delgados paralelos. Nesse caso, os cálculos serão semelhantes àqueles discutidos na lição anterior para os momentos de inércia.

2. Cálculo do momento de inércia de um corpo em relação a um eixo arbitrário *OL*. Uma expressão para o momento de inércia I_{OL} foi deduzida na Seção B.6 e é dada na Eq. (B.19). Antes de calcular I_{OL}, você deve determinar os momentos e os produtos de inércia do corpo em relação aos eixos de coordenadas dados, bem como os cossenos diretores do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo de *OL*.

(*continua*)

3. Cálculo dos momentos principais de inércia de um corpo e determinação de seus eixos principais de inércia. Você viu na Seção B.7 que é sempre possível encontrar uma orientação dos eixos de coordenadas para a qual os produtos de inércia de massa são nulos. Esses eixos são citados como os *eixos principais de inércia* e os momentos de inércia correspondentes são conhecidos como os *momentos principais de inércia* do corpo. Em muitos casos, os eixos principais de inércia de um corpo podem ser determinados por suas propriedades de simetria. O procedimento para se determinarem os momentos e os eixos principais de inércia de um corpo sem propriedade óbvia de simetria foi discutido na Seção B.8 e ilustrado no Problema Resolvido B.7. Esse procedimento consiste nos seguintes passos.

a. Expanda o determinante da Eq. (B.28) e resolva a equação cúbica resultante. A solução pode ser obtida por tentativa e erro ou, de preferência, com uma calculadora científica avançada ou um programa de computador apropriado. As raízes K_1, K_2 e K_3 dessa equação são os momentos principais de inércia do corpo.

b. Para determinar a direção do eixo principal correspondente a K_1, substitua esse valor de K em duas das equações (B.27) e resolva essas equações em conjunto com a Eq. (B.30) para os cossenos diretores do eixo principal correspondente a K_1.

c. Repita esse procedimento com K_2 e K_3 para determinar as direções dos outros dois eixos principais. Para se certificar de seus cálculos, você pode verificar que o produto escalar de dois vetores unitários quaisquer ao longo dos três eixos que você obteve é nulo e, portanto, que esses eixos são perpendiculares entre si.

d. Quando um momento principal de inércia é aproximadamente igual a um momento de inércia em relação a um eixo de coordenadas, os valores calculados dos cossenos diretores correspondentes serão muito sensíveis ao número de algarismos significativos empregados em seus cálculos. Nesse caso, sugerimos que você expresse suas respostas intermediárias com seis ou sete algarismos significativos para evitar possíveis erros.

PROBLEMAS

B.39 Determine os produtos de massa de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} do objeto de aço da figura. (A densidade do aço é de 7.850 kg/m³.)

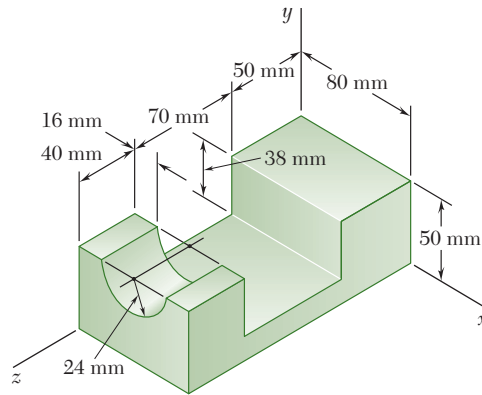



Figura PB.39

B.40 Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}, do elemento de máquina de aço mostrado na figura. (A densidade do aço é 7.850 kg/m³.)

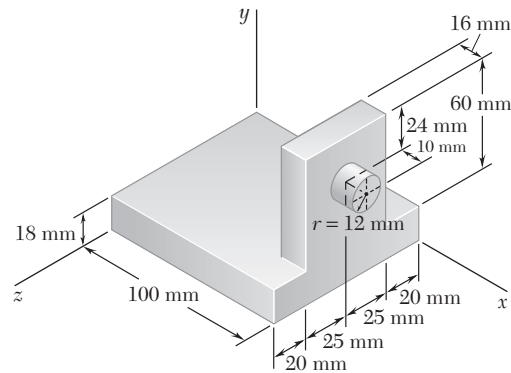



Figura PB.40

B.41 e **B.42** Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx}, do elemento de máquina de alumínio fundido mostrado na figura. (A densidade do alumínio é 2.770 kg/m³.)

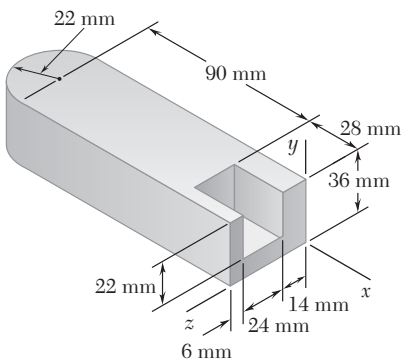



Figura PB.42

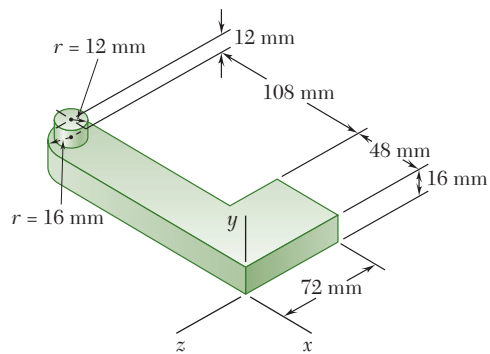



Figura PB.41

B.43 a B.46 Uma seção de chapa de aço de 2 mm de espessura é cortada e dobrada para formar o componente de máquina mostrado na figura. Sabendo que a densidade do aço é 7.850 kg/m^3, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} do componente.

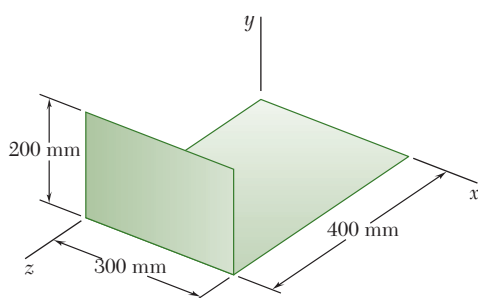



Figura *PB.43*

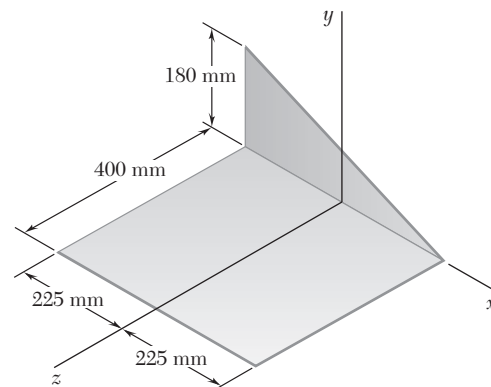



Figura *PB.44*

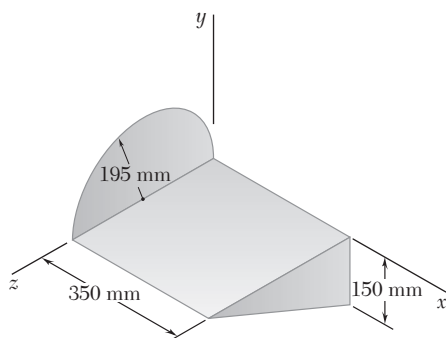



Figura PB.45

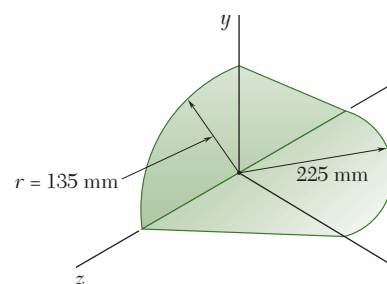



Figura PB.46

B.47 e *B.48* Um arame de latão com peso por unidade de comprimento w é usado para formar a armação mostrada na figura. Determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

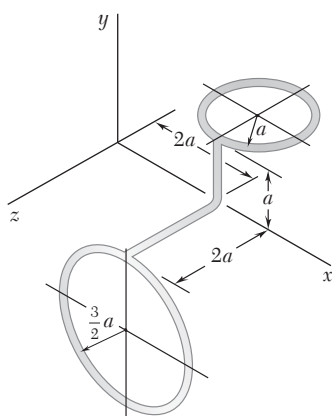



Figura PB.47

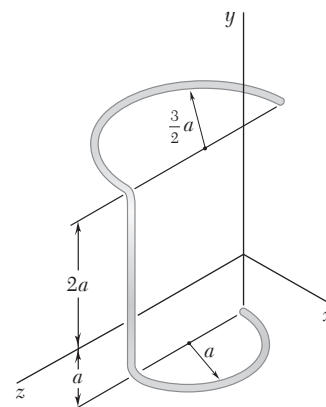



Figura *PB.48*

B.49 A armação mostrada na figura é formada por um arame de alumínio de 1,5 mm de espessura. Sabendo que a densidade do alumínio é 2.800 kg/m^3, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

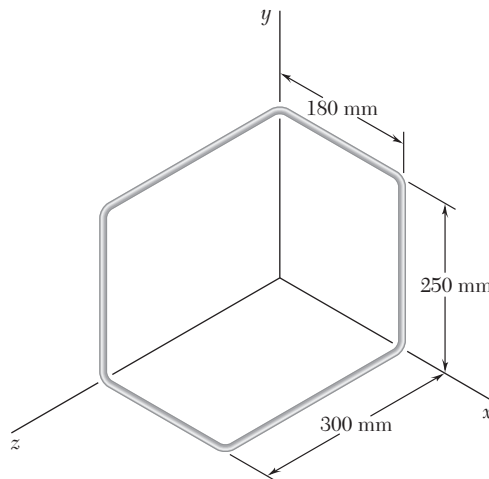



Figura PB.49

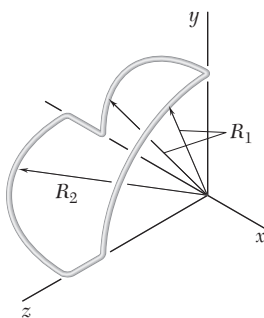



Figura PB.50

B.50 Um arame fino de alumínio com diâmetro uniforme é usado para formar a armação mostrada na figura. Representando por m' a massa por unidade de comprimento do arame, determine os produtos de inércia I_{xy}, I_{yz} e I_{zx} da armação.

B.51 Complete a dedução das Eqs. (B.20) que exprimem o teorema de eixos paralelos para produtos de inércia de massa.

B.52 Para o tetraedro homogêneo de massa m mostrado na figura, (*a*) determine por integração direta o produto de inércia I_{zx}, (*b*) deduza I_{yz} e I_{xy} dos resultados obtidos na parte *a*.

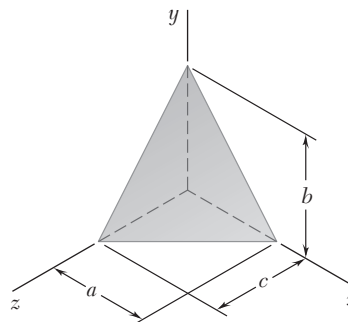



Figura PB.52

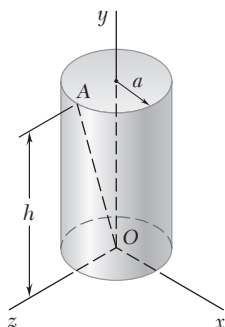



Figura PB.53

B.53 O cilindro circular homogêneo mostrado na figura tem massa m. Determine o momento de inércia do cilindro em relação à linha que liga a origem O e o ponto A localizado sobre o perímetro da superfície superior do cilindro.

B.54 O cone circular homogêneo mostrado na figura tem massa m. Determine o momento de inércia do cone em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

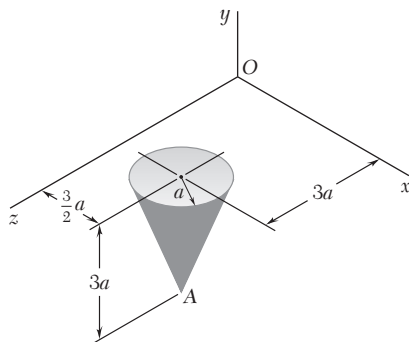



Figura PB.54

B.55 A figura mostra o elemento de máquina do Problema B.31. Determine seus momentos de inércia em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

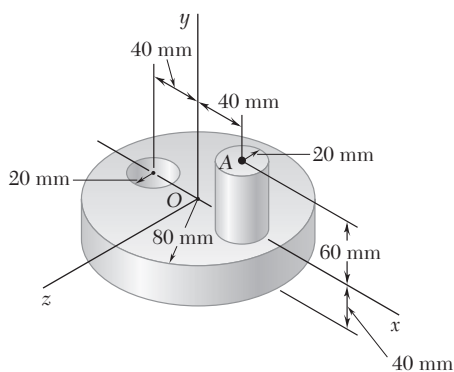



Figura PB.55

B.56 Determine o momento de inércia do elemento de máquina de aço dos Problemas B.35 e B.39 em relação ao eixo que passa pela origem e faz ângulos iguais com os eixos x, y e z.

B.57 Uma placa delgada dobrada mostrada na figura tem densidade uniforme e peso W. Determine seu momento de inércia de massa em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

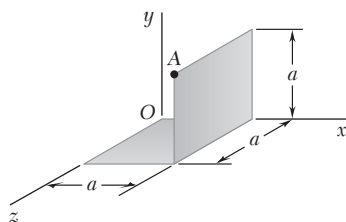



Figura PB.57

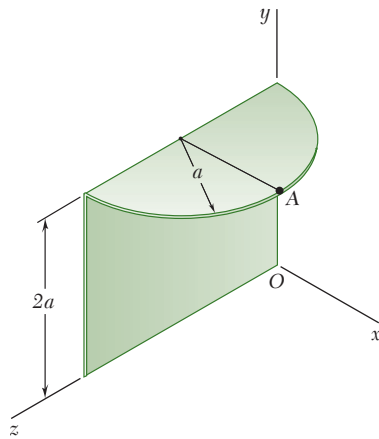



Figura PB.58

B.58 Um pedaço de chapa metálica de espessura t e densidade ρ é cortada e dobrada no formato mostrado na figura. Determine seu momento de inércia de massa em relação à linha que liga a origem O e o ponto A.

B.59 Determine o momento de inércia de massa do componente de máquina dos Problemas B.26 e B.45 em relação ao eixo que passa pela origem caracterizado pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = (-4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k})/9$.

B.60 a B.62 Para a armação de arame do problema indicado determine o momento de inércia de massa da armação em relação ao eixo que passa pela origem caracterizado pelo vetor unitário $\boldsymbol{\lambda} = (-3\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k})/7$.

B.60 Problema B.38
B.61 Problema B.37
B.62 Problema B.36

B.63 Para o prisma retangular mostrado na figura determine os valores das razões b/a e c/a para que o elipsoide de inércia do prisma seja uma esfera quando calculado (a) no ponto A, (b) no ponto B.

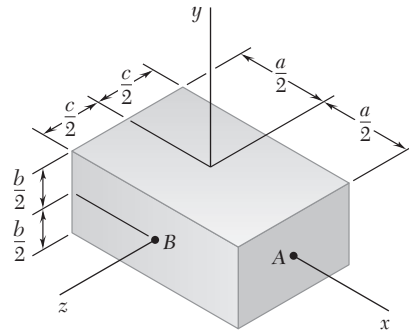
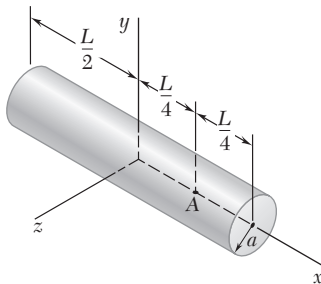



Figura PB.63

Figura PB.65

B.64 Para o cone circular do Problema Resolvido B.3, determine o valor da razão a/h para que o elipsoide de inércia do cone seja uma esfera quando calculado (a) no vértice do cone, (b) no centro da base do cone.

B.65 Para o cilindro circular homogêneo mostrado na figura, de raio a e comprimento L, determine o valor da razão a/L para que o elipsoide de inércia do cilindro seja uma esfera quando calculado (a) no centroide do cilindro, (b) no ponto A.

B.66 Dado um corpo arbitrário e três eixos retangulares x, y e z, demonstre que o momento de inércia do corpo em relação a qualquer um dos três eixos não pode ser maior que a soma dos momentos de inércia do corpo em relação aos outros dois eixos. Ou seja, demonstre que a desigualdade $I_x \leq I_y + I_z$ e as duas desigualdades similares são satisfeitas. Além disso, demonstre que $I_y \geqslant 1/2I_x$, se o corpo for de revolução e homogêneo, com x representando o eixo de revolução e y um eixo transversal.

B.67 Considere um cubo de massa m e lado a. (a) Mostre que o elipsoide de inércia no centro do cubo é uma esfera e use essa propriedade para determinar o momento de inércia do cubo em relação a uma de suas diagonais. (b) Mostre que o elipsoide de inércia em um dos vértices do cubo é um elipsoide de revolução e determine os momentos principais de inércia do cubo nesse ponto.

B.68 Dado um corpo homogêneo de massa m e de formato arbitrário e três eixos retangulares x, y e z com origem em O, demonstre que a soma $I_x + I_y + I_z$ dos momentos de inércia do corpo não pode ser menor que a soma similar calculada para uma esfera de igual massa e mesmo material centrada em O. Além disso, usando os resultados do Problema B.66, mostre que, se o corpo é de revolução, com x representando o eixo de revolução, seu momento de inércia I_y em relação a um eixo transversal y não pode ser menor que $3ma^2/10$, sendo a o raio da esfera de igual massa e de mesmo material.

***B.69** O cilindro circular homogêneo mostrado na figura tem massa m e o diâmetro OB da sua superfície superior faz ângulos de 45° com os eixos x e z. (a) Determine os momentos principais de inércia do cilindro na origem O. (b) Calcule os ângulos que os eixos principais de inércia em O fazem com os eixos de coordenadas. (c) Esboce o cilindro e mostre a orientação dos eixos principais de inércia em relação aos eixos x, y e z.

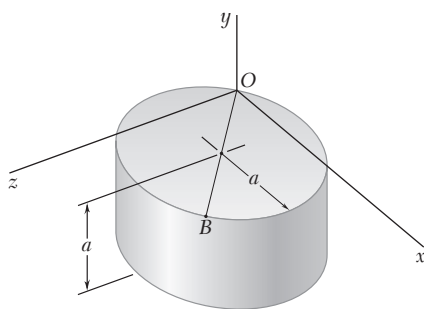
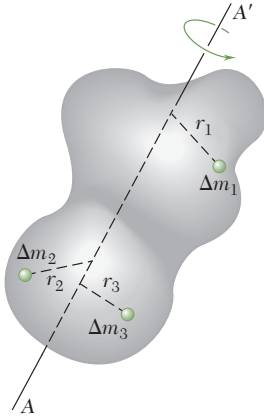



Figura PB.69

B.70 a B.74 Para o componente descrito no problema indicado, determine (a) os momentos principais de inércia na origem, (b) os eixos principais de inércia na origem. Esboce o corpo e mostre a orientação dos eixos principais de inércia em relação aos eixos x, y e z.

***B.70** Problema B.55
***B.71** Problemas B.35 e B.39
***B.72** Problema B.57
***B.73** Problema B.58
***B.74** Problemas B.38 e B.60

REVISÃO E RESUMO

Momentos de inércia de massas

A segunda parte do capítulo foi dedicada à determinação de *momentos de inércia de massas,* que aparecem em problemas de dinâmica que envolvem a rotação de um corpo rígido em torno de um eixo. O momento de inércia de massa de um corpo em relação a um eixo AA' (Fig. B.16) foi definido como

$$I = \int r^2\,dm \tag{B.1}$$

Figura B.16

sendo r a distância de AA' ao elemento de massa [Seção B.1]. O *raio de giração* do corpo foi definido como

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{B.2}$$

Os momentos de inércia de um corpo em relação aos eixos de coordenadas foram expressos como

$$\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2)\,dm \\ I_y &= \int (z^2 + x^2)\,dm \\ I_z &= \int (x^2 + y^2)\,dm \end{aligned} \tag{B.3}$$

Teorema dos eixos paralelos

Vimos que o *teorema dos eixos paralelos* também se aplica aos momentos de inércia de massa [Seção B.2], Assim, o momento de inércia I de um corpo em relação a um eixo arbitrário AA' (Fig. B.17) pode ser expresso como

$$I = \bar{I} + md^2 \tag{B.6}$$

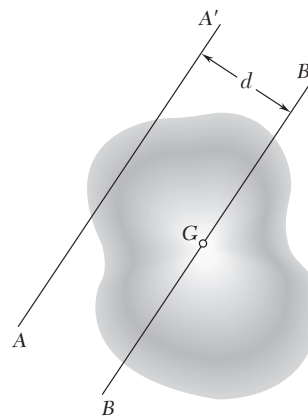



Figura B.17

sendo $\bar{I}$ o momento de inércia do corpo em relação ao eixo centroidal BB', paralelo ao eixo AA', m a massa do corpo e d a distância entre os dois eixos.

Momentos de inércia de placas delgadas

Os momentos de inércia de *placas delgadas* podem ser obtidos diretamente dos momentos de inércia de suas superfícies [Seção B.3]. Concluímos que, para uma *placa retangular*, os momentos de inércia em relação aos eixos mostrados (Fig. B.18) são

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{12}ma^2 \qquad I_{BB'} = \tfrac{1}{12}mb^2 \tag{B.12}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{12}m(a^2 + b^2) \tag{B.13}$$

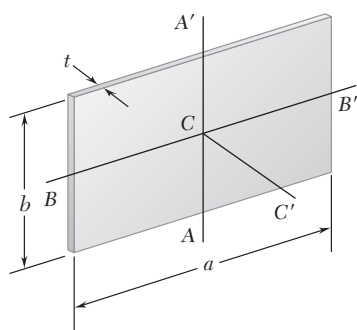



Figura B.18

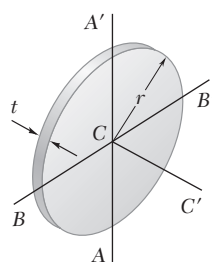



Figura B.19

enquanto, para uma *placa circular* (Fig. B.19), eles são

$$I_{AA'} = I_{BB'} = \tfrac{1}{4}mr^2 \tag{B.14}$$

$$I_{CC'} = I_{AA'} + I_{BB'} = \tfrac{1}{2}mr^2 \tag{B.15}$$

Corpos compostos

Quando um corpo tem *dois planos de simetria*, geralmente é possível efetuar uma integração simples para se determinar seu momento de inércia em relação a um dado eixo, selecionando-se o elemento de massa dm igual ao de uma placa delgada [Problemas Resolvidos B.2 e B.3]. Por outro lado, quando um corpo consiste em *diversos formatos geométricos simples*, seu momento de inércia em relação a um dado eixo pode ser obtido aplicando-se as fórmulas dadas na Fig. B.9 juntamente com o teorema dos eixos paralelos [Problemas Resolvidos B.4 e B.5].

Momento de inércia em relação a um eixo arbitrário

Nas últimas seções do capítulo, aprendemos a determinar o momento de inércia de um corpo *em relação a um eixo arbitrário OL* que passa pela origem O [Seção B.6]. Representando por λ_x, λ_y, λ_z os componentes do vetor unitário $\boldsymbol{\lambda}$ ao longo de OL (Fig. B.20) e apresentando os *produtos de inércia*

$$I_{xy} = \int xy\, dm \qquad I_{yz} = \int yz\, dm \qquad I_{zx} = \int zx\, dm \tag{B.18}$$

concluímos que o momento de inércia de um corpo em relação a OL pode ser expresso como

$$I_{OL} = I_x\lambda_x^2 + I_y\lambda_y^2 + I_z\lambda_z^2 - 2I_{xy}\lambda_x\lambda_y - 2I_{yz}\lambda_y\lambda_z - 2I_{zx}\lambda_z\lambda_x \tag{B.19}$$

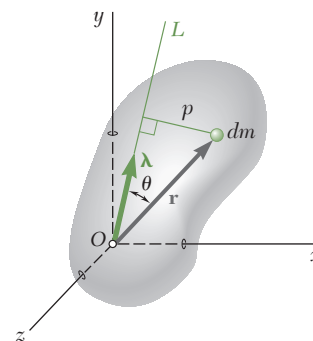
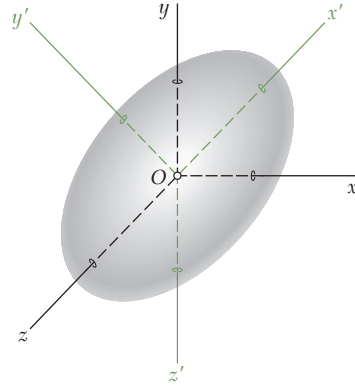



Figura B.20

Figura B.21

Elipsoide de inércia

Plotando um ponto Q ao longo de cada eixo OL a uma distância $OQ = 1/\sqrt{I_{OL}}$ de O [Seção B.7], obtivemos a superfície de um elipsoide, conhecido como *elipsoide de inércia* do corpo no ponto O. Os eixos principais x', y', z' desse elipsoide (Fig. B.21) são os *eixos principais de inércia* do corpo; ou seja, os produtos de inércia $I_{x'y'}$, $I_{y'z'}$, $I_{z'x'}$ do corpo em relação a esses eixos são todos nulos. Há muitas situações em que os eixos principais de inércia de um corpo podem ser deduzidos das propriedades de simetria do corpo. Escolhendo esses eixos como sendo os eixos de coordenadas, podemos então expressar I_{OL} como

Eixos principais de inércia

Momentos principais de inércia

$$I_{OL} = I_{x'}\lambda_{x'}^2 + I_{y'}\lambda_{y'}^2 + I_{z'}\lambda_{z'}^2 \qquad \text{(B.23)}$$

sendo $I_{x'}$, $I_{y'}$, $I_{z'}$ os *momentos principais de inércia* do corpo em O.

Quando os eixos principais de inércia não podem ser obtidos por inspeção [Seção B.7], é preciso resolver a equação cúbica

$$K^3 - (I_x + I_y + I_z)K^2 + (I_xI_y + I_yI_z + I_zI_x - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)K - \\ - (I_xI_yI_z - I_xI_{yz}^2 - I_yI_{zx}^2 - I_zI_{xy}^2 - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx}) = 0 \qquad \text{(B.29)}$$

Verificamos [Seção B.8] que as raízes K_1, K_2 e K_3 dessa equação são os momentos principais de inércia do corpo considerado. Os cossenos diretores $(\lambda_x)_1$, $(\lambda_y)_1$, $(\lambda_z)_1$ do eixo principal correspondente ao momento principal de inércia K_1 são então determinados por substituição de K_1 nas Eqs. (B.27) e solução de duas dessas equações e da Eq. (B.30) simultaneamente. O mesmo procedimento é então repetido com K_2 e K_3 para se determinarem os cossenos diretores dos outros dois eixos principais [Problema Resolvido B.7].

CRÉDITOS DAS FOTOS

CAPÍTULO 11

Página de abertura: © NASA/Getty Images RF; **Foto 11.1:** U.S. Department of Energy; **Foto 11.2:** © Getty Images RF/Digital Vision; **Foto 11.3:** © Brand X Pictures/Jupiter Images; **Foto 11.4:** © Digital Vision/ Getty Images RF; **Foto 11.5:** © Royalty-Free/CORBIS; **Foto 11.6:** © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 12

Página de abertura: © Lester Lefkowitz/CORBIS; **Foto 12.1:** © Royalty-Free/CORBIS; **Foto 12.2:** © Brand X Pictures/PunchStock RF; **Foto 12.3:** © Royalty-Free/ CORBIS; **Foto 12.4:** © Russell Illig/Getty Images RF; **Foto 12.5:** © Royalty-Free/CORBIS.

CAPÍTULO 13

Página de abertura: © Tom Miles; **Foto 13.2:** © Scandia National Laboratories/Getty Images RF; **Foto 13.2:** © Andrew Davidhazy/RIT; **Foto 13.3:** © Tom McCarthy/Photolibrary.

CAPÍTULO 14

Página de abertura: © XCOR; **Foto 14.1:** NASA; **Foto 14.2:** © Royalty-Free/CORBIS; **Foto 14.3:** © Brand X Pictures/PunchStock.

CAPÍTULO 15

Página de abertura (motor): Cortesia de Wartsila Corporation; **(navio):** Cortesia de A.P. Moller-Maersk; **Foto 15.1:** © Chris Hellier/CORBIS; **Foto 15.2:** © Royalty-Free/CORBIS; **Foto 15.3:** © Joseph Nettis/Stock Boston Inc.; **Foto 15.4:** © AGE Fotostock/Photolibrary; **Foto 15.5:** © George Tiedemann/NewSport/CORBIS; **Foto 15.6:** © Royalty-Free/CORBIS; **Foto 15.7:** Cortesia de Tangen Drives; **Foto 15.8:** © Northrop Grumman/Index Stock Imagery/Jupiter Images; **Foto 15.9:** © Royalty-Free/ CORBIS.

CAPÍTULO 16

Página de abertura: © Getty Images RF; **Foto 16.1:** © Getty Images RF; **Foto 16.2:** Cortesia de Samsung Semiconductor, Inc.; **Foto 16.3:** © Tony Arruza/CORBIS; **Foto 16.4:** © Robert E. Daemmrich.

CAPÍTULO 17

Página de abertura: © AP Photo/Matt Dunham; **Foto 17.1:** © Richard McDowell/Alamy; **Foto 17.2:** © Phillip Cornwell; **Foto 17.3a,b:** © Photography by Leah; **Foto 17.4:** © Chuck Savage/CORBIS.

CAPÍTULO 18

Página de abertura: © Royalty-Free/CORBIS: **Foto 18.1:** © SuperStock; **Foto 18.2:** © Matthias Kulka/ CORBIS; **Foto 18.3:** © Roger Ressmeyer/CORBIS; **Foto 18.4:** Cortesia de Caterpillar Engine Division; **Foto 18.5:** © Lawrence Manning/CORBIS RF.

CAPÍTULO 19

Página de abertura: © Peter Tsai Photography; **Foto 19.1:** © Tony Freeman/Index Stock; **Foto 19.2:** © The McGraw-Hill Companies, Inc./Photo by Sabina Dowell; **Foto 19.3:** Cortesia de MTS Systems Corporation.

RESPOSTAS

Estão listadas a seguir as respostas dos exercícios em que o número não está em itálico. As respostas dos problemas em itálico não estão listadas.

CAPÍTULO 11

11.1 $-66{,}0$ m, $149{,}0$ m/s, 228 m/s^2.
11.2 3,00 m, $-7{,}00$ m/s.
11.3 3,00 s, $-59{,}5$ m, 25,0 m/s^2.
11.4 248 m, 72,0 m/s, -383 m/s^2.
11.5 0,667 s, 0,259 m, $-8{,}56$ m/s.
11.6 (*a*) 1.000 s e 4,00 s. (*b*) 1.500 m, 24,5 m.
11.9 (*a*) 4,00 s. (*b*) $-56{,}0$ m/s, 260 m.
11.10 $x = t^4/108 + 10t + 24$, $v = t^3/27 + 10$.
11.12 (*a*) 3,00 m/s^4. (*b*) $v = (t^3 - 32)$ m/s, $x = t^4/4 - 32t + 64$.
11.15 (*a*) 5,89 m/s. (*b*) 1,772 m.
11.16 $-36{,}8$ m^2, 1,832 s^{-2}.
11.17 (*a*) 0,0900 s^{-2}. (*b*) $\pm 16{,}97$ mm/s.
11.18 (*a*) 48,0 m^3/s^2. (*b*) 21,6 m. (*c*) 4,90 m/s.
11.21 (*a*) 22,5 m. (*b*) 38,4 m/s.
11.22 (*a*) 29,3 m/s. (*b*) 0,947 s.
11.23 (*a*) 50,0 m (*b*) ∞. (*c*) 0,866 s.
11.24 3,33 m/s.
11.25 (*a*) 0,1457 s/m. (*b*) 145,2 m. (*c*) 6,86 m/s.
11.26 (*a*) 3,33 m. (*b*) 2,22 s. (*c*) 1,667 s.
11.27 (*a*) 7,15 km. (*b*) $-52{,}1 \times 10^{-6}$ m/s^2. (*c*) 49,9 min.
11.28 (*a*) $-0{,}0525$ m/s^2. (*b*) 6,17 s.
11.31 (*a*) $2{,}36\, v_0T$, $\pi v_0/T$. (*b*) $0{,}363\, v_0$.
11.33 (*a*) 1,500 m/s^2. (*b*) 10,00 s.
11.34 (*a*) 25,0 m/s. (*b*) 19,00 m/s. (*c*) 36,8 m.
11.35 (*a*) 2,78 s. (*b*) 80 km/h.
11.36 (*a*) 72,9 m/s. (*b*) 360 m.
11.39 (*a*) 0,500 km. (*b*) 42,9 km/h.
11.40 (*a*) $-2{,}10$ m/s^2, 2,06 m/s^2. (*b*) 2,59 s antes de *A* alcançar a zona de troca.
11.41 (*a*) 16,2 s, 227,6 m. (*b*) 65,2 km/h, 36,5 km/h.
11.42 (*a*) 1,67 m/s^2. (*b*) 2,8 m/s^2.
11.43 (*a*) 3,00 s. (*b*) 1,33 m/s^2.
11.44 (*a*) $-0{,}250$ m/s^2, 0,300 m/s^2. (*b*) 20,8 s. (*c*) 85,5 km/h.
11.47 (*a*) 2,00 m/s ↑. (*b*) 2,00 m/s ↓. (*c*) 8,00 m/s ↑.
11.48 (*a*) 20,0 m/s^2 →, 6.67 m/s^2 ↓. (*b*) 13,33 m/s↓, 13,33 m↓.
11.49 (*a*) 9 m/s↑. (*b*) 9 m/s↑. (*c*) 13,5 m/s↑. (*d*) 9 m/s↑.
11.50 (*a*) 0,4 m/s^2↑, 0,8 m/s^2↓. (*b*) 2 m/s↑.
11.53 (*a*) 200 mm/s →. (*b*) 600 mm/s →. (*c*) 200 mm/s ←. (*d*) 400 mm/s →.
11.54 (*a*) 13,33 mm/s^2 ←, 20,0 mm/s^2 ←. (*b*) 13,33 mm/s^2 →. (*c*) 70,0 mm/s →, 440 mm →.
11.55 (*a*) 10,00 mm/s →, (*b*) 6,00 mm/s^2 →, 2,00 mm/s^2↑. (*c*) 175 mm↑.
11.56 (*a*) 240 mm/s^2 ↓, 345 mm/s^2 ↑. (*b*) 130 mm/s →, 43,3 mm/s ↑. (*c*) 728 mm →.
11.57 (*a*) 40 mm/s^2↑, 60 mm/s^2↓. (*b*) 0,667 s. (*c*) 13,3 mm↑.
11.58 (*a*) $5(1 - 6t^2)$ mm/s^2. (*b*) 181 mm.
11.63 (*a*) $0 < t < 10$ s, $a = 0$; 10 s $< t < 26$ s, $a = -5$ mm/s^2; 26 s $< t < 41$ s, $a = 0$; 41 s $< t < 46$ s, $a = 3$ mm/s^2; $t > 46$ s, $a = 0$; $x = -540$ mm em $t = 0$, $x = 60$ mm em $t = 10$ s, $x = 380$ mm em $t = 26$ s, $x = 80$ mm em $t = 41$ s, $x = 17{,}5$ mm em $t = 46$ s, $x = -2{,}5$ mm em $t = 50$ s. (*b*) 1,383 m. (*c*) 9,00 s, 49,5 s.
11.64 (*a*) Mesmo do Prob. 11.63. (*b*) 420 mm. (*c*) 10.69 s, 40.0 s.
11.65 (*a*) 44,8 s. (*b*) 103,3 m/s^2 ↑.
11.66 207 mm/s
11.69 3,96 m/s^2.
11.70 (*a*) 0,600 s. (*b*) 0,200 m/s, 2,84 m.
11.71 8,8 s.
11.72 8,54 s, 92,9 km/h.
11.73 1,525 s.
11.74 (*a*) 50,0 m/s, 1.194 m. (*b*) 59,25 m/s.
11.77 (*a*) 18,00 s. (*b*) 178,8 m, (*c*) 34,7 km/h.
11.78 (*b*) 3,75 m.
11.79 (*a*) 2,00 s. (*b*) 0,4 m/s, 0,2 m/s.
11.80 (*a*) 5,09 min. (*b*) 30,6 km/h.
11.83 (*a*) 2,95 s. (*b*) 66,7 m.
11.84 (*a*) 4,1 m/s^2. (*b*) 2,86 m/s^2.
11.86 104 m
11.89 (*a*) 8,60 mm/s ∠ 35,5°, 17,20 mm/s^2 ∠ 35,5°. (*b*) 33,4 mm/s ∠ 8,6°, 39,3 mm/s^2 ∠ 14,7°.
11.90 (*a*) 0, 159,1 m/s^2 ∠ 82,9°. (*b*) 6,28 m/s →, 157,9 m/s^2 ↓.
11.91 (*a*) 5,37 m/s. (*b*) $t = 2{,}80$ s, $x = -7{,}56$ m, $y = 5{,}52$ m, $\mathbf{v} = 5{,}37$ m/s^2 ∠ 63,4°.
11.92 (*a*) 2,00 m/s, 6,00 m/s. (*b*) Para v_{min}, $t = 2N\pi$ s, $x = 8N\pi$ m, $y = 2$ m, $v = 2{,}00$ m/s → ou 2,00 m/s ←. Para v_{max}, $t = (2N + 1)\pi$ s, $x = 4(2N + 1)\pi$ m, $y = 6$ m, $v = 6{,}00$ m/s → ou 6,00 m/s ←.
11.95 $\sqrt{R^2(1 + \omega_n^2 t^2) + c^2}$, $R\omega_n\sqrt{4 + \omega_n^2 t^2}$.
11.96 (*a*) 3,00 m/s, 3,61 m/s^2. (*b*) 3,82 s.
11.97 353 m.
11.98 (*a*) 15,50 m/s. (*b*) 5,12 m.
11.99 4,65 m/s $\leq v_0 \leq$ 10,57 m/s.
11.100 (*a*) 113,7 km/h $\leq v_0 \leq$ 135 km/h. (*b*) 6,7°, 4,8°.
11.101 (*a*) 2,87 m > 2,43 m. (*b*) 7,01 m a partir da rede.
11.102 0,244 m ≤ h ≤ 0,386 m.
11.103 215 m.
11.104 $0 \leq d \leq 0{,}52$ m.
11.105 7,2 m/s.
11.106 (*a*) 9,2 m/s. (*b*) 9,15 m/s.
11.107 10,64 m/s $\leq v_0 \leq$ 14,48 m/s.
11.108 0,678 m/s $\leq v_0 \leq$ 1,211 m/s.
11.111 (*a*) 5°. (*b*) 285 m. (*c*) 16 s.
11.112 (*a*) 14,7°. (*b*) 0,106 s.
11.113 (*a*) 10,38°. (*b*) 9,74°.
11.115 (*a*) 45,0°, 6,52 m. (*b*) 58,2°, 5,84 m.
11.117 (*a*) 1,540 m/s ∠ 38,6°. (*b*) 1,503 m/s ∠ 58,3°.
11.118 5,05 m/s ∠ 55,8°.
11.119 3,4 km/h ∠ 7,8°.
11.120 (*a*) 2,67 km/h ∠ 12,97°. (*b*) 258 km/h ∠ 76,4°. (*c*) 65 km ∠ 40°.
11.123 (*a*) 8,53 cm/s ∠ 54,1°. (*b*) 6,40 cm/s^2 ∠ 54,1°.
11.124 (*a*) 7 cm/s ∠ 60,6°. (*b*) 11,7 cm/s^2 ∠ 60,6°.
11.125 (*a*) 0,835 mm/s^2 ∠ 75°. (*b*) 8,35 mm/s ∠ 75°.
11.126 (*a*) 0,958 m/s^2 ∠ 23,6°. (*b*) 1,917 m/s ∠ 23,6°.
11.127 3,37 m/s ∠ 81,1°
11.128 (*a*) 1,55 m/s ∠ 15°. (*b*) 0,3 m/s ∠ 15°.

11.129 17,49 km/h ⦣ 59,0°.
11.130 15,79 km/h ⦨ 26,0°.
11.133 28,0 m/s.
11.134 (*a*) 250 m. (*b*) 82,9 km/h.
11.135 571 m.
11.136 95,7 km/h.
11.137 (*a*) 20,0 mm/s^2. (*b*) 26,8 mm/s^2.
11.138 (*a*) 178,9 m. (*b*) 1.118 m/s^2.
11.139 0,8 m/s^2.
11.141 5 m/s^2.
11.143 (*a*) 281 m. (*b*) 209 m.
11.144 (*a*) 7,99 m/s ⦣ 40°. (*b*) 3,82 m.
11.145 (*a*) 1,6 m. (*b*) 0,027 m.
11.146 (*a*) 0,634 m. (*b*) 9,1 m.
11.147 $\rho_B = v_B^2/9v_A$.
11.148 18,17 m/s ⦣ 4,04° e 18,17 m/s ⦨ 4,04°.
11.151 $(R^2 + c^2)/2\omega_n R$.
11.152 2,50 m.
11.153 $25,8 \times 10^3$ km/h.
11.154 $12,56 \times 10^3$ km/h.
11.155 $153,3 \times 10^3$ km/h.
11.156 $147,3 \times 10^6$ km.
11.157 $1403,7 \times 10^6$ km.
11.158 1,606 h.
11.161 (*a*) $3\pi b\, \mathbf{e}_\theta$, $-4\pi^2 b\, \mathbf{e}_r$. (*b*) $\theta = 2\mathrm{N}\pi$, N = 0, 1, 2, ...
11.162 (*a*) $2b\omega$, $4b\omega^2$. (*b*) $\rho = b$, um círculo.
11.163 (*a*) $-(6\pi \text{ m/s}^2)\mathbf{e}_r$, $(80\,\pi \text{ m/s}^2)\mathbf{e}_\theta$. (*b*) 0.
11.165 (*a*) $(2\pi \text{ m/s})\mathbf{e}_\theta$, $-(4\pi^2 \text{ m/s}^2)\mathbf{e}_r$
(*b*) $-(\pi/2 \text{ m/s})\mathbf{e}_r + (\pi \text{ m/s})\mathbf{e}_\theta$, $-(\pi^2/2 \text{ m/s}^2)\mathbf{e}_r - (\pi^2 \text{ m/s}^2)\mathbf{e}_\theta$.
11.166 (*a*) $2abt$, $2ab\sqrt{1 + 4b^2t^4}$. (*b*) $\rho = a$ (um círculo).
11.169 $d\dot{\theta}\, \mathrm{tg}\, \beta \sec \beta/(\mathrm{tg}\, \beta \cos \theta - \mathrm{sen}\, \theta)^2$.
11.170 $v_0 \cos \beta\, (\mathrm{tg}\, \beta \cos \theta + \mathrm{sen}\, \theta)^2/h$.
11.171 185,7 km/h.
11.172 97,9 km/h, 49,7°.
11.175 $(b\omega^2/\theta^3)\sqrt{4 + \theta^4}$.
11.176 $(1 + b^2)\, \omega^2 e^{b\theta}$.
11.180 $\mathrm{tg}^{-1}\left[R(2 + \omega_N^2 t^2)/c\sqrt{4 + \omega_N^2 t^2}\right]$
11.181 (*a*) $\theta_x = 90°$, $\theta_y = 123,7°$, $\theta_z = 33,7°$. (*b*) $\theta_x = 103,4°$, $\theta_y = 134,3°$, $\theta_z = 47,4°$.
11.182 (*a*) 1,00 s, 4,00 s. (*b*) 1,50 m, 24,5 m.
11.184 (*a*) -729×10^3 m/s^2. (*b*) $1,366 \times 10^{-3}$ s.
11.185 (*a*) 11,62 s, 20,9 m. (*b*) 5,5 m/s.
11.186 (*a*) 3,00 s. (*b*) 56,25 mm abaixo de sua posição inicial.
11.187 $\mathbf{v}_A$ = 125 mm/s↑, $\mathbf{v}_B$ = 75 mm/s↓, $\mathbf{v}_C$ = 175 mm/s↓.
11.189 17,88 km/h ⦣ 36,4°.
11.190 0,75 m/s^2.
11.193 $\dot{r}$ = 120 m/s, $\ddot{r}$ = 34,8 m/s^2, $\dot{\theta}$ = −0,0900 rad/s, $\ddot{\theta}$ = −0,0156 rad/s^2.

CAPÍTULO 12

12.1 (*a*) 48,90 N em 0°, 49,03 N em 45°, 49,16 N em 90°. (*b*) 5,000 kg em todas as latitudes.
12.2 (*a*) 3,24 N. (*b*) 2,00 kg.
12.3 $1,300 \times 10^6$ kg · m/s.
12.5 (*a*) 6,67 m/s. (*b*) 0,0755.
12.6 (*a*) 225 km/h. (*b*) 187,1 km/h.
12.7 335,5 m.
12.8 (*a*) 40,6 m. (*b*) 46,7 m.
12.9 419 N no início e 301 N durante o deslizamento.
12.10 0,414 m/s^2 ⦨ 15°.
12.11 (*a*) A: 2,49 m/s^2 →, *B*: 0,831 m/s^2↓. (*b*) 74,8 N.
12.12 (*a*) A: 0,698 m/s^2 →, *B*: 0,233 m/s^2↓. (*b*) 79,8 N.
12.15 (*a*) 0,986 m/s^2 ⦩ 25°. (*b*) 51,7 N.
12.16 (*a*) 1,794 m/s^2 ⦩ 25°. (*b*) 58,2 N.
12.17 (*a*) 0,304 m/s^2 ⦣ 15°, 0,493 m/s^2 ⦣ 15°.
12.19 *Sistema 1*: (*a*) 3,27 m/s^2. (*b*) 4,43 m/s. (*c*) 1,835 s.
Sistema 2: (*a*) 4,81 m/s^2. (*b*) 5,37 m/s. (*c*) 1,247 s.
Sistema 3: (*a*) 0,23 m/s^2. (*b*) 1,18 m/s. (*c*) 26,087 s.
12.20 (*a*) 1,962 m/s^2 ↑. (*b*) 39,1 N.
12.21 (*a*) 6,63 m/s^2 ←. (*b*) 0,321 m →.
12.22 (*a*) 19,53 m/s^2 ⦣ 65°. (*b*) 4,24 m/s^2 ⦪ 65°.
12.24 $0,347\, m_0 v_0^2/F_0$.
12.26 $\sqrt{k/m}\, (\sqrt{l^2 + x_0^2} - l)$.
12.27 209,7 km/h.
12.28 (*a*) 33,6 N. (*b*) $\mathbf{a}_A$ = 4,76 m/s^2 →, $\mathbf{a}_B$ = 3,08 m/s^2 ↓, $\mathbf{a}_C$ = 1,401 m/s^2 ←.
12.29 (*a*) 36,0 N. (*b*) $\mathbf{a}_A$ = 5,23 m/s^2 →, $\mathbf{a}_B$ = 2,62 m/s^2↓. $\mathbf{a}_C$ = 0.
12.30 (*a*) $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_D$ = 0,84 m/s^2↓, $\mathbf{a}_C$ = 3,36 m/s^2↑. (*b*) 184 N.
12.31 (*a*) 7,36 m/s↓. (*b*) 5,26 m/s↑
12.36 (*a*) 80,4 N. (*b*) 2,30 m/s.
12.37 (*a*) 49,9°. (*b*) 6,85 N.
12.38 2,5 m/s.
12.40 2,77 m/s $< v <$ 4,36 m/s.
12.42 3,51 m/s $< v_C <$ 4,64 m/s
12.43 0,73 m/s $< v <$ 4,34 m/s.
12.44 (*a*) 131,7 N. (*b*) 88,4 N.
12.45 (*a*) 553 N. (*b*) 659 N.
12.46 (*a*) 201 m. (*b*) 589 N↑.
12.47 (*a*) 2,16 m/s^2 ⦨ 20°. (*b*) 2,91 m/s^2 ⦨ 20°.
12.48 (*a*) 2,905 N. (*b*) 13,09°.
12.49 1.126 N ⦩ 25,6°.
12.50 24,1° $\leq \theta \leq$ 155,9°.
12.51 (*a*) 44°. (*b*) 0,390. (*c*) 126 km/h.
12.53 (*a*) 0,186 W. (*b*) 10,3°.
12.55 468 mm.
12.56 2,36 m/s $\leq v \leq$ 4,99 m/s.
12.57 (*a*) 0,1967, movimento iminente de queda. (*b*) 0,342, movimento iminente para cima.
12.58 (*a*) Não desliza. 9,36 N ⦩ 80°. (*b*) Desliza para baixo. 5,41 N ⦩ 40°.
12.61 (*a*) 0,1776. (*b*) 10,1° para o movimento iminente para a esquerda., 169,9° para o movimento iminente para a direita.
12.62 (*a*) 0,81 m/s. (*b*) 19,29° para o movimento iminente para a esquerda. 160,7° para o movimento iminente para a direita.
12.64 $1.054\sqrt{eV/mv_0^2}$.
12.65 1,333 *l*.
12.66 (*a*) F_r = −10,73 N, F_θ = 0,754 N. (*b*) F_r = −4,44 N, F_θ = 1,118 N.
12.67 F_r = 0,0523 N, F_θ = 0,432 N.
12.68 (*a*) F_r = −4,7 N, F_θ = 0,96 N. (*b*) F_r = −2,4 N, F_θ = −0,24 N.

12.69 (*a*) $mc^2(r_0 - kt)\,t^2$. (*b*) $mc(r_0 - 3kt)$.

12.70 2,00 s.

12.71 $\mathbf{P} = (5{,}76\text{ N})\,\text{tg}\,\theta\,\sec^3\theta \searrow \theta$
$\mathbf{Q} = (5{,}76\text{ N})\,\text{tg}^2\,\theta\,\sec^2\theta \rightarrow$

12.76 $v_r = v_0 \,\text{sen}\, 2\theta/\sqrt{\cos 2\theta}$. $v_\theta = v_0\sqrt{\cos 2\theta}$.

12.79 (*a*) $r = (gr^2R^2/4\pi^2)^{1/3}$. (*b*) $g = 24{,}8$ m/s^2.

12.80 (*a*) 35.800 km. (*b*) 3,07 km/s.

12.81 $6{,}36 \times 10^{24}$ kg.

12.82 (*a*) 1 h 57 min. (*b*) 3.380 km.

12.84 (*a*) $86{,}9 \times 10^{24}$ kg. (*b*) 436.000 km.

12.86 (*a*) 1.680 m/s. (*b*) 8.892 m/s.

12.87 (*a*) 1.551 m/s. (*b*) 15,8 m/s.

12.88 5.000 m/s.

12.89 19 m/s.

12.90 (*a*) Em *A* $(a_A)_r = 0$, $(a_A)_\theta = 0$. (*b*) 38,4 m/s^2.
(*c*) 0,8 m/s.

12.91 (*a*) 0,6 m/s. (*b*) $a_r = -6$ m/s^2, $a_\theta = 0$. (*c*) $-5{,}2$ m/s^2.

12.98 10,42 km/s.

12.99 (*a*) 10,13 km/s. (*b*) 2,97 km/s.

12.103 (*a*) 8×10^3 m/s. (*b*) 135 m/s.

12.104 $\sqrt{2/(2+\alpha)}$.

12.105 (*a*) 16×10^3 m/s. (*b*) 387 m/s em *A*, 1.192 m/s em *B*.

12.108 97,25 h.

12.109 4,95 h.

12.110 56,0°.

12.112 $5{,}31 \times 10^9$ km.

12.114 $\cos^{-1}[(1 - n\beta^2)/(1 - \beta^2)]$.

12.115 81,0 m/s.

12.116 (*a*) 14,37°. (*b*) 59,8 km/s.

12.119 (*a*) $(r_1 - r_0)/(r_1 + r_0)$. (*b*) 609×10^{12} m.

12.122 78,5 m.

12.124 (*a*) 8 N. (*b*) 102 N.

12.125 (*a*) 6,8 m/s^2 $\nearrow$ 30°. (*b*) 5,9 m/s^2 $\rightarrow$.

12.127 (*a*) 0,454, para baixo. (*b*) 0,1796, para baixo.
(*c*) 0,218, para cima.

12.128 (*a*) $F_r = -55{,}9$ N, $F_\theta = 8{,}9$ N.
(*b*) $\mathbf{P} = 29{,}3$ N $\searrow$ 70°, $\mathbf{Q} = 59{,}5$ N $\nearrow$ 40°.

12.129 $v_r = 2v_0 \,\text{sen}\, 2\theta$, $v_\theta = v_0 \cos 2\theta$.

12.131 (*a*) $r = 0{,}38$ m, $F_H = 0$.
(*b*) $r = 0{,}26$ m, $F_H = -12{,}2$ N.

12.132 1,147.

CAPÍTULO 13

13.1 (*a*) 585 kJ. (*b*) 41,0 km/h.

13.2 $6{,}94 \times 10^9$ J.

13.5 (*a*) 203 km/h. (*b*) 166 km/h.

13.6 (*a*) 52,4 km/h. (*b*) 228,7 km/h.

13.7 4,05 m/s.

13.8 2,99 m.

13.9 (*a*) 8,57 m/s $\angle$ 15°. (*b*) 5,30 m/s $\nearrow$ 15°.

13.10 (*a*) 8,70 m. (*b*) 4,94 m/s $\nearrow$ 15°.

13.13 6,71 m.

13.14 (*a*) 2,90 m/s. (*b*) 0,893 m.

13.15 (*a*) 37,4 m. (*b*) $F_{AB} = 95$ kN (tração),
$F_{BC} = 42{,}2$ kN (tração).

13.16 (*a*) 84 m. (*b*) $F_{AB} = 95$ kN (compressão),
$F_{BC} = 42{,}3$ kN (compressão).

13.21 (*a*) 2,34 m/s $\leftarrow$. (*b*) 235 mm.

13.22 (*a*) 45,7 J. (*b*) $T_A = 83{,}2$ N, $T_B = 60{,}3$ N.

13.23 (*a*) 3,16 m/s$\downarrow$. (*b*) 5,48 m/s$\downarrow$.

13.24 (*a*) 3,43 m/s $\nearrow$ 23,6°. (*b*) 4,8 m/s $\nearrow$ 23,6°.

13.25 1,190 m/s.

13.26 (*a*) 0,76 m/s. (*b*) 0,78 m/s.

13.27 (*a*) 0,0765 m. (*b*) Block moves to the right.

13.29 (*a*) 3,29 m/s. (*b*) 1,472 m.

13.31 (*a*) 20,6 mm $\downarrow$. (*b*) 0,22 m/s $\uparrow$ ou $\downarrow$.

13.33 $0{,}759\sqrt{paA/m}$.

13.35 $1/[1 - (v_0^2 - v^2)/2g_mR_m]$.

13.36 1.212 m.

13.38 (*a*) 32,7 mm, 98,1 N$\uparrow$. (*b*) 30,4 mm, 104,9 N$\uparrow$.

13.39 (*a*) $\sqrt{3gl}$. (*b*) $\sqrt{2gl}$.

13.40 14,00°.

13.41 750 N.

13.42 mínimo = 750 N, máximo = 4464 N.

13.44 (*a*) 27,9°. (*b*) 1,14 m.

13.46 (*a*) 30 W/s. (*b*) 175 W/s.

13.49 (*a*) 109,0 kW. (*b*) 530 kW.

13.50 (*a*) 2,75 kW. (*b*) 3,35 kW.

13.51 14,8 kN.

13.52 (*a*) 13,5 kN. (*b*) 218 kW.

13.53 (*a*) 375 kW. (*b*) 5,79 km/h.

13.54 (*a*) 58,9 kW. (*b*) 52,9 kW.

13.55 (*a*) $k_1k_2/(k_1 + k_2)$. (*b*) $k_1 + k_2$.

13.56 (*a*) $x_0\sqrt{k_1k_2/m(k_1 + k_2)}$. (*b*) $x_0\sqrt{(k_1 + k_2)/m}$.

13.57 3,19 m/s $\rightarrow$ ou 3,19 m/s $\leftarrow$.

13.58 (*a*) 1,2 m/s. (*b*) 9,15 m/s^2.

13.59 4,9 m/s.

13.61 (*a*) 87,2 m/s. (*b*) 105,8 m/s.

13.62 (*a*) 1 m. (*b*) 4,42 m/s.

13.64 (*a*) 297 mm. (*b*) 2,42 m/s.

13.65 (*a*) 42,7°. (*b*) 2,43 m/s$\downarrow$.

13.68 0,269 m.

13.69 0,1744 m.

13.70 (*a*) 2,55 N. (*b*) 6,96 N.

13.71 (*a*) 8,15 N. (*b*) 2,94 N.

13.72 (*a*) 1,8 m/s. (*b*) –(38,15 N)**i** + (38,63 N)**j**.

13.73 2,72 m/s $\leftarrow$, 66,4 N$\uparrow$.

13.74 (1): (*a*) 7,99 m/s. (*b*) 5,89 N $\leftarrow$.
(2): (*a*) 7,67 m/s. (*b*) 3,92 N $\leftarrow$.

13.75 (*a*) Lançamento 1: mínimo $v_C = 3{,}84$ m/s $> 3{,}5$ m/s.
(*b*) Lançamento 2: $v_0 = 7{,}83$ m/s.

13.76 0,26 m.

13.77 4,64 m/s.

13.78 (*a*) $\tan\phi = 1{,}0281/(3 - y)$.
(*b*) $\theta_x = 85{,}7°$, $\theta_y = 71{,}6°$, $\theta_z = 161{,}1°$.

13.80 (*b*) $V = -\ln xyz$.

13.81 (*a*) $\pi ka^2/4$. (*b*) 0.

13.82 (*a*) $P_x = x(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P_y = y(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$,
$P_z = z(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$. (*b*) $a\sqrt{3}$.

13.85 (*a*) 90,42 J. (*b*) 208 GJ.

13.86 57,5 MJ/kg.

13.87 $24{,}9 \times 10^3$ km/h.

13.88 1,353 MJ/kg.

13.89 (*a*) $mgR(1 - R/r)$. (*b*) $mgR^2/2r$. (*c*) $mgR(1 - R/2r)$.

13.90 (*a*) 33,9 MJ/kg. (*b*) 46,4 MJ/kg.

13.93 (*a*) 0,919 m/s. (*b*) 8,27 m/s.

13.94 (*a*) 7,35 m/s. (*b*) 11,02 m/s.
13.95 $v_r = 2{,}98$ m/s, $v_\theta = 2{,}89$ m/s.
13.96 (*a*) 0,65 m. (*b*) 2,3 m/s.
13.97 máximo: 1.661 m, mínimo: 0,338 m, máximo: 25,6 m/s, mínimo: 5,21 m/s.
13.100 14,20 km/s.
13.101 29,8 m/s.
13.102 (*a*) 136,6 m/s; 128 m/s. (*b*) 2,01 MJ/kg.
13.103 (*a*) 5,612 km/s. (*b*) 9,663 km/s.
13.106 1.555 m/s, 79,3°.
13.107 máximo: $r_0(1 + \text{sen}\,\alpha)$, mínimo: $r_0(1 - \text{sen}\,\alpha)$
13.108 68,9°.
13.109 (*a*) 3.435 m/s. (*b*) 4.149 m/s.
13.110 58,8°.
13.111 (*a*) 31,5 m/s. (*b*) 1.053 m/s.
13.116 (*b*) $v_{esc}\sqrt{\alpha/(1+\alpha)} \leq v_0 \leq v_{esc}\sqrt{(1+\alpha)/(2+\alpha)}$.
13.118 (*a*) $h = r_{mín}\, v_{máx}$, $E/m = \frac{1}{2}v_{máx}^2 - GM/r_{mín}$.
13.119 (*a*) 3,40 s. (*b*) 25,5 s.
13.120 5 min 17 s.
13.121 (*a*) 3,06 s. (*b*) 1,47 s.
13.122 (*a*) 11,42 s. (*b*) $-(125{,}5 \text{ m/s})\mathbf{j} - (194{,}5 \text{ m/s})\mathbf{k}$.
13.123 (*a*) 2,47 s. (*b*) 12,25 s.
13.124 2,61 s.
13.126 0,260.
13.127 0,310.
13.129 (*a*) 15,04 s. (*b*) 3,2 kN (tração).
13.130 (*a*) 30,07 s. (*b*) 11,61 kN (tração).
13.131 (*a*) 19,60 s. (*b*) 10,20 kN (compressão).
13.132 (*a*) 3,92 m/s. (*b*) 39,2 N.
13.134 (*a*) 9,2 m/s. (*b*) 24,4 m/s.
13.135 (*a*) 24,4 m/s. (*b*) 5,49 s.
13.136 (*a*) 5,00 s. (*b*) 15,2 m/s. (*c*) 17,88 s.
13.137 (*a*) 7,00 s. (*b*) 3,35 m/s. (*c*) 13,49 s.
13.139 8,18%.
13.140 6,21 W.
13.141 3,02 kN.
13.142 (*a*) 17,64 kN. (*b*) 35,27 kN.
13.145 (*a*) 1,333 km/h ←. (*b*) 0,1888 s.
13.146 (*a*) A estava mais rápido. (*b*) 115,2 km/h.
13.147 (*a*) 8,51 km/h. (*b*) 6,67 N.
13.148 144 m/s.
13.149 (*a*) *A*: $v_0\sqrt{L^2 - a^2}/2L$, *B*: $v_0\sqrt{L^2 + 3a^2}/2L$. (*b*) $mv_0^2\,(L^2 - a^2)/4L^2$.
13.150 (*a*) 0,185 m/s. (*b*) 0,912 m/s.
13.151 (*a*) 1,000 m/s↑. (*b*) 0,500 N · s↑.
13.152 $mMv_0 \cos\theta/(m + M) \rightarrow$, $mv_0 \text{ sen}\,\theta\uparrow$.
13.155 (*a*) $\mathbf{v}'_A = 0{,}363$ m/s ←, $\mathbf{v}'_B = 2{,}44$ m/s →. (*b*) 4,13 J.
13.157 0,75.
13.158 (*a*) $v'_A = 2{,}35$ m/s →, $v'_B = 3{,}1$ m/s →. (*b*) 0,151 J.
13.159 *A*: 1,013 m/s ←, *B*: 0,338 m/s ←, *C*: 0,150 m/s ←.
13.160 (*a*) $v'_A = v_0(1 - e)/2$, $v'_B = v_0(1 + e)/2$. (*b*) $v'_C = v_0(1 + e)^2/4$, $v'_B = v_0(1 - e)^2/4$. (*c*) $v'_n = v_0(1 + e)^{(n-1)}/2^{(n-1)}$, (*d*) 0,881 v_0.
13.163 0,728 ≤ e ≤ 0,762.
13.165 $\mathbf{v}'_A = 6{,}37$ m/s ⦪ 77,2°, $\mathbf{v}'_B = 1{,}802$ m/s ⦨ 40°.
13.166 $\mathbf{v}'_A = 3{,}00$ m/s ⦪ 40°, $\mathbf{v}'_B = 3{,}00$ m/s ⦨ 40°.
13.167 (*a*) $v_A = 0{,}848\, v_0$ ⦩ 27,0°, $v_B = 0{,}456\, v_0$ ⦨ 57.6°.
13.168 (*a*) 70,2°. (*b*) 0,32 m/s →.
13.169 0,857.
13.170 15,94 m.
13.173 (*a*) 22,5°. (*b*) 21,3°.
13.174 (*a*) 0,294 m. (*b*) 54,4 mm.
13.175 (*a*) 0,685 m para $e = 1$, 0,484 m para $e = 0$. (*b*) 5,00 m/s → para $e = 1$, 2,50 m/s → para $e = 0$.
13.176 (*a*) $\mathbf{v}'_A = \mathbf{v}'_B = 0$. (*b*) $\mathbf{v}'_A = 1{,}201$ m/s ←, $\mathbf{v}'_B = 0{,}400$ m/s →.
13.177 (*a*) 0,258. (*b*) 4,34 m/s.
13.178 (*a*) 0,236 m. (*b*) 166,5 N/m.
13.179 (*a*) $e = 1{,}000$. (*b*) 0,656 m. (*c*) 0,83 m.
13.183 (*a*) 2,90 m/s. (*b*) 100,5 J.
13.184 (*a*) 401 mm. (*b*) 4,10 N · s.
13.185 (*a*) 0,923. (*b*) 1,278 m.
13.188 $\mathbf{v}'_A = 0{,}35$ m/s ←, $\mathbf{v}'_B = 1{,}04$ m/s →.
13.190 5,98 J.
13.191 (*a*) 7,2 kN/m. (*b*) 12,4 m.
13.194 3.969 m/s.
13.196 65,0 KN.
13.197 0,707 *a*.
13.199 (*a*) 1,368 m/s. (*b*) 0,668 m. (*c*) 1,049 m.
13.200 $(1 + e)^2/4$.

CAPÍTULO 14

14.1 (*a*) 1,417 m/s →. (*b*) 1,417 m/s →.
14.2 (*a*) 10,00 kg. (*b*) 1,200 m/s →.
14.3 (*a*) 2,88 m/s ←. (*b*) 2,93 m/s ←.
14.4 (*a*) 0,88 m/s ←. (*b*) 0,071 m/s ←.
14.7 (*a*) *A*: 1,288 m/s ←, *B*: 0,312 m/s →, *C*: 1.512 m/s →. (*b*) *A*: 0,956 m/s ←, *B*: 0,0296 m/s ←, *C*: 1,552 m/s →.
14.8 0,294 m/s ←.
14.9 $-(31{,}2 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (64{,}8 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (48{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
14.10 (*a*) $(0{,}600 \text{ m})\mathbf{i} + (1{,}400 \text{ m})\mathbf{j} + (1{,}525 \text{ m})\mathbf{k}$. (*b*) $-(26{,}0 \text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{i} + (14{,}00 \text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{j} + (14{,}00 \text{ kg}\cdot\text{m/s})\mathbf{k}$. (*c*) $-(29{,}5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i} - (16{,}75 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{j} + (3{,}20 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{k}$.
14.13 (*a*) $v_x = -0{,}375$ m, $v_z = -1{,}375$ m. (*b*) $\mathbf{H}_O = -(17{,}75 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})\mathbf{i}$.
14.15 $(2.440 \text{ m})\mathbf{i} + (200 \text{ m})\mathbf{j} + (200 \text{ m})\mathbf{k}$.
14.16 $(133{,}3 \text{ m})\mathbf{i} - (80{,}2 \text{ m})\mathbf{j} + (13{,}3 \text{ m})\mathbf{k}$.
14.17 $(1.004 \text{ m})\mathbf{i} - (48{,}7 \text{ m})\mathbf{j}$.
14.18 $(503 \text{ m})\mathbf{i} - (547 \text{ m})\mathbf{j}$.
14.21 (*a*) 2,98 m/s. (*b*) 1,44 m/s.
14.22 (*a*) 2,13 m/s. (*b*) 2,34 m/s.
14.23 $(26{,}0 \text{ m})\mathbf{i} + (125{,}4 \text{ m})\mathbf{k}$.
14.24 $v_A = 919$ m/s, $v_B = 717$ m/s, $v_C = 619$ m/s.
14.31 (*a*) 42,2 J. (*b*) 5,10 J.
14.32 (*a*) 264 J. (*b*) 352 J.
14.33 mulher: 600 J, homem: 703 J.
14.34 (*a*) 1.617 J. (*b*) 905 J.
14.37 (*a*) $\mathbf{v}_B = m_A v_0/(m_A + m_B) \rightarrow$. (*b*) $h = m_A v_0^2/2g\,(m_A + m_B)$.
14.38 (*a*) $\mathbf{v}_A = 0{,}200\, v_0$ ←, $\mathbf{v}_B = 0{,}693\, v_0$ ⦨ 30°, $\mathbf{v}_C = 0{,}693\, v_0$ ⦩ 30°. (*b*) $\mathbf{v}_A = 0{,}250\, v_0$ ⦪ 60°, $\mathbf{v}_B = 0{,}866\, v_0$ ⦨ 30°, $\mathbf{v}_C = 0{,}433\, v_0$ ⦩ 30°.

14.39 $v_A = 3{,}54$ m/s, $v_B = 1{,}77$ m/s, $v_C = 3{,}06$ m/s.
14.40 $v_A = 2{,}5$ m/s, $v_B = 3{,}06$ m/s, $v_C = 3{,}06$ m/s.
14.41 $\mathbf{v}_A = 4{,}11$ m/s $\measuredangle$ 46,9°, $\mathbf{v}_B = 17{,}39$ m/s $\measuredangle$ 16,7°.
14.42 $\mathbf{v}_A = 12{,}17$ m/s $\measuredangle$ 25,3°, $\mathbf{v}_B = 9{,}17$ m/s $\measuredangle$ 70,9°.
14.45 (60,0 m/s)**i** + (60,0 m/s)**j** + (390 m/s)**k**.
14.46 $x_{B_0} = 181{,}7$ mm, $y_{B_0} = 0$, $z_{B_0} = 139{,}4$ mm.
14.49 (*a*) 0,866 v_0. (*b*) 0,250 v_0. (*c*) 7,50%.
14.50 (*a*) 0,707 v_0. (*b*) 0,500 v_0. (*c*) 12,50%.
14.51 (*a*) $\mathbf{v}_A = 2{,}56$ m/s ↑, $\mathbf{v}_B = 4{,}24$ m/s $\measuredangle$ 31,9°.
(*b*) 2,34 m.
14.52 (*a*) $\mathbf{v}_0 = (2{,}4$ m/s)**i** + (1,8 m/s)**j**. (*b*) 600 mm.
(*c*) 20,0 rad/s.
14.53 (*a*) $v_B = 2{,}83$ m/s $\measuredangle$ 45°, $v_C = 2$ m/s →. (*b*) 1,3 m.
14.54 (*a*) $\mathbf{v}_A = 2{,}45$ m/s ↓, $\mathbf{v}_B = 3{,}16$ m/s $\measuredangle$ 50,8°.
(*b*) 1,74 m.
14.57 312 N.
14.58 4,18 m/s.
14.59 90,6 N ←.
14.60 (*a*) 16,68 kN. (*b*) 31,18 kN.
14.63 **C** = 161,7 N ↑, $\mathbf{D}_x = 154{,}8$ N →, $\mathbf{D}_y = 170{,}2$ N ↑.
14.67 (*a*) 61,1 m/s. (*b*) 59,2 N $\measuredangle$ 49,0°.
14.68 $C_x = 90{,}0$ N, $C_y = 2.360$ N, $D_x = 0$, $D_y = 2.900$ N.
14.69 36,9 kN.
14.70 97,6 kg/s.
14.71 (*a*) 46,1 kN, 1,2 m. (*b*) 32,22 kN, 3,45 m.
14.73 1,096 m.
14.74 41,4 kN.
14.75 (*a*) 863 km/h. (*b*) 657 km/h.
14.77 (*a*) 15,47 kJ/s. (*b*) 0,323.
14.78 (*a*) 80,0 kJ/s. (*b*) 51,9 km/h.
14.79 (*a*) 12 MW. (*b*) 21,6 MW. (*c*) 0,56.
14.80 (*a*) 32,4 m/s. (*b*) 101,8 m^3/s. (*c*) 64,65 kJ/s
14.84 14,35 m^3/s.
14.85 (*a*) $P = qv$.
14.86 *Caso 1.* (*a*) 0,333 g ↓. (*b*) $0{,}817\sqrt{gl}$ ↓.
Caso 2. (*a*) gy/l ↓. (*b*) $\sqrt{gl}$ ↓.
14.87 (*a*) $(m/l)(v^2 + gy)$. (*b*) $mg(1 - y/l)$↑.
14.88 (*a*) mgy/l. (*b*) $(m/l)\,[g(l - y) + v^2]$↑.
14.89 3,4 m/s.
14.90 1,5 m/s.
14.92 533 kg/s.
14.93 (*a*) 90,0 m/s^2. (*b*) $35{,}9 \times 10^3$ km/h.
14.94 (*a*) 31,9 m/s^2↑. (*b*) 240 m/s^2 ↑.
14.95 2.369 kg.
14.96 1151 m/s.
14.97 7.930 m/s.
14.98 (*a*) 1.800 m/s. (*b*) 9.240 m/s.
14.99 186,8 km.
14.100 (*a*) 31,2 km. (*b*) 197,5 km.
14.106 (*a*) 5,20 km/h. (*b*) 4,00 km/h.
14.107 (*a*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C = 0{,}67$ km/h →.
(*b*) $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = 2{,}8$ km/h ←, $\mathbf{v}_C = 7{,}6$ km/h →.
14.109 $\mathbf{v}_A = 4{,}8$ m/s →, $\mathbf{v}_B = 1{,}6$ m/s ←.
14.111 (*a*) qv_0 ←. (*b*) $\sqrt{2gh}$ $\measuredangle$ 30°.
14.112 1,712 kN↑ em C, 2,29 kN ↑em D.
14.113 414 rpm.
14.114 v^2/g.
14.115 (*a*) $m_0 + qt_L = m_0 e^{qL/m_0v_0}$ (*b*) $v_L = v_0 e^{-qL/m_0v_0}$

CAPÍTULO 15

15.1 (*a*) 0, 15,00 rad/s, −18,00 rad/s^2.
(*b*) −9,00 rad, −12,00 rad/s^2, 0.
15.2 1,000 s, 7,00 rad, −12,00 rad/s^2;
5,00 s, −25,0 rad, 12,00 rad/s^2.
15.3 (*a*) 0, 0, 0. (*b*) 6,00 rad, 4,71 rad/s, −3,70 rad/s^2.
15.4 1,243 rad, 3,33 rad/s, 4,79 rad/s^2.
15.5 (*a*) 0, 0,1000 rad/s, −0,0250 rad/s^2.
(*b*) 0,211 rad, 0,0472 rad/s, −0,01181 rad/s^2.
(*c*) 0,400 rad, 0, 0.
15.6 (*a*) 4,00 s^{-2}. (*b*) 5,29 rad/s.
15.9 (*a*) 12,73 rev. (*b*) ∞. (*c*) 18,42 s.
15.10 −(0,400 m/s)**i** − (1,400 m/s)**j** − (0,700 m/s)**k**,
(8,40 m/s^2)**i** + (3,30 m/s^2)**j** − (11,40 m/s^2)**k**.
15.11 −(0,400 m/s)**i** + (0,700 m/s)**k**,
−(2,00 m/s^2)**i** − (6,50 m/s^2)**j** − (3,00 m/s^2)**k**.
15.12 −(0,450 m/s)**i** − (1,200 m/s)**j** + (1,500 m/s)**k**,
(12,60 m/s^2)**i** + (7,65 m/s^2)**j** + (9,90 m/s^2)**k**.
15.13 (0,750 m/s)**i** + (1,500 m/s)**k**, (12,75 m/s^2)**i** +
(11,25 m/s^2)**j** + (3,00 m/s^2)**k**.
15.16 (*a*) 464,5 m/s, 0,334 m/s^2. (*b*) 355,9 m/s,
0,026 m/s^2. (*c*) 0, 0.
15.18 (*a*) 0,0600 m/s^2. (*b*) 0,0937 m/s^2. (*c*) 0,294 m/s^2.
15.19 (*a*) 6,00 m/s^2. (*b*) 9,98 m/s^2, (*c*) 60,0 m/s^2.
15.21 (*a*) 2,67 rad/s ↺, 1,67 rad/s^2 ↻. (*b*) 1,1 m/s^2 $\measuredangle$ 76,8°.
15.22 12,00 rad/s^2 ↻.
15.24 (*a*) 6,28 m/s, 1.579 m/s^2. (*b*) 0,628 m/s, 15,80 m/s^2.
15.25 (*a*) 120 rpm, 275 rpm. (*b*) 23,7 m/s^2 ↑, 19,90 m/s^2 ↓.
15.27 (*a*) 10,00 rad/s ↺. (*b*) 7,50 m/s^2 ↓, 3,00 m/s^2 ↓.
(*c*) 4,00 m/s^2 ↓.
15.28 (*a*) 3,00 rad/s^2 ↻. (*b*) 4,00 s.
15.29 (*a*) 1,6 rad/s^2 ↺. (*b*) 6,4 rad/s ↺.
15.30 (*a*) 2,75 rev. (*b*) 1.710 m/s ↓, 3,11 m ↓.
(*c*) 849 mm/s^2 $\measuredangle$ 32,0°.
15.31 (*a*) 1,152 m/s ↑, 2,30 m ↑. (*b*) 1,728 m/s ↓, 3,46 m ↓.
15.32 *Disco A*: 5,41 rad/s^2 ↺; *Disco B*: 1,466 rad/s^2 ↺.
15.33 (*a*) 10,39 s. (*b*) *Disk A*: 413 rpm ↻; *Disco B*: 248 rpm ↺.
15.36 $bv^2/2\pi r^3$ ↻.
15.37 $b\omega_0^2/2\pi$ →.
15.38 (*a*) 0,378 rad/s ↻. (*b*) 0,16 m/s ↑.
15.39 (*a*) 0,684 rad/s ↺. (*b*) 0,306 m/s $\measuredangle$ 15°.
15.40 (*a*) 2,26 rad/s ↺. (*b*) 1,840 m/s $\measuredangle$ 60°.
15.41 (*a*) 2,54 rad/s ↻. (*b*) 1,346 m/s $\measuredangle$ 30°.
15.44 (*a*) 4,00 rad/s ↻. (*b*) −(100 mm/s)**i**.
15.45 (*a*) (300 mm/s)**i** + (200 mm./s)**j**.
(*b*) $x = 50$ mm, $y = 75$ mm.
15.46 (*a*) 2,00 rad/s ↻. (*b*) (120 mm/s)**i** + (660 mm/s)**j**.
15.48 (*a*) 105 rpm ↻. (*b*) 127,5 rpm ↻.
15.49 (*a*) 1,500. (*b*) 0,333 ω_A ↺.
15.50 70 rpm ↻.
15.51 (*a*) 135,0 rpm ↻. (*b*) 105,0 rpm ↻.
15.52 (*a*) 48,0 rad/s ↻. (*b*) 3,39 m/s $\measuredangle$ 45°.
15.55 (*a*) 60,0 rpm ↻, 1,9 m/s →. (*b*) 0, 2,5 m/s ←.
15.56 2,67 rad/s ↻, 1,72 m/s ←.
15.57 (*a*) 0, 39,3 rad/s ↺. (*b*) 6,28 m/s ↓, 0.
15.58 6,52 m/s ↓, 20,8 rad/s ↺.
15.60 (*a*) 0,1254 m/s ←. (*b*) 0,208 rad/s ↻.
15.61 (*a*) 3,02 rad/s ↻. (*b*) 0,657 rad/s ↺.

15.63 *Barra BD*: 0,955 rad/s ↺; *Barra DE*: 2,55 rad/s ↻.
15.64 *Barra BD*: 4,00 rad/s ↻; *Barra DE*: 6,67 rad/s ↺.
15.65 *Barra BD*: 5,20 rad/s ↻; *Barra DE*: 6,40 rad/s ↻.
15.66 (*a*) 3,33 rad/s ↺. (*b*) 2,00 m/s ↖ 56,3°.
15.68 (*a*) 12,00 rad/s ↻. (*b*) 2 m/s →.
15.69 (*a*) 12,00 rad/s ↻. (*b*) 1,8 m/s ↙ 56,3°.
15.70 *B*: 44,4 m/s →; *C*: 0; *D*: 42,9 m/s ↗ 15°;
E: 31,4 m/s ↖ 45°.
15.71 (*a*) 338 mm/s ←, 0. (*b*) 710 mm/s ←, 2,37 rad/s ↻.
15.72 $\omega_C = (1 - r_A/r_C)\omega_{ABC}$.
15.73 (*a*) *C* encontra-se 0,25 m à direita de *A*. (*b*) 0,1 m/s ↑.
15.74 $x = 0, z = 2{,}95$ m.
15.75 (*a*) 50,0 mm à direita do eixo.
(*b*) 750 mm/s↓, 1,950 m/s↓.
15.76 (*a*) 25,0 mm à direita do eixo. (*b*) 420 mm/s↑.
15.77 (*a*) 12,00 rad/s ↻.
(*b*) *Cremalheira*: 2,40 m/s → *D*: 2,16 m/s ↗ 56,3°.
15.78 (*a*) 10,00 mm à direita de *A*. (*b*) 40,0 mm/s↓.
(*c*) *DE*: desenrolado a 240 mm/s;
BF: desenrolado a 120 mm/s.
15.79 (*a*) 20,0 mm à direita de *A*. (*b*) 80,0 mm/s↓.
(*c*) *DE*: desenrolado a 240 mm/s;
BF: desenrolado a 120 mm/s.
15.82 (*a*) 12,00 rad/s ↺. (*b*) 3,90 m/s ↙ 67,4°.
15.83 (*a*) 5,00 rad/s ↺. (*b*) 1,300 m/s ↗ 67,4°.
15.84 (*a*) 2,89 rad/s ↻. (*b*) 2,08 m/s ↖ 73,9°.
15.85 (*a*) 0,326 rad/s ↺. (*b*) 0,96 m/s ↗ 59,2°.
15.89 (*a*) 4,42 rad/s ↺. (*b*) 3,26 m/s ↗ 50°.
15.90 (*a*) 1,579 rad/s ↻. (*b*) 699 mm/s ↗ 78,3°.
15.92 (*a*) 540 mm/s ↗ 79,6°. (*b*) 0,51 m/s ↖ 20,5°.
15.93 (*a*) 0,07 m/s ↗ 36,7°. (*b*) 0,216 m/s ↗ 75,0°.
15.95 (*a*) 1.260 mm/s↑. (*b*) 1.250 rad/s ↺.
15.96 (*a*) 0,338 rad/s ↻. (*b*) 78,8 mm/s ←.
15.97 (*a*) *DE*: 2,50 rad/s ↻; *AB*: 1,176 rad/s ↻.
(*b*) 0,735 m/s ←.
15.98 (*a*) *AB*: 2,00 rad/s ↻; *DE*: 5,00 rad/s ↺. (*b*) 0,6 m/s →.
15.99 *Centrodo espacial*: quarto de círculo de 400 mm de raio centrado em *O*. *Centrodo corporal*: semicírculo de 200 mm de raio com centro equidistante entre *A* e *B*.
15.100 *Centro espacial*: cremalheira inferior.
Centrodo corporal: circunferência da engrenagem.
15.102 4,00 rad/s ↻, 6,67 rad/s ↺.
15.103 5,20 rad/s ↻, 6,40 rad/s ↻.
15.104 *B*: 44,5 m/s →; *C*: 0; *D*: 42,9 m/s ↗ 15,0°;
E: 31,4 m/s ↖ 45°.
15.105 (*a*) 0,900 m/s² →. (*b*) 1.800 m/s² ←.
15.106 (*a*) 0,600 m de *A*. (*b*) 0,200 m de *A*.
15.107 (*a*) 0,889 rad/s² ↻. (*b*) 5,56 m/s² ↑.
15.108 *A*: 3 m/s² ↑; *B*: 0,6 m/s² ↓.
15.109 (*a*) 2,88 m/s² ←. (*b*) 3,60 m/s² ←.
15.110 (*a*) 2,88 m/s² →. (*b*) 7,92 m/s² →.
15.111 (*a*) 1.976 m/s² ↓. (*b*) 1976 m/s² ↑
(*c*) 1.976 m/s² ↖ 60°.
15.112 (*a*) 96,0 rad/s² ↺, 2,40 m/s² ←.
(*b*) 48,0 rad/s² ↺, 1,200 m/s² ←.
15.113 (*a*) 300 mm/s² →. (*b*) 247 mm/s² ↙ 14,0°.
15.115 *A*: 1,415 m/s² ↘ 58,0°; *B*: 2 m/s² ↑;
C: 4,3 m/s² ↘ 25,8°.
15.116 *A*: 1,2 m/s² ↑; *B*: 2,14 m/s² ↘ 69,4°;
C: 2,07 m/s² ↙ 65,0°.
15.118 (*a*) 0,35 m/s² ↙ 67,4°. (*b*) 0,337 m/s² ↗ 70°.
15.119 (*a*) 3,08 m/s². (*b*) 9,25 m/s².
15.120 (*a*) 59,8 m/s² ↑. (*b*) 190,6 in./s² ↑.
15.121 *D*: 1.558 m/s² ↖ 45°; *E*: 337 m/s² ↗ 45°.
15.122 (*a*) 30,45 m/s² ←. (*b*) 24,8 m/s² ←.
15.125 148,3 m/s²↓.
15.126 296 m/s²↑.
15.127 (*a*) 1.080 rad/s² ↻. (*b*) 137,9 m/s² ↘ 64,9°.
15.128 (*a*) 432 rad/s² ↺. (*b*) 81,6 m/s² ↘ 60,3°.
15.129 1,745 m/s² ↙ 68,2°.
15.130 (*a*) 7,20 rad/s². (*b*) 1,296 m/s² ←.
15.132 9,60 m/s² →.
15.133 (*a*) 10,75 rad/s² ↺. (*b*) 2,30 rad/s² ↺.
15.135 (*a*) 8,15 rad/s² ↺. (*b*) 0,896 rad/s².
15.138 v_B sen β/l cos θ.
15.139 $(v_B \text{ sen } \beta/l)^2 \text{ sen } \theta/\cos^3\theta$
15.140 $b\omega \cos\theta, b\alpha\cos\theta - b\omega^2 \text{ sen } \theta$.
15.141 $bv_A/(b^2 + x_A^2)$ ↺, $2bx_Ax_Av_A^2/(b^2 + x_A^2)^2$
15.143 $v[1 - \cos(vt/r)], v \text{ sen } (vt/r)$.
15.147 $(v_0/r)^2 (1 + \cos^2\theta) + \text{tg}^3\,\theta$ ↺.
15.149 $(R\omega \text{ sen } \omega t)\mathbf{j}, (R\omega^2 \cos\omega t)\mathbf{j}$.
15.150 (*a*) 1,815 rad/s ↻. (*b*) 0,41 m/s ↖ 20°.
15.151 (*a*) 5,16 rad/s ↻. (*b*) 1,339 m/s ↘ 60°.
15.152 *AP*: 4,68 rad/s ↺; *BE*: 1,415 rad/s ↺.
15.153 *AD*: 2,24 rad/s ↻; *BP*: 1,15 rad/s ↻.
15.156 (*a*) $\mathbf{v}_{H/AE} = l\omega$ ←, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0$.
(*b*) $\mathbf{v}_{H/AE} = 0{,}577\, l\omega$ ↘ 30°, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0{,}577\, l\omega$ ↗ 30°.
15.157 $\mathbf{v}_{H/AE} = 0{,}299\, l\omega$ ↘ 45°, $\mathbf{v}_{H/BD} = 0.816\, l\omega$ ↗ 15°.
15.160 (*a*) 0,520 m/s ↖ 82,6°. (*b*) 50,0 mm/s² ↘ 9,8°.
15.161 (*a*) 0,520 m/s ↖ 37,4°. (*b*) 50,0 mm/s² ↙ 69,8°.
15.162 (*a*) $-(1{,}5 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} + (2{,}7 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$. (*b*) $-(1{,}5 \text{ m/s}^2)\mathbf{j}$.
15.163 (*a*) $(2{,}4 \text{ m/s}^2)\mathbf{i} - (2{,}7 \text{ m/s}^2)\mathbf{k}$. (*b*) $(2{,}4 \text{ m/s}^2)\mathbf{i}$.
15.166 (*a*) 1,7 m/s² ↘ 21,5°. (*b*) 2,55 m/s² ↘ 3,2°.
15.167 (*a*) 2,38 m/s² ↙ 48,3°. (*b*) 1,44 m/s ↙ 64,3°.
15.168 *Elo 1:* 303 mm/s² →; *Elo 2:* 168,5 mm/s² ↙ 57,7°.
15.169 *Elo 3:* 483 mm/s² ←; *Elo 4:* 168,5 mm/s² ↘ 57,7°.
15.171 7,84 m/s² ↙ 4,05°.
15.174 (*a*) $\mathbf{a}_A$ = 0,621 m/s²↑. (*b*) $\mathbf{a}_B$ = 1,733 m/s² ↖ 53,9°.
(*c*) $\mathbf{a}_C$ = 2,62 m/s² ↙ 67,6°.
15.175 1,500 rad/s ↺, 7,79 rad/s² ↺.
15.176 6,00 rad/s ↺, 62,4 rad/s² ↻.
15.177 43,0 rad/s² ↻.
15.178 47,0 rad/s² ↻.
15.181 (*a*) 2,40 rad/s ↻, 34,6 rad/s² ↻.
(*b*) 1,342 m/s ↘ 63,4°, 9,11 m/s² ↖ 18,4°.
15.182 (*a*) 3,85 rad/s ↺. (*b*) 2,3 m/s ↗ 30°.
(*c*) 19 m/s² ↙ 54,2°.
15.183 (*a*) 3,85 rad/s ↻. (*b*) 2,3 m/s ↙ 30°.
(*c*) 19 m/s² ↙ 54,2°.
15.184 (*a*) (1,500 rad/s)**i** − (3,00 rad/s)**j** − (2,50 rad/s)**k**.
(*b*) (0,675 m/s)**i** − (0,35 m/s)**j** + (0,825 m/s)**k**.
15.185 (*a*) −(1,500 rad/s)**i** − (0,750 rad/s)**j** − (1,000 rad/s)**k**.
(*b*) (0,225 m/s)**i** − (0,35 m/s)**j** − (0,075 m/s)**k**.
15.186 (*a*) (0,480 rad/s)**i** − (1,600 rad/s)**j** + (0,600 rad/s)**k**.
(*b*) (400 mm/s)**i** + (300 mm/s)**j** + (480 mm/s)**k**.
15.187 (*a*) −(0,400 rad/s)**j** − (0,360 rad/s)**k**.
(*b*) (100 mm/s)**i** − (90 mm/s)**j** + (120 mm/s)**k**.

15.188 −(9,87 rad/s^2)**k**.
15.189 (118,4 rad/s^2)**i**.
15.190 (*a*) ω_1**j** + $(R/r)\omega_1$**k**. (*b*) $(R/r)\omega_1^2$**i**.
15.193 (*a*) −(0,600 m/s)**i** + (0,750 m/s)**j** − (0,600 m/s)**k**. (*b*) −(6,15 m/s^2)**i** − (3,00 m/s^2)**j**.
15.194 (*a*) −(20,0 rad/s^2)**j**. (*b*) −(1,6 m/s^2)**i** + (4 m/s^2)**k**. (*c*) −(4,1 m/s^2)**j**.
15.195 −(1,39 m/s^2)**i** − (2,05 m/s^2)**j** + (3,5 m/s^2)**k**.
15.196 (*a*) −(0,1745 rad/s)**i** − (0,524 rad/s)**j**. (*b*) −(0,0914 rad/s^2)**k**. (*c*) −(1,818 m/s)**i** + (0,605 m/s)**j** − (3,49 m/s)**k**, (0,366 m/s^2)**i** − (0,0609 m/s^2)**j** − (1,055 m/s^2)**k**.
15.198 (*a*) (8,00 rad/s)**i**. (*b*) −(19,20 rad/s^2)**k**. (*c*) −(1,103 m/s^2)**i** − (2,005 m/s^2)**j**.
15.199 (*a*) (0,750 rad/s)**i** + (1,500 rad/s)**j** (*b*) (300 mm/s)**i** − (150 mm/s)**j** (*c*) (60 mm/s)**i** − (30 mm/s)**j** − (90 mm/s)**k**.
15.200 (*a*) (1,125 rad/s^2)**k**. (*b*) −(225 mm/s^2)**i** + (180 mm/s^2)**j** − (112,5 mm/s^2)**k**.
15.202 (210 mm/s)**k**.
15.203 (40,0 mm/s)**k**.
15.204 −(0,75 m/s)**j**.
15.205 (0,91 m/s)**j**.
15.206 (12,78 mm/s)**j**.
15.207 (4,66 mm/s)**j**.
15.210 (ω_1/cos 25°) (−sen 25°**j** + cos 25° **k**)
15.211 ω_1/cos 25° (−sen 25°**j** + cos 25° **k**)
15.212 (*a*) (0,240 rad/s)**i** + (0,080 rad/s)**j** − (1,080 rad/s)**k**. (*b*) (40,0 mm/s)**k**.
15.213 (*a*) −(0,348 rad/s)**i** + (0,279 rad/s)**j** + (1,089 rad/s)**k**. (*b*) −(0,75 m/s)**j**.
15.216 −(1,125 m/s^2)**j**.
15.217 (4,1 m/s^2)**j**.
15.218 −(9,51 mm/s^2)**j**.
15.219 −(8,76 mm/s^2)**j**.
15.220 (*a*) (1,85 m/s)**i** + (0,77 m/s)**j** − (1,2 m/s)**k**. (*b*) −(7,2 m/s^2)**i** − (22,15 m/s^2)**k**.
15.221 (*a*) (0,8 m/s)**i** − (0,6 m/s)**j** − (0,675 m/s)**k**, −(1,8 m/s^2)**j** + (3,6 m/s^2)**k**. (*b*) (0,8 m/s)**i** − (0,6 m/s)**j**; (3,6 m/s^2)**k**
15.222 (*a*) (0,750 m/s)**i** + (1,299 m/s)**j** − (1,732 m/s)**k**. (*b*) (27,1 m/s^2)**i** + (5,63 m/s^2)**j** − (15,00 m/s^2)**k**.
15.223 (*a*) (0,75 m/s)**i** + (1,299 m/s)**j** − (1,732 m/s)**k**. (*b*) −(28,6 m/s^2)**i** + (3,21 m/s^2)**j** − (10,67 m/s^2)**k**.
15.226 −(1,215 m/s)**i** + (1,620 m/s)**k**; −(30,4 m/s^2)**k**.
15.227 −(1,080 m/s)**k**; (19,44 m/s^2)**i** − (12,96 m/s^2)**k**.
15.228 −(1,215 m/s)**i** − (1,080 m/s)**j** + (1,620 m/s)**k**; (19,44 m/s^2)**i** − (30,4 m/s^2)**j** − (12,96 m/s^2)**k**.
15.229 −(1.215 m/s)**i** − (1,080 m/s)**j** + (1,620 m/s)**k**; (25,5 m/s^2)**i** − (25,0 m/s^2)**j** − (21,1 m/s^2)**k**.
15.230 (*a*) (0,8 m/s)**i** − (0,6 m/s)**j** − (0,675 m/s)**k**; −(1,6 m/s^2)**i** − (0,825 m/s^2)**j** + (0,9 m/s^2)**k**. (*b*) (0,8 m/s)**i** − (0,6 m/s)**j**; −(1,6 m/s^2)**i** + (1,2 m/s^2)**j** + (3,6 m/s^2)**k**.
15.232 −(1,39 m/s^2)**i** − (2,05 m/s^2)**j** + (3,5 m/s^2)**k**.
15.234 (*a*) −(0,270 rad/s^2)**i**. (*b*) (155,9 mm/s)**i** − (90 mm/s)**j** − (420 mm/s)**k**. (*c*) −(0,29 m/s^2)**i** − (0,07 m/s^2)**j** − (0,19 m/s^2)**k**.
15.235 (0,600 m/s)**j** − (0,585 m/s)**k**; −(4,76 m/s^2)**i**.
15.236 (0,600 m/s)**i** − (0,225 m/s)**k**; −(0,675 m/s^2)**i** + (3,00 m/s^2)**j** − (3,60 m/s^2)**k**.
15.237 (1,3 m/s)**i** − (1,83 m/s)**j** + (1,63 m/s)**k**; (0,815 m/s^2)**i** − (0,826 m/s^2)**j** − (0,956 m/s^2)**k**.
15.240 −(5,04 m/s)**i** − (1,200 m/s)**k**; −(9,60 m/s^2)**i** − (25,9 m/s^2)**j** + (57,6 m/s^2)**k**.
15.241 −(0,720 m/s)**i** − (1,200 m/s)**k**; −(9,60 m/s^2)**i** + (25,9 m/s^2)**j** − (11,52 m/s^2)**k**.
15.242 (100 mm/s)**i** − (150 mm/s)**j**; −(675 mm/s^2)**i** + (300 mm/s^2)**j** + (360 mm/s^2)**k**.
15.243 (450 mm/s)**i** − (500 mm/s)**j** + (360 mm/s)**k**; (300 mm/s^2)**i** − (1.107 mm/s^2)**j** − (480 mm/s^2)**k**.
15.244 (*a*) (0,610 m/s)**k**; −(0,880 m/s^2)**i** + (1,170 m/s^2)**j**. (*b*) (0,520 m/s)**i** − (0,390 m/s)**j** − (1,000 m/s)**k**; −(4,00 m/s^2)**i** − (3,25 m/s^2)**k**.
15.245 (*a*) (1,390 m/s)**k**; (7,12 m/s^2)**i** − (1,170 m/s^2)**j**. (*b*) (0,520 m/s)**i** − (0,390 m/s)**j** + 1,000 m/s)**k**; (4,00 m/s^2)**i** − (3,25 m/s^2)**k**.
15.248 (*a*) 1,28 m/s^2↓. (*b*) 4,62 m/s^2 ⦣ 16,1°.
15.249 (*a*) −1,824 rad/s^2. (*b*) 103,3 s.
15.250 (*a*) (0,450 m/s)**k**, (4,05 m/s^2)**i**. (*b*) −(1,350 m/s)**k**, −(6,75 m/s^2)**i**.
15.252 (*a*) 0,9 m/s →. (*b*) 4,5 m/s^2 ↑.
15.254 49,4 m/s^2 ⦪ 26,0°.
15.256 (0,196 m/s)**k**.
15.257 (*a*) 0,1749 rad/s ↰. (*b*) 66,2 mm/s ⦨ 25°.
15.259 (0,325 m/s)**i** + (0,1875 m/s)**j** − (0,313 m/s)**k**, −(2,13 m/s^2)**i** + (0,974 m/s^2)**j** − (3,25 m/s^2)**k**.

CAPÍTULO 16

16.1 (*a*) 3,43 N ⦣ 20°. (*b*) 24,4 N ⦨ 73,4°.
16.2 3,57 m/s^2 ←.
16.3 2,09 m/s^2.
16.4 (*a*) 4,09 m/s^2 →. (*b*) 42,5 N
16.5 (*a*) 7,85 m/s^2. (*b*) 3,74 m/s^2. (*c*) 4,06 m/s^2.
16.6 (*a*) 11,2 m. (*b*) 16,03 m.
16.7 (*a*) 5,00 m/s^2 →. (*b*) 0,311 m $\leq h \leq$ 1,489 m.
16.8 (*a*) 2,55 m/s^2 →. (*b*) $h \leq$ 1,047 m.
16.11 (*a*) 0,337 g ⦣ 30°. (*b*) h/d = 4,00.
16.12 (*a*) 0,252 g ⦟ 30°. (*b*) h/d = 4,00.
16.13 2,135 N.
16.14 (*a*) 4,91 m/s^2 ⦟ 30°. (*b*) *AD*: 31,0 N; *BE*: 11,43 N.
16.16 (*a*) 2,54 m/s^2 ⦟ 15°. (*b*) *AC*: 6,01 N (tração); *BD*: 22,4 N (tração).
16.17 *CF*: 19,9 N (compressão); *BE*: 70,3 N (compressão).
16.20 (*a*) 9,3 m/s^2 ⦪ 83,8°. (*b*) **B** = 6,62 N ⦣ 30°, **A** = 2,63 N ⦣ 30°.
16.25 127,2 N · m.
16.26 5.230 rev.
16.27 20,4 rad/s^2 ↲.
16.28 32,7 rad/s^2 ↰.
16.29 59,4 s.
16.30 75,2 rev.
16.34 (1): (*a*) 10,00 rad/s^2 ↰. (*b*) 15,49 rad/s ↰. (2): (*a*) 8 rad/s^2 ↰. (*b*) 13,86 rad/s ↰. (3): (*a*) 4,52 rad/s^2 ↰. (*b*) 10,42 rad/s ↰. (4): (*a*) 6,62 rad/s^2 ↰. (*b*) 8,92 rad/s ↰.
16.36 (*a*) 11,85 rad/s^2 ↲. (*b*) 16,66 N ↗.

16.37 (*a*) 0,235 m/s²↓. (*b*) 0,176 m/s²↑.
16.38 (*a*) 1,31 m/s²↑. (*b*) 1,31 m/s²↓.
16.39 (*a*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 12,50 rad/s² ↺, $\boldsymbol{\alpha}_B$ = 33,3 rad/s² ↺.
(*b*) *A*: 320 rpm ↻, *B*: 320 rpm ↺.
16.40 (*a*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 12,50 rad/s² ↺, $\boldsymbol{\alpha}_B$ = 33,3 rad/s² ↺.
(*b*) *A*: 90,0 rpm ↺, *B*: 120,0 rpm ↻.
16.41 (*a*) Ocorre deslizamento. (*b*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 64,8 rad/s² ↺.
$\boldsymbol{\alpha}_B$ = 9,81 rad/s² ↻.
16.42 (*a*) Não ocorre deslizamento. (*b*) $\boldsymbol{\alpha}_A$ = 16 rad/s² ↺.
$\boldsymbol{\alpha}_B$ = 3,2 rad/s² ↻.
16.48 (*a*) *A*: 4,36 m/s². (*b*) 2,18 m/s² ←.
16.49 (*a*) 388 mm de *A*. (*b*) 2,18 m/s² →.
16.50 (*a*) 2,50 m/s² →. (*b*) 0.
16.51 (*a*) 3,75 m/s² →. (*b*) 1,25 m/s² ←.
16.55 *A*: 0,885 m/s²↓, *B*: 2,60 m/s²↑.
16.56 *A*: 0,273 m/s²↓, *B*: 2,01 m/s²↓.
16.57 *A*: 1,8 kN, *B*: 1,59 kN.
16.58 *A*: 1,38 kN, *B*: 1,85 kN.
16.59 (*a*) 0,741 rad/s² ↺. (*b*) 0,857 m/s²↑.
16.60 (*a*) 2.800 N. (*b*) 15,11 rad/s² ↻.
16.63 (*a*) 3,00 g/L ↻. (*b*) 1,000 g↑. (*c*) 2,00 g↓.
16.64 (*a*) 1,000 g/L ↻. (*b*) 0. (*c*) 1,000 g↓
16.65 (*a*) 1,000 g/L ↻. (*b*) 0,866 g ←.
(*c*) 1.323 g ⦣ 49,1°.
16.66 (*a*) 0,500 g↑. (*b*) 1,500 g↓.
16.67 (*a*) 0. (*b*) 1,000 g↓.
16.68 (*a*) 0,250 g ↑. (*b*) 1,250 g ↓.
16.69 (*a*) 1,718 s. (*b*) 3,31 m/s. (*c*) 7,14 m.
16.70 (*a*) 1,981 s. (*b*) 3,06 m/s. (*c*) 7,98 m.
16.72 (*a*) v_0/r ↺. (*b*) $v_0/\mu_k g$. (*c*) $v_0^2/2\mu_k g$.
16.76 (*a*) 12 rad/s² ↻. (*b*) $\mathbf{A}_x$ = 4 N ←, $\mathbf{A}_y$ = 19,6 N ↑.
16.77 (*a*) 0,67 m. (*b*) 8 rad/s² ↻.
16.78 (*a*) 107,1 rad/s² ↻. (*b*) $\mathbf{C}_x$ = 21,4 N ←,
$\mathbf{C}_y$ = 39,2 N↑.
16.79 (*a*) 150,0 mm. (*b*) 125,0 rad/s² ↻.
16.81 (*a*) 1.529 kg. (*b*) 2,90 mm.
16.82 13,64 kN →.
16.84 (*a*) 1,500 g↓. (*b*) 0,250 mg↑.
16.85 (*a*) 1,286 g↓. (*b*) 0,571 mg↑.
16.86 (*a*) 2,50 g↓. (*b*) 0,375 mg↑.
16.87 150,1 N ⦣ 83,2°.
16.88 (*a*) 9,9 rad/s² ↺. (*b*) 6,23 N · m ↺.
16.89 (*a*) 13,50 rad/s² ↺. (*b*) 6,79 N · m ↺.
16.95 0,806 m.
16.96 $\text{tg}\,\beta = \mu_s(1 + r^2/\bar{k}^2)$.
16.97 (*a*) 2,27 m. (*b*) 0,649 m.
16.98 (*a*) Rola sem deslizamento.
(*b*) 15,7 rad/s² ↻, 3,14 m/s² →.
16.99 (*a*) Rola sem deslizamento.
(*b*) 23,5 rad/s² ↻, 4,71 m/s² →.
16.100 (*a*) Desliza. (*b*) 4,36 rad/s² ↺, 2,94 m/s² →.
16.101 (*a*) Desliza. (*b*) 13,08 rad/s² ↺. 0,98 m/s² ←.
16.102 (*a*) 17,78 rad/s² ↻. 2,13 m/s² →. (*b*) 0,122.
16.105 (*a*) 8,89 rad/s² ↺. 1,067 m/s² ←. (*b*) 0,165.
16.106 (*a*) 0,556 g↓. (*b*) 1,000 g↓. (*c*) 0.
16.107 (*a*) 1,125 g↓. (*b*) 1,000 g↓. (*c*) 1,333 g↓.
16.108 (*a*) 0,765 g↓. (*b*) 1,000 g↓. (*c*) 0,667 g↓.
16.109 (*a*) 1,73 m/s² ←. (*b*) 3,9 N. ←.
16.110 (*a*) 65,4 rad/s² ↺. (*b*) 8,18 m/s²↓.
16.111 (*a*) 1,536 P/mr ↻. (*b*) 0,884 $P(mg + P)$.
16.113 (*a*) 0,1250 g/r ↻. 0,1250 g →, 0,1250 g↓.
16.116 **P** = 16,84 N ⦣ 70,5°; $\mathbf{M}_P$ = 0,228 N · m ↻.
16.117 (*a*) 11,11 rad/s² ↻. (*b*) 37,7 N↑. (*c*) 28,2 N →.
16.118 (*a*) 97,8 N↑. (*b*) 60,3 N↑.
16.119 (*a*) 10,87 rad/s² ↺. (*b*) 4,53 N ←.
16.120 (*a*) 19,4 N. (*b*) 14,5 N ⦣ 20°.
16.121 (*a*) 9,56 rad/s² ↻. (*b*) 8,3 N ⦣ 20°.
16.124 6,40 N ←.
16.125 171,7 N →.
16.126 60,0 N →.
16.127 131,5 N ↑.
16.128 4,83 N ↓.
16.129 29,9 N ⦣ 60°.
16.130 23,5 N ⦣ 60°.
16.133 1,62 N ←.
16.134 (*a*) 15,00 N · m ↺. (*b*) 120,0 N →, 88,2 N↑.
16.135 (*a*) 25,0 N · m ↺. (*b*) 190,0 N →, 104,9 N↑.
16.136 **A** = 8,2 N ↑, **B** = 8,7 N ↑.
16.138 **B** = 805 N ←, **D** = 426 N →.
16.139 **B** = 525 N ⦣ 38,1°, **D** = 322 N ⦣ 15,7°.
16.140 $(mv_D^2/6L)\,\text{tg}\,\theta/\cos^3\theta$.
16.141 (*a*) 9,36 m/s² ⦣ 27,1°. (*b*) 278 N↑.
16.142 (*a*) 9,10 m/s² ⦣ 81,1°. (*b*) 6,54 N.
16.143 (*a*) *A*: 0,400 g/r ↺; *B*: 0,400 g/r ↻. (*b*) 0,200 mg.
(*c*) 0,800 g↓.
16.144 (*a*) 5,63 m/s² ⦣ 25°. (*b*) 7,65 rad/s² ↻.
16.146 (*a*) 13,55 m/s²↓. (*b*) 2,34 m/s²↓.
16.147 (*a*) 1,95 m/s² →. (*b*) 34,6 rad/s² ↺.
16.151 1,54 N · m localizado 0,58 m abaixo de *A*.
16.153 35,2 rad/s² ↺.
16.156 0,63 m.
16.157 (*a*) 0,513 g/L ↻. (*b*) 0,912 *mg*↑. (*c*) 0,241 *mg* →.
16.159 (1): (*a*) 1,200 g/c ↻. (*b*) 0,671 g ⦣ 63,4°.
(2): (*a*) 1,412 g/c ↻. (*b*) 0,706 g ↓.
(3): (*a*) 2,40 g/c ↻. (*b*) 0,500 g ↓.
16.160 (*a*) 0,333 g ↑. (*b*) 1,667 g↓.
16.161 23,7 rad/s² ↺.
16.163 (*a*) 51,2 rad/s²↻. (*b*) 21,0 N ↑.
16.164 (*a*) 57,8 rad/s² ↻. (*b*) 20,4 N ↑.

CAPÍTULO 17

17.1 157 N · m.
17.2 5.230 rev.
17.3 0,760.
17.4 98,8 mm.
17.5 (*a*) 293 rpm. (*b*) 15,92 rev.
17.8 19,5 rev.
17.9 (*a*) 6,35 rev. (*b*) 7,14 N.
17.10 (*a*) 2,54 rev. (*b*) 17,86 N.
17.11 (*a*) 2,96 m/s ↓. (*b*) 2,28 m.
17.12 417,4 N ↓.
17.13 480,2 N ↓.
17.16 11,13 rad/s ↺.
17.17 3,27 rad/s ↻.
17.18 (*a*) 1,732$\sqrt{g/l}$ ↻, 2,50 *W* ↑. (*b*) 5,42 rad/s ↻, 25 N ↑.
17.20 (*a*) 4,1 rad/s ↻, 1,355 kN ⦣ 4,58°.
(*b*) 5,8 rad/s ↻. 3,49 kN ↑.
17.24 (*a*) 3,00 m/s →. (*b*) 30,0 N ←.

17.25 $1{,}154\sqrt{gs}\downarrow$.
17.26 $\sqrt{gs}\downarrow$.
17.27 (*a*) 5,00 rad/s. (*b*) 24,9 N↑.
17.28 $0{,}577\sqrt{g/r}$.
17.29 (*a*) $1{,}324\sqrt{g/r}$ ↰. (*b*) 2,12 *mg* ↑.
17.30 (*a*) 0,39 m. (*b*) 19,6 N.
17.33 0,745 m/s →.
17.34 1,000 m/s →.
17.35 1,054 m/s →.
17.36 3,11 m/s →, 1,798 m/s ↓.
17.37 4,82 m/s →, 0.
17.39 3,67 rad/s ↰, 2,2 m/s ↑.
17.40 $0{,}775\sqrt{g/l}$ ←, $0{,}775\sqrt{g/l}$ ⦣ 60°.
17.42 (*a*) $0{,}926\sqrt{gL}$ ←. (*b*) $1{,}225\sqrt{gL}$ ←.
17.44 4,72 m/s↓.
17.45 84,7 rpm ↻.
17.46 110,8 rpm ↻.
17.47 0,770 m/s ←.
17.48 (*a*) 21,2 N · m. (*b*) 127,3 N · m.
17.50 (*a*) 39,8 N · m. (*b*) 95,5 N · m. (*c*) 229 N · m.
17.52 1,212 N · m.
17.53 48,1 min.
17.54 3,52 s.
17.57 5,26 s.
17.59 3,82 s.
17.60 5,22 s.
17.61 3,13 s.
17.63 $\omega_0(1 + m_A/m_B)$
17.64 (*a*) 667 rpm ↰, 500 rpm ↻. (*b*) 20,9 N · s ↑.
17.69 (*a*) $r^2 gt \operatorname{sen}\beta/(r^2 + \bar{k}^2)$ ⦪ β.
(*b*) $\bar{k}^2 \operatorname{tg}\beta/(r^2 + \bar{k}^2)$.
17.70 0,9 m.
17.71 (*a*) 2,55 m/s↑. (*b*) 10,53 N.
17.72 (*a*) 8,4 m/s↓. (*b*) 39,2 N.
17.74 (*a*) 2,12 m/s →. (*b*) 0,706 m/s →.
17.75 (*a*) 0,706 m/s →. (*b*) 1,235 m/s →.
17.77 (*a*) $0{,}286 r\omega_0/\mu_k g$. (*b*) $0{,}286 r\omega_0$ →, $0{,}286\omega_0$ ↻.
17.78 (*a*) $2{,}50\bar{v}_0/r$. (*b*) $\bar{v}_0/\mu_k g$.
17.79 84,2 rpm.
17.81 (*a*) 2,54 rad/s. (*b*) 1,902 J.
17.82 (*a*) 5,00 rad/s. (*b*) 3,13 rad/s.
17.83 18,07 rad/s.
17.84 −24,2 rpm.
17.86 disco: 337 rpm; placa: 23,5 rpm.
17.87 37,2 rpm.
17.88 (*a*) 15,00 rad/s. (*b*) 6,14 m/s.
17.89 (*a*) 149,2 mm. (*b*) 4,44 rad/s.
17.90 1,136 m/s.
17.94 1,542 m/s.
17.95 0,61 m/s ←.
17.96 (*a*) 22,7 rad/s ↻. (*b*) 4,54 kN →.
17.97 (*a*) 267 mm. (*b*) 21,59 rad/s ↻.
17.98 (*a*) 2,16 m/s →. (*b*) 4,87 kN ⦨ 66,9°.
17.99 (*a*) 79,2 mm. (*b*) 1,992 m/s →.
17.100 242 mm/s →.
17.101 302 mm/s ←.
17.102 14,10 rad/s ↰.
17.105 $\omega_1/2$ ↻, $L\omega_1/4$↑.
17.106 (*a*) $3v_1/L$ ↻, $v_1/2$↓. (*b*) $3v_1/L$ ↰, $v_1/2$↑. (*c*) 0, v_1↑.
17.107 $\pi L/3$.
17.108 $(2 + 5\cos\beta)\omega_1/7$ ↰, $(2 + 5\cos\beta)\bar{v}_1/7$ ←.
17.110 $6v_1 \operatorname{sen}\beta/(1 + 3\operatorname{sen}^2\beta)L$ ↻.
17.112 $0{,}750\, v_0/L$ ↻, $0{,}910\, v_0$ ⦣ 74,1°.
17.113 $0{,}706\, v_0/L$ ↻, $0{,}949\, v_0$ ⦣ 87,9°.
17.114 0,366.
17.115 2,67 m/s.
17.116 5,12°.
17.117 55,9°.
17.120 (*a*) 46,8 mm. (*b*) 21,9 mm.
17.121 (*a*) 1,04 m/s↓. (*b*) 5,2 rad/s ↻.
17.122 (*a*) 0,069 m/s. (*b*) 9,36 rad/s ↻.
17.123 $0{,}650\sqrt{gL}$ →.
17.124 $0{,}866\sqrt{gL}$ →.
17.125 725 mm.
17.126 447 mm.
17.128 (*a*) 2,60 rad/s ↻. (*b*) 1,635 m/s ⦪ 53,4°.
17.131 (*a*) $\mathbf{v}_A = 0$, $\boldsymbol{\omega}_A = v_1/r$ ↻; $\mathbf{v}_B = v_1$ →; $\boldsymbol{\omega}_B = 0$.
(*b*) $\mathbf{v}_A' = 2v_1/7$; $\mathbf{v}_B' = 5v_1/7$.
17.132 $1{,}25\, v_0/r$.
17.133 (*a*) $\mathbf{v}_A = (v_0 \operatorname{sen}\theta)\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_B = (v_0\cos\theta)\mathbf{i}$,
$\boldsymbol{\omega}_A = v_0(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{i} + \cos\theta\,\mathbf{j})/r$, $\boldsymbol{\omega}_B = 0$.
(*b*) $\mathbf{v}_B' = (5\, v_0\cos\theta/7)\mathbf{i}$.
17.134 $\boldsymbol{\omega}_{AB} = 3{,}21$ rad/s ↻, $\boldsymbol{\omega}_{BC} = 16{,}07$ rad/s ↰.
17.135 $\mathbf{A} = 100{,}1$ N↑, $\mathbf{B} = 43{,}9$ N →.
17.136 (*a*) 118,7 rev. (*b*) 7,16 s.
17.138 (*a*) 53,1°. (*b*) $1{,}095\sqrt{gL}$ ⦪ 53,1°.
17.139 7,83 N →, 7,35 N ↑.
17.141 (*a*) $1{,}500\, v_1/b$ ↻. (*b*) $0{,}791\, v_1$ ⦨ 18,4°.
17.143 (*a*) 3,43 rad/s ↻. (*b*) 4,85 rad/s ↻.
17.145 0,400 *r*
17.146 (*a*) 0,923 rad/s ↻. (*b*) 4,97 N →, 6,28 N ↑.

CAPÍTULO 18

18.1 0,357 kg · m²/s; $\theta_x = 48{,}6°$, $\theta_y = 41{,}4°$, $\theta_z = 90°$.
18.2 $0{,}250\, mr^2\omega_2\,\mathbf{j} + 0{,}500\, mr^2\omega_1\mathbf{k}$.
18.3 $(ma^2\omega/12)(3\,\mathbf{j} + 2\,\mathbf{k})$.
18.4 11,88°.
18.7 (*a*) $0{,}276\, ma^2\omega$. (*b*) 25,2°.
18.8 (*a*) $0{,}432\, ma^2\omega$. (*b*) 20,2°.
18.9 −(4,5 kg · m²/s)**i** + (9,25 kg · m²/s)**j** +
+ (1,5 kg · m²/s)**k**.
18.10 (2,16 kg · m²/s)**i** − (0,48 kg · m²/s)**j** +
+ (1,44 kg · m²/s)**k**.
18.11 (*a*) 2,91 rad/s. (*b*) 0,0551 rad/s.
18.12 (0,320 kg · m²/s)**i** − (0,009 kg · m²/s)**j** −
− (467 kg · m²/s)**k**.
18.15 (*a*) $mr^2\boldsymbol{\omega}\,(0{,}379\,\mathbf{i} - 0{,}483\,\mathbf{j})$. (*b*) 51,9°.
18.16 (*a*) (0,063 kg · m²/s)**i** + (0,216 kg · m²/s)**j**.
(*b*) −(0,513 kg · m²/s)**i** + (0,216 kg · m²/s)**j**.
18.19 (*a*) −(1,508 kg · m²/s)**i** + (1,508 kg · m²/s)**j** +
+ (3,351 kg · m²/s)**k**. (*b*) 147,5°.
18.20 (*a*) −(1,508 kg · m²)**i** − (1,508 kg · m²)**j** +
+ (3,351 kg · m²)**k**. (*b*) 32,5°.
18.21 826 N.
18.22 3,56 s.
18.23 (*a*) −(0,300 m/s)**k**. (*b*) −(0,962 rad/s)**i** −
− (0,577 m/s)**j**.

18.24 (*a*) (0,300 m/s)**j**. (*b*) −(3,46 rad/s)**i** + (1,923 rad/s)**j** − (0,857 rad/s)**k**.
18.25 (*a*) $(F\Delta t/m)\mathbf{i}$. (*b*) $(F\Delta t/ma)(-1{,}714\,\mathbf{j} + 8{,}57\,\mathbf{k})$.
18.26 (*a*) $(F\Delta t/m)\mathbf{i}$. (*b*) $(F\Delta t/ma)(3{,}43\,\mathbf{j} - 5{,}14\,\mathbf{k})$.
18.29 (*a*) $0{,}125\,\omega_0\,(-\mathbf{i} + \mathbf{j})$. (*b*) $0{,}0884\,a\omega_0\,\mathbf{k}$.
18.30 (*a*) $0{,}1031\,ma\omega_0\,\mathbf{k}$. (*b*) $-0{,}01473\,ma\omega_0\,\mathbf{k}$.
18.31 $(0{,}429\,\bar{v}_0/c)\mathbf{i} + (0{,}429\,\bar{v}_0/a)\mathbf{k}$.
18.32 (*a*) $-(6\,v_0/7)\mathbf{j}$. (*b*) $(mv_0/7)\mathbf{j}$.
18.33 (*a*) *C* e *B*. (*b*) *C*: 8,16 s, *D*: 4,84 s. (*c*) 0,520 s.
18.34 (*a*) *D* e *A*. (*b*) *D*: 6,82 s, *A*: 1,848 s. (*c*) 0,347 s.
18.39 1,417 J.
18.40 $0{,}1250\,mr^2(\omega_2^2 + 2\omega_1^2)$.
18.41 $0{,}1250\,ma^2\omega^2$.
18.42 $0{,}228\,mr^2\omega^2$.
18.43 $0{,}1896\,mr^2\omega^2$.
18.44 1,296 J.
18.47 34,4 J.
18.48 94,1 J.
18.49 $0{,}1250\,ma^2\omega^2$.
18.50 $0{,}203\,ma^2\omega^2$.
18.53 11 J.
18.54 55,7 J.
18.55 (3,21 N · m)**k**.
18.56 $0{,}500\,mr^2\omega_1\omega_2\,\mathbf{i}$.
18.57 $0{,}1667\,ma^2\omega^2\,\mathbf{i}$.
18.58 $-0{,}958\,mr^2\omega^2\,\mathbf{k}$.
18.59 (7,5 N · m)**i**.
18.61 (1,890 N · m)**i** + (2,14 N · m)**j** + (3,21 N · m)**k**.
18.62 −(1,890 N · m)**i** − (2,14 N · m)**j** + (3,21 N · m)**k**.
18.65 **A** = −(12,00 N)**i**, **B** = −(4,00 N)**i**.
18.66 $\mathbf{C} = \frac{1}{6}mb\omega^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\mathbf{i}$, $\mathbf{C} = -\frac{1}{6}mb\omega^2 \operatorname{sen}\beta\cos\beta\,\mathbf{i}$.
18.67 **A** = (115 N)**k**, **B** = −(115 N)**k**.
18.68 **A** = −(4,94 N)**j** − (4,12 N)**k**, **B** = (4,94 N)**j** + (4,12 N)**k**.
18.71 (*a*) (20,0 rad/s²)**j**. (*b*) **A** = −(3,75 N)**k**, **B** = −(1,250 N)**k**.
18.72 (*a*) $(3\,M_0/mb^2\cos^2\beta)\mathbf{j}$. (*b*) $\mathbf{C} = (M_0\operatorname{tg}\beta/2b)\mathbf{k}$, $\mathbf{D} = -(M_0\operatorname{tg}\beta/2b)\mathbf{k}$.
18.75 (*a*) (21,3 N · m)**i**. (*b*) **A** = (1,6 N)**j**, **B** = −(1,6 N)**j**.
18.76 (*a*) (1,17 N · m)**i**. (*b*) **A** = −(0,98 N)**j** + (1,17 N)**k**, **B** = (0,98 N)**j** − (1,17 N)**k**.
18.77 (*a*) (0,06 N · m)**i**. (*b*) **A** = −(0,16 N)**j** + (0,16 N)**k**, **B** = (0,16 N)**j** − (0,16 N)**k**.
18.78 **A** = −(2,17 N)**j** − (1,85 N)**k**, **B** = (2,17 N)**j** + (1,85 N)**k**.
18.79 (*a*) 10,47 N · m. (*b*) 10,47 N · m.
18.80 4,29 kN · m.
18.81 −(0,754 N · m)**i**.
18.83 24,0 N ↑.
18.84 1,138° ⤸. Ponto *A* move para *cima*.
18.85 (*a*) 38,1°. (*b*) 11,78 rad/s.
18.86 13,46 rad/s.
18.87 (*a*) 37,8°. (*b*) 7,67 rad/s.
18.88 ω = 8,9 rad/s.
18.89 5,45 rad/s.
18.90 2,11 N ⦟ 18,7°.
18.93 (*a*) **C** = −(123,4 N)**i**, **D** = (123,4 N)**i**. (*b*) **C** = **D** = 0.
18.94 91,2 rpm.
18.95 **A** = (2,95 N)**k**, **B** = −(2,95 N)**k**.
18.96 10,2 rad/s.
18.99 $(11{,}23\text{ N}\cdot\text{m})\cos^2\theta\,\mathbf{i} + (11{,}23\text{ N}\cdot\text{m})\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathbf{j} - (2{,}81\text{ N}\cdot\text{m})\operatorname{sen}\theta\cos\theta\,\mathbf{k}$.
18.101 **C** = −(89,8 N)**i** + (52,8 N)**k**, **D** = −(89,8 N)**i** − (52,8 N)**k**.
18.102 (*a*) (0,1962 N · m)**j**. (*b*) **C** = −(48,6 N)**i** + (38,9 N)**k**, **D** = −(48,6 N)**i** − (38,9 N)**k**.
18.103 (*a*) −(9,75 N · m)**j**. (*b*) **A** = −(62,5 N)**i** + (18,75 N)**k**, $\mathbf{M}_A$ = (12,18 N · m)**i** + (15,63 N · m)**k**.
18.104 (*a*) (1,62 N · m)**i**. (*b*) **D** = −(30,2 N)**j** + (21 N)**k**, **E** = −(4,6 N)**j** + (21 N)**k**.
18.107 250 rpm.
18.108 72°.
18.109 1.141 rpm.
18.111 45,9 rpm, 533 rpm.
18.113 23,7°.
18.114 (*a*) 52,7 rad/s. (*b*) 6,44 rad/s.
18.115 (*a*) 40,0°. (*b*) 20,7°. (*c*) −75,1°.
18.116 (*a*) 49 rad/s. (*b*) 4,6 rad/s.
18.125 (*a*) θ_x = 52,5°, θ_y = 37,5°, θ_z = 90°. (*b*) 53,8 rev/h. (*c*) 6,68 rev/h.
18.126 (*a*) θ_x = 90°, θ_y = 17,65°, θ_z = 72,35°. (*b*) 44,8 rev/h. (*c*) 6,68 rev/h.
18.129 (*a*) 13,19°. (*b*) 1.242 rpm (retrógrado).
18.130 (*a*) 109,4 rpm; γ_x = 90°, γ_y = 100,05°, γ_z = 10,05°. (*b*) θ_x = 90°, θ_y = 113,9°, θ_z = 23,9°. (*c*) precessão: 47,1 rpm; rotação: 64,6 rpm.
18.131 (*a*) 4,00 rad/s. (*b*) 5,66 rad/s.
18.132 (*a*) $\theta_0 \le \theta \le 180° - \theta_0$. (*b*) $\dot\theta_{máx} = \dot\theta_0 \operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0$. (*c*) $\dot\theta_{mín} = \dot\theta_0 \operatorname{sen}^2\theta_0$.
18.133 (*a*) $30° \le \theta \le 150°$. (*b*) $\dot\theta_{mín}$ = 2,40 rad/s. (*e*) $\dot\theta_{máx}$ = 3,29 rad/s.
18.134 (*a*) $\dot\theta_{mín}$ = 1,200 rad/s. (*b*) $\dot\theta_{máx}$ = 2,68 rad/s.
18.137 (*a*) 44,1°. (*b*) $\dot\varphi$ = −8,72 rad/s, $\dot\psi$ = 56,3 rad/s.
18.138 (*a*) 32,7 rad/s. (*b*) $\dot\varphi$ = −13,33 rad/s, $\dot\psi$ = 44,3 rad/s.
18.140 (*a*) $\frac{1}{2}I'(\dot\varphi\operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2}I'\dot\theta^2 + \frac{1}{2}I\omega_z^2 + mgc\cos\theta = E$.
18.147 (0,234 kg · m²/s)**j** + (1,250 kg · m²/s)**k**.
18.148 (*a*) −(1,131 kg · m²/s)**i** + (1,131 kg · m²/s)**j** + + (2,513 kg · m²/s)**k**. (*b*) 150,5°.
18.150 (*a*) $-\frac{1}{6}\omega_0\mathbf{i} + \frac{1}{6}\omega_0\,\mathbf{j}$. (*b*) $\frac{1}{6}\omega_0 a\mathbf{k}$.
18.151 $\frac{5}{48}ma^2\omega_0^2$.
18.153 (*a*) 52,1 rad/s². (*b*) **A** = −(2,50 N)**i**, **B** = (2,50 N)**i**.
18.154 (*a*) 63°. (*b*) 8,1 rad/s.
18.155 (*a*) (2,22 N · m)**j**. (*b*) **F** = −(19,2 N)**i** − (7,2 N)**k**; $\mathbf{M}_0$ = (2,4 N · m)**i** − (3,84 N · m)**k**.
18.156 (*a*) **A** = (1,786 kN)**i** + (143,5 kN)**j**; **B** = −(1.786 kN)**i** + (150,8 kN)**j**. (*b*) −(35,7 kN · m)**k**.
18.157 1.326 rpm.

CAPÍTULO 19

19.1 0,31 m/s, 19,74 m/s^2.
19.2 0,950 mm, 239 mm/s.
19.3 1,225 m/s, 0,650 Hz.
19.4 (*a*) 0,85 s, 2,6 Hz. (*b*) 0,82 m/s, 13,3 m/s^2.
19.5 (*a*) 0,324 s, 3,08 Hz. (*b*) 12,91 mm, 4,84 m/s^2.
19.6 (*a*) 10,9°. (*b*) 1,93 m/s^2.
19.7 (*a*) 0,557 Hz. (*b*) 293 mm/s.
19.9 (*a*) 3,14 s. (*b*) 6,40 m. (*c*) 38,7°.
19.10 11,04 mm.
19.11 (*a*) 5,49 m. (*b*) 80,5 m/s^2 ↓.
19.12 (*a*) 0,0425 s. (*b*) 2,06 m/s ↑, 20 m/s^2 ↓.
19.13 28,4 mm ↑, 2,5 m/s ↓, 5,7 m/s^2 ↓.
19.14 (*a*) 3,89°. (*b*) 0,1538 m/s, 0,666 m/s^2.
19.17 (*a*) 0,208 s, 4,81 Hz. (*b*) 1,361 m/s, 41,1 m/s^2.
19.18 (*a*) 0,416 s, 2,41 Hz. (*b*) 0,680 m/s, 10,29 m/s^2.
19.19 (*a*) 0,55 s, 2,82 Hz. (*b*) 0,71 m/s, 12,5 m/s^2.
19.20 2,63 s.
19.23 (*a*) 3,41 kg. (*b*) 538 N/m.
19.24 (*a*) 6,80 kg. (*b*) 0,583 s.
19.25 (*a*) 7,11 kN/m. (*b*) 2,6 kg.
19.26 3,2 kN/m.
19.27 (*a*) 22,3 MN/m. (*b*) 266 Hz.
19.30 (*a*) 55,4 mm. (*b*) 1,497 Hz.
19.34 16,26°.
19.35 (*a*) 1,737 s. (*b*) 1,864 s. (*c*) 2,05 s.
19.36 0,71 m.
19.37 (*a*) 3,36 Hz. (*b*) 42,6 mm.
19.38 (*a*) 0,304 s. (*b*) 0,21 m/s.
19.39 (*a*) 0,1927 s. (*b*) 53,5 m/s^2.
19.40 (*a*) 0,483 s. (*b*) 0,26 m/s.
19.43 (*a*) 1,117 rad/s. (*b*) 400 mm.
19.44 (*a*) 2,28 s. (*b*) 1,294 m.
19.45 75,5°.
19.46 0,38 Hz.
19.47 (*a*) 1.067 s. (*b*) 89,7 mm.
19.49 (*a*) 0,933 s. (*b*) 0,835 s.
19.50 (*a*) 1,617 s. (*b*) 1,676 s.
19.55 (*a*) 2,21 Hz. (*b*) 115,3 N/m.
19.56 5 Hz.
19.57 0,945 Hz.
19.58 $0{,}276\sqrt{k/m - g/4L}$.
19.59 (*a*) 3,885 rad/s. (*b*) 3,75 rad/s.
19.61 82,1 mm/s.
19.63 (*a*) 21,3 kg. (*b*) 1,838 s.
19.64 (*a*) 0,875 s. (*b*) 1,111 s.
19.65 (*a*) 1,951 s. (*b*) 1,752 m/s.
19.66 7,3 kg · m^2.
19.69 $2\pi\sqrt{R/g}$.
19.70 2,71 s.
19.71 1,476 m/s, 31,1 m/s^2.
19.72 39 mm, 25,8 m/s^2.
19.73 0,289 l.
19.74 75,5°.
19.76 130,6 mm.
19.77 $0{,}276\sqrt{k/m - g/4L}$.
19.78 (*a*) 0,702 s. (*b*) 90 mm/s.
19.79 2,14 Hz.
19.80 0,387 s.
19.83 1,737 s.
19.84 $0{,}1899\sqrt{g/l}$.
19.85 1,327 s.
19.88 3,69 s.
19.89 $2\pi\sqrt{2m/3k}$.
19.90 1,063 Hz.
19.91 (*a*) $0{,}1592\sqrt{(g/l)(ka^2/wl - 1)}$. (*b*) $\sqrt{wl/k}$.
19.92 32,6 N.
19.94 0,742 Hz.
19.96 $(2\pi/\cos\beta)\ \sqrt{m/6k}$.
19.97 (*a*) 0,352 s. (*b*) 0,352 s.
19.98 $1{,}814\ l/\sqrt{gr}$.
19.99 11,40 N.
19.100 (*a*) 35,3 mm (em fase). (*b*) 300 mm (fora de fase).
19.101 (*a*) 192 N/m. (*b*) 58 N/m.
19.102 $\sqrt{k/2m} < \omega_f < \sqrt{3k/2m}$.
19.105 $\omega_f < 8{,}16$ rad/s.
19.106 22,5 mm, 5,63 mm.
19.107 $\omega_f < 9{,}08$ rad/s e $\omega_f > 17{,}04$ rad/s.
19.108 651 rpm.
19.109 (*a*) 90,0 mm. (*b*) 18,00 N.
19.112 (*a*) 25,2 mm. (*b*) $-0{,}437\ \text{sen}(\pi t)$ N.
19.114 22,0 mm.
19.115 $\omega_f \leq 328$ rpm e $\omega_f \geq 338$ rpm.
19.116 783 rpm.
19.118 39,1 kg.
19.120 $\omega_f \leq 254$ rpm e $\omega_f \geq 303$ rpm.
19.121 (*a*) 4,17%. (*b*) 84,9 Hz.
19.122 8,04%.
19.123 (1) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$; (2) $|1/(1 - \omega_f^2/\omega_n^2)|$.
19.124 (*a*) 1.406 rpm. (*b*) 0,403 mm.
19.132 (*a*) 0,01393. (*b*) 0,737 N · s/m.
19.133 (*a*) 104,4 kN · s/m. (*b*) 3.704,6 kN/m.
19.134 56,9 mm.
19.136 (*a*) 108 kN/m. (*b*) 0,1908 s.
19.137 (*a*) $\ddot{\theta} + (3\,c/m)\,\dot{\theta} + (3k/4m)\,\theta = 0$. (*b*) $\sqrt{km/3}$.
19.139 0,47 mm.
19.141 $c/c_c \geq 0{,}707$.
19.143 (*a*) 0,0905. (*b*) 366 N · s/m.
19.144 (*a*) −0,324 mm. (*b*) 0,0884 mm.
19.145 13,01 mm.
19.146 (*a*) 2.210 kN/m. (*b*) 0,0286.
19.147 134,8 mm, 143,7 N.
19.149 (*a*) 82,8 N. (*b*) 46,3 N.
19.151 (*a*) $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + c\dfrac{dx}{dt} + kx = \delta_m(k\ \text{sen}\ \omega_f t + c\omega_f \cos \omega_f t)$
onde $\omega_f = 2\pi v/L$.
(*b*) $\delta_m\sqrt{k^2 + (c\omega_f)^2}/\sqrt{(k - m\omega_f^2)^2 + (c\omega_f)^2}$.
19.153 $R < 2\sqrt{LC}$.
19.154 (*a*) E/R (*b*) L/R

19.157 (*a*) $kx_A + c\frac{d}{dt}(x_A - x_m) = 0$,

$m\frac{d^2x_m}{dt^2} + c\frac{d}{dt}(x_m - x_A) = P_m \text{ sen } \omega_f t$.

(*b*) $\frac{1}{C}q_A + R\frac{d}{dt}(q_A - q_m) = 0$,

$L\frac{d^2q_m}{dt^2} + R\frac{d}{dt}(q_m - q_A) = E_m \text{ sen } \omega_f t$.

19.158 (*a*) $c_1\frac{dx_A}{dt} + (k_1 + k_2)x_A - k_2x_m = 0$

$m\frac{d^2x_m}{dt^2} + c_2\frac{dx_m}{dt} + k_2(x_m - x_A) = 0$

(*b*) $R_1\frac{dq_A}{dt} + \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}q_A - \frac{1}{C_2}q_m = 0$

$L\frac{d^2q_m}{dt^2} + R_2\frac{dq_m}{dt} + \frac{1}{C_2}(q_m - q_A) = 0$

19.159 (*a*) $2\pi\sqrt{2a/3g}$. (*b*) 0,1667 a.
19.160 (*a*) 4,91 mm, 5,81 Hz, 0,1791 m/s. (*b*) 491 N. (*c*) 0,1592 m/s ↑.
19.161 1,771 s.
19.163 (*a*) 6,16 Hz, 4,91 mm, 0,1900 m/s. (*b*) 4,91 N, (*c*) 0,1542 m/s ↓.
19.164 (*a*) 0,316 L. (*b*) 0,200 $\sqrt{g/L}$.
19.166 1,456 m.
19.169 (*a*) 5,75 N. (*b*) 0,00710 mm.
19.170 (*a*) $m\ddot{x} + 4Tx/l = 0$. (*b*) $\pi\sqrt{ml/T}$.

APÊNDICE B

B.1 (*a*) $m(r_1^2 + r_2^2)/4$. (*b*) $m(r_2^1 + r_2^2)/2$.
B.2 (*a*) 0,0699 ma^2. (b) 0,320 ma^2.
B.3 (*a*) 25 $mr^2/64$. (*b*) 0,1522 mr_2^2.
B.4 (a) $mb^2/7$. (*b*) $m(7a^2 + 10b^2)/70$.
B.5 (a) $ma^2/3$. (*b*) $3ma^2/2$.
B.6 (a) $7ma^2/6$. (b) $ma^2/2$.
B.9 1.329 mh^2.
B.10 $m(3a^2 + L^2)/12$.
B.11 (*a*) 0,241 mh^2. (*b*) $m(3a^2 + 0{,}1204\,h^2)$.
B.12 $m(b^2 + h^2)/10$.
B.14 $m(a^2 + b^2)/5$.
B.15 $I_x = I_y = ma^2/4$; $I_z = ma^2/2$
B.17 837×10^{-9}kg · m^2; 6,92mm.
B.18 1.286×10^{-6} kg · m^2; 8,8 mm.
B.19 $m(3a^2 + 2h^2)/6$
B.21 (*a*) 27,5 mm to the right of A. (*b*) 32,0 mm.
B.23 (*a*) 46 mm. (*b*) $8{,}447 \times 10^{-3}$ km · m^2; 45,4 mm.
B.24 (*a*) $\pi\rho l^2\left[6a^2t\left(\frac{5a^2}{3l^2} + \frac{2a}{l} + 1\right) + \frac{d^2l}{4}\right]$ (*b*) 0,1851
B.25 $I_x = 26 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 38{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $Iz = 17{,}55 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.26 $I_x = 175{,}5 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_y = 309 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_z = 154{,}4 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.27 $I_x = 1120 \times 10^{-6}$ kg · m; $I_y = 1348 \times 10^{-6}$ kg · m; $I_z = 458 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
B.28 $I_x = 282{,}5 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_y = 108{,}6 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_z = 372{,}2 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
B.31 (*a*) $13{,}99 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $20{,}6 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*c*) $14{,}30 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.32 $73{,}3 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.34 $I_x = 38{,}1 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $k_x = 110{,}7$ mm.
B.35 (*a*) $26{,}4 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $31{,}2 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*c*) $8{,}58 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.37 $I_x = 0{,}0232$ kg · m^2; $I_y = 0{,}0214$ kg · m^2; $I_z = 0{,}018$ kg · m^2.
B.38 $I_x = 0{,}323$ kg · m^2; $I_y = I_z = 0{,}419$ kg · m^2.
B.39 $I_{xy} = 2{,}50 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 4{,}06 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 8{,}81 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.40 $I_{xy} = 2{,}44 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 1{,}415 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 4{,}59 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.41 $I_{xy} = -229 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = -71 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = 466 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
B.42 $I_{xy} = -709 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = 209 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = -869 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
B.45 $I_{xy} = -8{,}04 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{yz} = 12{,}90 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $I_{zx} = 94{,}0 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.46 $I_{xy} = 0$; $I_{yz} = 48{,}3 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = -4{,}43 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.47 $I_{xy} = wa^3(1 - 5\pi)/g$; $I_{yz} = -11\,\pi wa^3/g$; $I_{zx} = 4\,wa^3\,(1 + 2\pi)g$.
B.48 $I_{xy} = -11\,wa^3/g$; $I_{yz} = wa^3\,(\pi + 6)/2g$; $I_{zx} = -wa^3/4g$.
B.49 $I_{xy} = 47{,}9 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{yz} = 102{,}1 \times 10^{-6}$ kg · m^2; $I_{zx} = 64{,}1 \times 10^{-6}$ kg · m^2.
B.50 $I_{xy} = -m'R_1^3/2$; $I_{yz} = m'R_1^3/2$; $I_{zx} = -m'R_2^3/2$.
B.52 (*a*) $mac/20$. (*b*) $I_{xy} = mab/20$; $I_{yz} = mbc/20$.
B.55 $18{,}17 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.56 $11{,}81 \times 10^{-3}$ kg · m^2.
B.57 $5\,Wa^2/18g$.
B.58 $4{,}41\,\gamma ta^4/g$.
B.59 281×10^{-3} kg · m^2.
B.60 0,354 kg · m^2.
B.63 (*a*) $b/a = 2$; $c/a = 2$. (*b*) $b/a = 1$; $c/a = 0{,}5$.
B.64 (*a*) 2. (*b*) $\sqrt{2/3}$.
B.65 (*a*) $1/\sqrt{3}$. (*b*) $\sqrt{7/12}$
B.69 (*a*) $K_1 = 0{,}363ma^2$; $K_2 = 1{,}583ma^2$; $K_3 = 1{,}720ma^2$. (*b*) $(\theta_x)_1 = (\theta_z)_1 = 49{,}7°$, $(\theta_y)_1 = 113{,}7°$; $(\theta_x)_2 = 45°$, $(\theta_y)_2 = 90°$, $(\theta_z)_2 = 135°$; $(\theta_x)_3 = (\theta_z)_3 = 73{,}5°$, $(\theta_y)_3 = 23{,}7°$.
B.70 (*a*) $K_1 = 14{,}30 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $K_2 = 13{,}96 \times 10^{-3}$ kg · m^2; $K_3 = 20{,}6 \times 10^{-3}$ kg · m^2. (*b*) $(\theta_x)_1 = (\theta_y)_1 = 90{,}0°$, $(\theta_z)_1 = 0$; $(\theta_x)_2 = 3{,}42°$, $(\theta_y)_2 = 86{,}6°$, $(\theta_z)_2 = 90{,}0°$; $(\theta_x)_3 = 93{,}4°$, $(\theta_y)_3 = 3{,}4°$, $(\theta_z)_3 = 90{,}0°$.
B.72 (*a*) $K_1 = 0{,}1639Wa^2/g$; $K_2 = 1{,}054Wa^2/g$; $K_3 = 1{,}115Wa^2/g$. (*b*) $(\theta_x)_1 = 36{,}7°$, $(\theta_y)_1 = 71{,}6°$, $(\theta_z)_1 = 59{,}5°$; $(\theta_x)_2 = 74{,}9°$, $(\theta_y)_2 = 54{,}5°$, $(\theta_z)_2 = 140{,}5°$; $(\theta_x)_3 = 57{,}5°$, $(\theta_y)_3 = 138{,}8°$, $(\theta_z)_3 = 112{,}4°$.
B.73 (*a*) $K_1 = 2{,}26\gamma ta^4/g$; $K_2 = 17{,}27\gamma ta^4/g$; $K_3 = 19{,}08\gamma ta^4/g$. (*b*) $(\theta_x)_1 = 85{,}0°$, $(\theta_y)_1 = 36{,}8°$, $(\theta_z)_1 = 53{,}7°$; $(\theta_x)_2 = 81{,}7°$, $(\theta_y)_2 = 54{,}7°$, $(\theta_z)_2 = 143{,}4°$; $(\theta_x)_3 = 9{,}70°$, $(\theta_y)_3 = 99{,}0°$, $(\theta_z)_3 = 86{,}3°$.

ÍNDICE

D

E

F

T

V

Centroides de áreas e linhas de formatos comuns

Formato		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Área triangular			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Área de um quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Área semicircular		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Área semiparabólica		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Área parabólica		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$
Área sob arco parabólico		$\frac{3a}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{ah}{3}$
Setor circular		$\frac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2
Arco de um quarto de círculo		$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{\pi r}{2}$
Arco semicircular		0	$\frac{2r}{\pi}$	πr
Arco de círculo		$\frac{r \operatorname{sen} \alpha}{\alpha}$	0	$2\alpha r$

Momentos de inércia de áreas geométricas comuns

Retângulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	
Triângulo $\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	
Círculo $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	
Semicírculo $I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$	
Quarto de círculo $I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$	
Elipse $\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$	

Momentos de inércia de sólidos geométricos comuns

Barra esbelta $I_y = I_z = \frac{1}{12}mL^2$	
Placa retangular delgada $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}mc^2$ $I_z = \frac{1}{12}mb^2$	
Prisma retangular $I_x = \frac{1}{12}m(b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m(c^2 + a^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$	
Disco delgado $I_x = \frac{1}{2}mr^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{4}mr^2$	
Cilindro circular $I_x = \frac{1}{2}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{1}{12}m(3a^2 + L^2)$	
Cone circular $I_x = \frac{3}{10}ma^2$ $I_y = I_z = \frac{3}{5}m(\frac{1}{4}a^2 + h^2)$	
Esfera $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}ma^2$	

Prefixos SI

Fator de multiplicação	Prefixo	Símbolo
1.000.000.000.000 = 10^{12}	tera	T
1.000.000.000 = 10^{9}	giga	G
1.000.000 = 10^{6}	mega	M
1.000 = 10^{3}	quilo	k
100 = 10^{2}	hecto*	h
10 = 10^{1}	deca*	da
0,1 = 10^{-1}	deci*	d
0,01 = 10^{-2}	centi*	c
0,001 = 10^{-3}	mili	m
0,000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0,000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0,000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0,000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0,000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

* O uso desses prefixos deve ser evitado, exceto para a medição de áreas e volumes e para o uso não técnico do centímetro, como no caso das medidas do corpo e de roupas.

Principais unidades do SI usadas em mecânica

Grandeza	Unidade	Símbolo	Fórmula
Aceleração	Metro por segundo ao quadrado	. . .	m/s^2
Ângulo	Radiano	rad	*
Aceleração angular	Radiano por segundo ao quadrado	. . .	rad/s^2
Velocidade angular	Radiano por segundo	. . .	rad/s
Área	Metro quadrado	. . .	m^2
Massa específica	Quilograma por metro cúbico	. . .	kg/m^3
Energia	Joule	J	$N \cdot m$
Força	Newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Frequência	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	. . .	$kg \cdot m/s$
Comprimento	Metro	m	**
Massa	Quilograma	kg	**
Momento de uma força	Newton-metro	. . .	$N \cdot m$
Potência	Watt	W	J/s
Pressão	Pascal	Pa	N/m^2
Tensão	Pascal	Pa	N/m^2
Tempo	Segundo	s	**
Velocidade	Metro por segundo	. . .	m/s
Volume			
Sólidos	Metro cúbico	. . .	m^3
Líquidos	Litro	L	$10^{-3}\ m^3$
Trabalho	Joule	J	$N \cdot m$

* Unidade suplementar (1 revolução = 2π rad = 360°).
** Unidade básica.